

# Muestreo y Procesamiento Digital

## Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

7 de marzo de 2001

### Indicaciones:

- El parcial tiene una duración total de 4 horas, y un puntaje máximo de 60 puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada ejercicio o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- En la primer hoja de cada ejercicio o pregunta se deberá indicar el número de hojas que corresponden a ese ejercicio o pregunta..
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. A tales efectos, se han reservado 5 de los puntos del parcial. A criterio del tribunal, se podrá calificar con 0 puntos un examen considerado ilegible.

### **Pregunta [10 pts.]**

1. [3 pts.] Enunciar el Teorema que da condiciones necesaria y suficiente para estabilidad **BIBO** de **SLIT**'s.
2. [7 pts.] Demostrar el Teorema.

### **Ejercicio [20 pts.]**

1. [2 pts.] Enunciar y justificar las condiciones que debe cumplir un sistema sin distorsión. Ahora si el sistema es un **SLIT** digital, ¿cómo se expresan esas condiciones en el espectro?
2. [3 pts.] Se considera el filtro digital real de la Figura 1.  
Hallar condiciones en los parámetros del filtro para que este **no** presente distorsión de fase. En este caso, hallar la respuesta en frecuencia del mismo. Observar que el retardo de grupo del filtro es de una muestra.

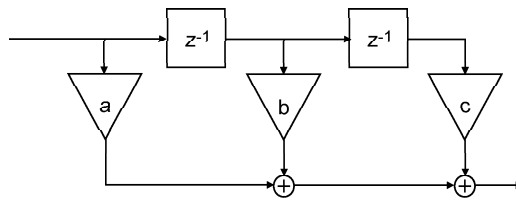


Figura 1: Filtro digital.

3. Al filtro de la Figura 1 se aplicará la señal  $x[n]$ , que llega contaminada con ruido blanco aditivo de potencia  $\sigma_N^2$ , de media nula y no correlacionado con  $x[n]$ . El objetivo del filtro es recuperar la señal.

- (a) [5 pts.] Hallar los coeficientes teniendo en cuenta las dos condiciones siguientes:
- Las condiciones halladas en la parte 2.
  - Que la salida sea lo más similar posible a la señal original  $x[n]$ , tomando como criterio minimizar el error cuadrático medio introducido. Es decir, teniendo en cuenta la observación hecha sobre el retado de grupo, se deberá minimizar:

$$\varepsilon^2 = \mathbf{E}\{(y[n] - x[n - 1])^2\}$$

**Datos:** El proceso  $x[n]$  tiene autocorrelación:

$$R_x[n] = \sigma_x^2 \left( \delta[n] + \frac{\delta[n - 1] + \delta[n + 1]}{2} \right) \quad \sigma_x^2 = \sigma_N^2$$

- (b) [1 pts.] Verificar que el filtro finalmente diseñado no introduce distorsión en fase.
4. [6 pts.] Dar un modelo *completo* para el error introducido en las operaciones cuando la representación numérica es en *punto flotante* y se *redondea*. Justifique.
5. [3 pts.] Calcular la potencia de “ruido de operaciones” a la salida del filtro de la Figura 1, con coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  genéricos para una entrada de media nula y características de ruido blanco. Se debe fundamentar correctamente todos los pasos.

## Problema [25 pts.]

Se desea fabricar un filtro pasa altos para señales de tiempo continuo, utilizando un filtro digital real. El sistema funcionará en tiempo real.

- (a) [2 pts.] Dar un diagrama de bloques completo del sistema
- (b) [3 pts.] ¿Qué condiciones debe cumplir el filtro digital para poder realizar el sistema?

- (c) [1 pts.] Las señales a procesar tienen las componentes de interés por debajo de 200 Hz. Dar la mínima frecuencia de muestreo posible. Esta frecuencia se utilizará en el resto del ejercicio.

2. El sistema debe además cumplir con los siguientes requerimientos:

- Deberá eliminar completamente los componentes en 50 Hz, con el fin de minimizar la interferencia de la red eléctrica.
- Debe tener respuesta unitaria a la frecuencia de trabajo más alta.

En su forma más genérica, el filtro tendrá una transferencia de la forma:

$$H(z) = \alpha \frac{\prod_{i=1}^N (z - c_i)}{\prod_{j=1}^M (z - p_j)}$$

- (a) [3 pts.] ¿Qué imponen los requerimientos de diseño sobre el numerador? Hallar  $N_M$ , la mínima cantidad de ceros que debe tener el sistema.
- (b) [4 pts.] Si el filtro tiene exactamente  $N_M$  ceros, dar la forma genérica del filtro que satisfaga todas las condiciones impuestas: requerimientos de diseño y condiciones de la parte 1.
- (c) [4 pts.] Si ahora además se impone que el filtro sea lo más sencillo posible, es decir, usando la menor cantidad de retardos y multiplicaciones posibles, ¿qué forma debe tener el filtro?  
Bosquejar el módulo de la transferencia de este filtro, y hallar la frecuencia de caída 3 dB ( $1/\sqrt{2}$ ).
3. El filtro queda determinado por los requerimientos anteriores, por lo cual no es posible elegir la frecuencia de corte. Para ello sería necesario introducir al menos un grado de libertad más, mediante el agregado de un polo o cero reales. Es claro que para que el filtro siga siendo lo más sencillo posible (en el sentido de la parte 2.(c)) y para que cumpla con todas las restricciones hasta ahora impuestas, es necesario hacer alguna otra modificación después del agregado de un polo o un cero.
- (a) [3 pts.] Si se quiere que la frecuencia de corte se encuentre a 150 Hz, indicar cuál de las dos variantes es la adecuada. Justifique.
- (b) [1 pts.] Hallar los coeficientes correspondientes a su elección de la parte anterior. Bosquejar la respuesta en módulo del filtro.
- (c) [2 pts.] Dar un diagrama de bloques del filtro anterior, usando sumadores, multiplicadores y la menor cantidad posible de retardos.
- (d) [2 pts.] El filtro se implementa con aritmética de punto fijo con redondeo, usando  $B$  bits para representar la parte fraccionaria. Plantear la potencia de ruido a la salida debido al error de redondeo en función de  $h[n]$ , la respuesta al impulso de filtro, la cual no se pide hallar.