Muestreo y Procesamiento Digital

Primer parcial

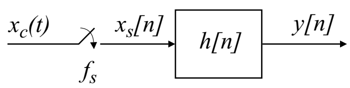
23 de octubre del 2001

Indicaciones:

- El parcial tiene una duración máxima de 4 horas, y un puntaje máximo de **40** puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada ejercicio o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- En la primer hoja de cada ejercicio o pregunta se deberá indicar el número de hojas que corresponden a ese ejercicio o pregunta.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. A criterio del tribunal, se podrán **restar hasta dos puntos** de un parcial considerado ilegible.
- Al finalizar el parcial se deberá entregar el sobre con las hojas con la solución dentro de él. El sobre **no debe** rayarse, doblarse ni alterarse de ninguna forma.

Problema 1 [15 pts.]

Sean $x_s[n]$ una secuencia obtenida a partir de las muestras de un proceso estocástico real, estacionario de tiempo continuo $x_c(t)$, muestreado con una frecuencia $f_s = 1/T_s$.

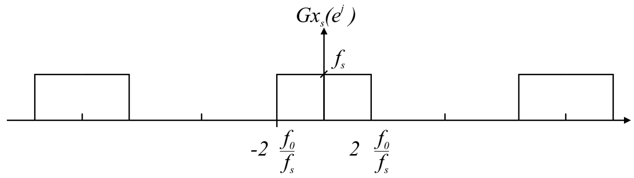


1. [2 pts.] Hallar una expresión para la autocorrelación de x_s, $R_{x_s}[n]$, en función de la autocorrelación de $x_c(t)$, $R_{x_c}(\tau)$

   Solución: $R_{x_s}[n] = E\{x_s[m]x_s[m+n]\} = E\{x_c(mT_s)x_c((m+n)T_s)\} = R_{x_c}(nT_s)$

2. [4 pts.] Sea $G_{x_c}(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$ la densidad espectral de $x_c(t)$. Hallar todas las posibles frecuencias de muestreo de forma que no haya solapamiento en la densidad espectral de $x_s[n]$, $G_{x_s}(e^{j\theta})$. Bosquejar $G_{x_s}(e^{j\theta})$ indicando las características (altura, frecuencia particulares, etc.)

   Solución: $R_{x_c}(\tau)$ es una señal de banda acotada en f_o ($w_o = 2\pi f_o$). Según el teorema de muestreo, para no tener solapamiento debemos utilizar una frecuencia de muestreo $f_s \geq 2f_o$.



3. [4 pts.] Hallar $R_{x_s}[n]$, en las condiciones de la parte 2.

   Solución: $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s \Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ donde $\theta_o = 2\pi \frac{f_o}{f_s}$

$$R_{x_s}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_{x_s}(e^{j\theta})e^{jn\theta}d\theta = \frac{f_s}{2\pi}\int_{-\theta_o}^{\theta_o} e^{jn\theta}d\theta$$

$$= \frac{f_s}{2\pi}\left.\frac{e^{jn\theta}}{jn}\right|_{-\theta_o}^{\theta_o} = f_s\frac{e^{jn\theta_o} - e^{-jn\theta_o}}{j2\pi n} = f_s\frac{sen(\theta_o n)}{\pi n}$$

Las muestras $x_s[n]$ son filtradas con un filtro discreto de respuesta frecuencial $H(e^{j\theta})$.

4. [1 pts.] Dar una expresión para la densidad espectral de la salida del filtro, $y[n]$, $G_y(e^{j\theta})$.

   Solución: $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta})$

5. [4 pts.] Hallar la autocorrelación de la señal de salida, $R_y[n]$, de los siguientes filtros en función de los parámetros del problema.

   (a) definido por la ecuación de recurrencia: $y[n] = x_s[n] - a\,x_s[n-1]$

   Solución:

$$R_y[n] = E\{y[m]y[m+n]\} = E\{(x_s[m] - ax_s[m-1])(x_s[m+n] - ax_s[m+n-1])\} =$$

$$E\{x_s[m]x_s[m+n]\} - aE\{x_s[m-1]x_s[m+n]\} - aE\{x_s[m]x_s[m+n-1]\} + a^2E\{x_s[m-1]x_s[m+n-1]\}$$

$$= (1+a^2)R_{x_s}[n] - a(R_{x_s}[n+1]) + R_{x_s}[n-1])$$

$$R_y[n] = (1+a^2)f_s\frac{sen(\theta_o n)}{\pi n} - a\,f_s\left(\frac{sen(\theta_o(n+1))}{\pi(n+1)} + \frac{sen(\theta_o(n-1))}{\pi(n-1)}\right)$$

   (b) de transferencia $H(e^{j\theta}) = \Pi\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)$, con $\theta_0 f_s = \omega_0$.

   Solución: $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s\Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ con lo que $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s\Pi\left(\frac{\theta}{\theta_o}\right)$ y tiene la misma forma que la densidad espectral de potencia con que trabajamos en la parte 3. Si repetimos la cuentas obtenemos:

$$R_y[n] = f_s\frac{sen\left(\frac{\theta_o}{2}n\right)}{\pi n}$$

Problema 2 [15 pts.]

1. [5 pts.] Enuncie y demuestre una condición necesaria y suficiente para la estabilidad BIBO de **S**istemas **L**ineales e **I**nvariantes en el **T**iempo.

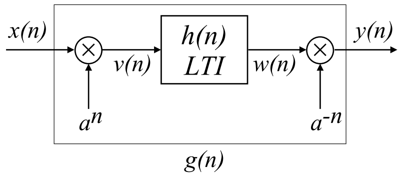
   Solución: Consultar el teórico.

2. [5 pts.] Demuestre la siguiente propiedad: *Un sistema con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ es Lineal e Invariante en el Tiempo* **si y sólo si** *existe $g[n]$ tal que para todo entero n:*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]\ x[n-k]$$

Solución: Consultar el teórico.

3. [5 pts.] En el sistema que se muestra en la figura, $|a| > 1$ y $h[n]$ es la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo, estable y causal. Denotamos como sistema $\mathcal{G}$ al que tiene entrada $x[n]$ y salida $y[n]$.



(a) ¿Es el sistema $\mathcal{G}$ Lineal e Invariante en el Tiempo? Si la respuesta es afirmativa, encuentre su respuesta impulsiva $g[n]$. Si la respuesta es negativa, explique por qué.

Solución: Para hacer esta parte usamos la parte 2. de este mismo problema. De la figura se observa que

$$\begin{aligned} y[n] = a^{-n}\, w[n] = a^{-n} \sum_k h[k] v[n-k] &= a^{-n} \sum_k h[k] a^{(n-k)} x[n-k] \\ &= a^{-n}\, a^n \sum_k h[k] a^{-k}\, x[n-k] \\ &= \sum_k \left(h[k]\, a^{-k}\right) x[n-k] \end{aligned}$$

de modo que encontré una $g[n]$ dada por $g[n] = h[n]\, a^{-n}$ tal que me permite escribir la relación entrada salida en forma de convolución, por lo tanto, en virtud de la parte 2. del ejercicio, el sistema debe ser un SLIT y $g[n]$ su respuesta al impulso.

(b) ¿Es el sistema $\mathcal{G}$ BIBO estable? Debe justificar detalladamente su respuesta.

Solución: Para ver si es estable BIBO puedo usar la parte 1. ya que tengo un SLIT. Entonces debo mirar $\sum_k |g[k]| = \sum_k |a^{-k}\, h[k]|$. Como h es un SLIT causal, solo debo sumar para $k \geq 0$. La suma queda: $\sum_{k=0}^{\infty} |a|^{-k}\, |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty$ ya que por hipótesis $|a| > 1$ y $h[n]$ es estable. Esto demuestra que el sistema es BIBO estable.

Problema 3 [10 pts.]

Se considera el sistema $\mathcal{S}$ definido por la recurrencia ($x[n]$ es la entrada e $y[n]$ es la salida):

$$y[n] = \frac{1}{2}\left\{ y[n-1] + \frac{x[n]}{y[n-1]} \right\} \quad \forall n \in \mathcal{Z}$$

y por la condición inicial $y[-1] = 1$.

1. [4 pts.] Encontrar su respuesta al impulso.

Solución: Se encuentra que $y[0] = 1$ usando la recurrencia y la condición inicial. Si $x[n] = \delta[n]$ entonces $x[n] = 0$ si $|n| \geq 1$. Entonces la recurrencia arroja que $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1]$ con $|n| \geq 1$. Separando para $n > 0$ y $n < 0$, se encuentra que $y[n] = 2^{-n}$ e $y[n] = 2^{-n-1}$ respectivamente. De modo que, en forma compacta, $y[n] = 2^{-n}u[n] + 2^{-n-1}u[-n-1]$.

2. [4 pts.] Para el sistema $\mathcal{S}$:

   (a) estudiar Linealidad.

   Solución: Uso lo siguiente: "sistemas lineales dan respuesta nula a entrada nula". La salida del sistema a la entrada $x[n] = 0$ es $y[n] = 2^{-n}$ para $n \geq 0$, o sea que no es nula, por lo tanto **NO ES LINEAL**.

   (b) estudiar Causalidad.

   Solución: Tomamos dos entradas distintas $x[n] = \delta[n]$ y $\hat{x}[n] = \delta[n+1]$ con salidas $y[n]$ y $\hat{y}[n]$ respectivamente. Como las entradas son iguales para $n \leq -2$, si el sistema fuera causal las salidas deberían ser iguales hasta $n = -2$.

   $y[n]$ fue encontrada en la parte 1. Evaluando en $n = -2$ obtenemos $y[-2] = 2^{-(-2)-1} = 2$. De la definición del sistema

$$\hat{y}[-1] = \frac{1}{2}\left(\hat{y}[-2] + \frac{\hat{x}[-1]}{\hat{y}[-2]}\right)$$

   Como $\hat{y}[-1] = 1$ y $\hat{x}[-1] = 1$, entonces $2 = \hat{y}[-2] + \frac{1}{\hat{y}[-2]}$ y de esto $\hat{y}[-2] = 1$.

   $x[n] = \hat{x}[n]$ si $n \leq -2$, pero $y[-2] \neq \hat{y}[-2]$, entonces el sistema **NO ES CAUSAL**.

   (c) estudiar Invariancia Temporal.

   Solución: Tomemos $x[n] = \delta[n]$ cuya respuesta encontramos en la parte 1. Si el sistema fuera invariante en el tiempo $T\{x[n-K]\}$ sería igual a $h[n-K]$. Pero sabemos que $y[-1] = 1 \neq 2^{-(-1-K)-1} = h[n-K]$ si $K \neq 0$. Entonces el sistema no es invariante en el tiempo.

   (d) mostrar que el sistema NO es BIBO estable y justificar.

   Solución: El que aparezca $y[n-1]$ en el denominador es sospechoso y nos hace preguntar que pasa si $y[n-1] = 0$ para algún n. No hay dudas de que lo que va pasar es que el la respuesta en el siguiente instante va a ser ∞. Así que la clave está en encontrar alguna entrada acotada para la cual la salida sea nula en algún instante n_0, entonces $|y[n_0+1]| = \infty$. Por ejemplo si tomamos $x[n] = -1 \;\; \forall\, n \in \mathcal{Z}$, vemos que $y[0] = \frac{1}{2}\left\{y[-1] + \frac{(-1)}{y[-1]}\right\} = 0$!!. Entonces $y[1]$ es infinita. Por lo tanto el sistema **NO ES BIBO ESTABLE**.

   Otra forma de demostrarlo es notando que la respuesta al impulso calculada en la parte 1 tiende a ∞ cuando $n \to -\infty$, por lo tanto no es acotada. Como $\delta[n]$ es acotada, el sistema no es BIBO estable.

3. [2 pts.] Este sistema recursivo se utiliza en muchas calculadoras para computar la raíz cuadrada de un número positivo A. Para ello se excita al sistema $\mathcal{S}$ con la entrada $x_A[n] = A\,u[n]$ y se estima el valor de $\sqrt{A}$ como el valor de la respuesta del sistema a esta entrada, $y_A[n]$ luego de un número grande de iteraciones.

   Asumiendo que $y_A[n]$ converge, probar que $y_A[n] \to \sqrt{A}$ cuando $n \to +\infty$.

Solución: Asumiendo que hay convergencia, llamándole y al límite, entonces $y[n] \xrightarrow{n\uparrow\infty} y$, entonces también $y[n-1] \xrightarrow{n\uparrow\infty} y$, de modo que mirando la recurrencia, sacamos que $y = \frac{1}{2}(y + \frac{A}{y})$, o sea $y^2 = A \Rightarrow y = \sqrt{A}$. Sobre este último paso, no hay dudas de que si $A > 0$ entonces $y_A[n] > 0$ si $n \geq 0$.