Muestreo y Procesamiento Digital
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

22 de noviembre de 2017

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [14 pts.]

Se debe digitalizar un proceso $x(t)$ cuya densidad espectral de potencia es $G_x(f) = \frac{1}{16000}\Lambda(\frac{f}{8kHz})$, para ser procesado en tiempo discreto.

(a) Calcular la mínima frecuencia de muestreo necesaria para representar correctamente a x en tiempo discreto.

El proceso x es cuantizado luego de ser muestreado a la frecuencia hallada en la parte anterior. Se utiliza un cuantizador de 11 bits más el bit de signo, y representa valores en el rango [-1, 1].

(b) Describir las propiedades del modelo del ruido de cuantización. Indicar las hipótesis que debe cumplirse para que dicho modelo sea válido

(c) Calcular la relación señal a ruido debida al ruido de cuantización.

El proceso $x[n]$ es procesado en tiempo discreto con un filtro FIR con respuesta al impulso:

$$h[n] = 0.5\delta[n] + \delta[n-1] + 0.5\delta[n-2]$$

El filtro h es implementado como un filtro transversal y realiza operaciones en punto fijo de 11 bits de parte fraccionaria.

(d) Calcular la potencia del ruido total (debido a la cuantización y a errores en las operaciones) a la salida del filtro.

Problema 1 [23 pts.]

Se desea eliminar la interferencia presente en un proceso $x_1[n] = x[n] + x_i[n]$, donde $x[n]$ es el proceso limpio y $x_i[n]$ es la interferencia, independiente de $x[n]$. Las densidades espectrales de potencia de dichos procesos son:

$$G_x(e^{j\theta}) = 0.1 + 0.1\cos(\theta) \quad \text{y} \quad G_{x_i}(e^{j\theta}) = 0.1\ \pi(\delta(\theta - 3\pi/4) + \delta(\theta + 3\pi/4)),$$

ambos dentro del intervalo $[-\pi, \pi)$.
Se pide:

(a) Calcular la relación de potencia de la señal respecto a la potencia de la interferencia.

Para eliminar la interferencia se debe construir un filtro de segundo orden, de coeficientes reales, causal y estable cuya ecuación en diferencias es:

$$y[n] = x[n] + cx[n-1] + dx[n-2] - ay[n-1] - by[n-2],$$

y que:

- elimine las componentes de frecuencia en $\theta = \pm 3\pi/4$.
- tenga dos polos complejos conjugados de módulo 0.9 e igual argumento que los ceros del sistema.

(b) Diseñar un filtro H que cumpla con las especificaciones indicadas.

El filtro debe ser impementado utilizando únicamente dos elementos de retardo.

(c) Dar un diagrama de bloques para el filtro H.

En la implementación del filtro las operaciones se realizan en punto fijo con 14 bits de parte fraccionaria en el rango [-1,1].

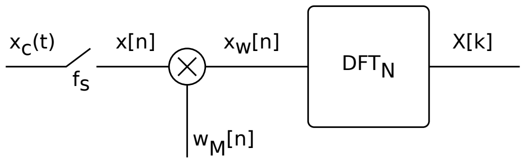
(d) Indicar las fuentes de error debido a los errores en las operaciones en el diagrama de la parte anterior.

(e) Plantear una expresión de la potencia en la salida de la señal y del ruido debido a errores en las operaciones.

(f) Realice una estimación aproximada de la relación señal a ruido en la salida (para realizar las aproximaciones considere cualitativamente el efecto del filtro sobre cada uno de los procesos). Compare con la relación señal a interferencia en la entrada.

Problema 2 [23 pts.]

El siguiente es un diagrama de bloques de un analizador de espectro. La señal de entrada es muestreada, multiplicada por una ventana para limitar la cantidad de muestras, y luego con estas muestras se toma la DFT como estimación del espectro de la señal original.



(a) Dar la expresión general para el espectro de la señal enventanada $X_w(e^{j\theta})$ en función del espectro de la señal muestreada $X(e^{j\theta})$ y de la transformada de la ventana $W_M(e^{j\theta})$.

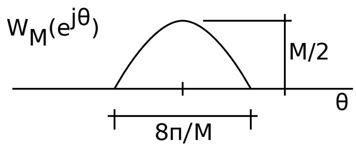
Se utiliza de aquí en adelante frecuencia de muestreo $f_s = 32\text{Hz}$, y la señal de entrada siguiente:

$$x_c(t) = \cos(2\pi \times 12\text{Hz} \times \text{t}) + \frac{1}{2}\text{sinc}(16\text{Hz} \times \text{t})$$

(b) Calcular y graficar el espectro de $x_c(t)$: $X_c(f)$.

(c) Calcular y graficar el espectro de $x[n]$: $X(e^{j\theta})$.

Como ventana, para limitar la cantidad de muestras a procesar, se utiliza una ventana de M muestras en total, con las siguientes características:



La transformada de la ventana tiene amplitud máxima $M/2$, ancho de lóbulo principal $8\pi/M$, área normalizada $\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} W_M(e^{j\theta})d\theta = 1$, y no tiene lóbulos secundarios.

(d) Bosquejar el espectro de la señal enventanada $x_w[n]$: $X_w(e^{j\theta})$. Calcular o deducir las amplitudes o valores de todos los elementos del espectro.

(e) Bosquejar el espectro calculado por el analizador de espectro, $X[k]$, en el caso en que el tamaño de la ventana y el tamaño de la DFT valen $N = M = 32$.

Solución

Pregunta

(a) La mínima frecuencia para cumplir con el teorema de muestreo es $16kHz$.

(b) Ver Teórico.

(c) La potencia del ruido debido al error de cuantización es:

$$\sigma_e^2 = \Delta^2/12$$

donde

$$\Delta = 2^{-B+1}$$

.
Por lo tanto la potencia del ruido será:

$$\sigma_e^2 = 2^{-24}/3$$

Es posible calcular la potencia del proceso $x[n]$ ya que se tiene su densidad espectral de potencia:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2} \times 1 \times 2\pi = \frac{1}{2}$$

Por lo que la relación señal a ruido es :

$$SNR = 3 * 2^{23} = 74dB$$

(d) La potencia del ruido en la salida será:

$$S_r = \sigma_e^2 \sum h_n^2[n] + 2\sigma_\epsilon^2$$

donde $\sigma_e^2 = 2 \times 10^{-8}$ es la potencia calculada en la parte anterior, $\sum h^2[n] = 1/4 + 1 + 1/4 = 3/2$ y $\sigma_\epsilon^2 = 2 \times 10^{-8}$, obteniendo:

$$S_r = 7 \times 10^{-8}$$

Problema 1

(a) La potencia de la señal es

$$S_x = 0.1$$

La potencia de la señal interferente es

$$S_{x_i} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_{x_i}(e^{j\theta})d\theta = 0.1$$

Por lo que la relación señal a interferencia es

$$R = 1 = 0 \text{ dB}$$

(b) El filtro de segundo orden tiene un polo en cero, por lo que toma la forma:

$$H(z) = \frac{z^2 + cz + d}{z^2 + az + b} = \frac{1 + cz^{-1} + dz^{-2}}{1 + az^{-1} + bz^{-2}}$$

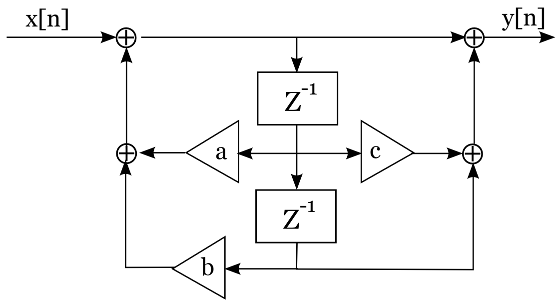
H tiene dos ceros en $e^{3j\pi/4}$ y $e^{-3j\pi/4}$ por lo que el numerador es:

$$z^2 + cz + d = (z - e^{3j\pi/4})(z - e^{3j\pi/4}) = z^2 + \sqrt{2}z + 1$$

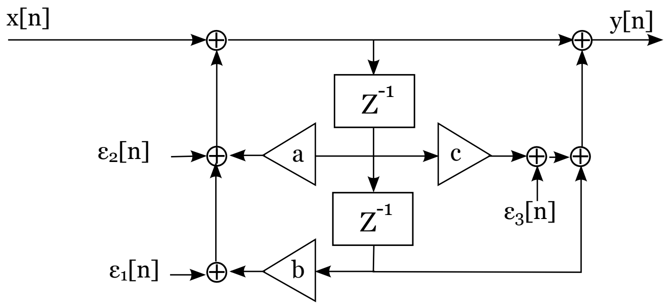
por lo que $c = \sqrt{2}$ y d=1.
El denominador debe ser:

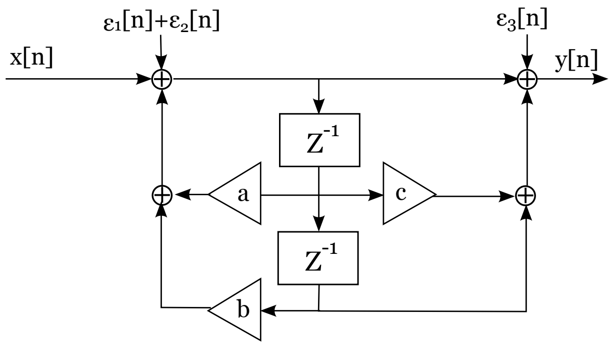
$$z^2 + az + b = (z - 0.9e^{3j\pi/4})(z - 0.9e^{-3j\pi/4}) = z^2 + 0.9\sqrt{2}z + 0.81$$

(c) El diagrama de bloques se muestra en la figura.



(d) Hay tres fuentes de error en las operaciones, una en cada uno de los multiplicadores necesarios para implementar el sistema.





(e)

$$S_e = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2|H(e^{j\theta})|^2\sigma_e^2 + \sigma_e^2 d\theta$$

$$S_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta})|^2(0.1 + 0.1\cos(\theta))d\theta$$

donde $\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ y $\Delta = 2/2^{14+1}$

(f) Dado que el filtro es un filtro notch que anula sólo la frecuencia cercana a $3\pi/4$ y dado que x tiene poca energía en esa banda, se puede decir que la potencia de señal en la salida es aproximadamente igual a la de la entrada.
De manera similar, se puede hacer una aproximación razonable para decir que la potencia de ϵ_1 y ϵ_2 no cambia mucho luego de pasar por el filtro H.
Así, la potencia del ruido debido a errores en la salida se puede aproximar como:

$$S_e = 3\sigma_e^2 = 32^{-26}/3 = 1.5 \times 10^{-8}$$

Por lo que un valor aproximado de la SNR es:

$$SNR \approx 0.1/8.9 \times 1.5 \times 10^{-8} = 68 \text{ dB}$$

Aún cuando esta aproximación sea gruesa, claramente la SNR es sensiblemente más grande que la relación señal a interferencia, por lo que es razonable decir que el sistema efectivamente mejora calidad de la señal.

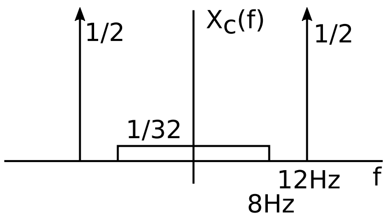
Problema 2

(a) La transformada del producto es la convolución circular de las transformadas, y está en la hoja de fórmulas:

$$X_w(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\phi})W(e^{j(\theta-\phi)})d\phi$$

(b)

$$X_c(f) = \frac{1}{2}(\delta(f+12\mathrm{Hz}) + \delta(\mathrm{f}-12\mathrm{Hz})) + \frac{1}{32\mathrm{Hz}}\Pi(\mathrm{f}/16\mathrm{Hz})$$



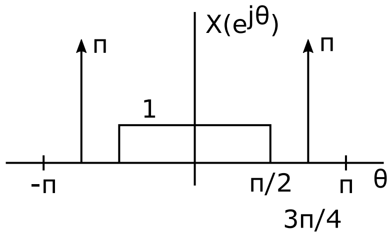
(c) Aplicando los resultados del teorema del muestreo, la señal muestreada tiene el siguiente espectro en el primer período:

$$X(e^{j\theta}) = \pi \times (\delta(\theta+3\pi/4) + \delta(\theta-3\pi/4)) + \Pi(\theta/\pi)$$

Es decir, el espectro completo periodizado es:

$$X(e^{j\theta}) = \sum_k (\pi \times (\delta(\theta-2\pi k+3\pi/4) + \delta(\theta-2\pi k-3\pi/4)) + \Pi((\theta-2\pi k)/\pi))$$

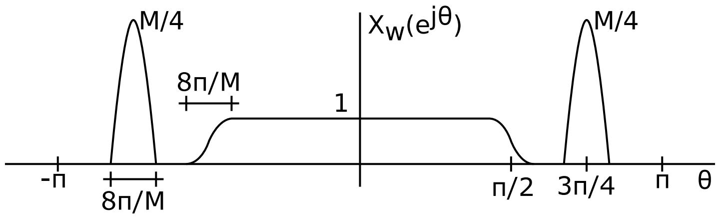
El factor π en las funciones delta vienen de combinar su valor antes del muestreo, el factor de amplitud del teorema de muestreo, y el cambio de variable (que afecta igualmente al área de las deltas): $1/2 \times f_s \times 2\pi/f_s = \pi$.



(d) El espectro de la señal enventanada será la convolución circular del espectro original con el espectro de la ventana.

Para el caso de las deltas, quedarán sustituídas por la ventana y con el factor $1/2\pi$ de la convolución. La nueva amplitud será $\frac{1}{2\pi} \times \pi \times \frac{M}{2} = \frac{M}{4}$.

Para el caso del seno cardinal, la amplitud se verá multiplicada por el área normalizada de la ventana, con lo cual se mantendrá en 1. La transición en la discontinuidad a 8 Hz tendrá el mismo ancho que el lóbulo principal de la ventana.



(e) La DFT nos dará 32 muestras cada 1 Hz del espectro de la señal enventanada.
Con este tamaño de ventana, los componentes de la sinusoidal tendrán amplitud $32/4 = 8$.
El ancho de lóbulo principal de la ventana, que determina ancho de los componentes sinusoidales y banda de transición del seno cardinal, vale ahora $8\pi/32 = \pi/4$, que corresponde a 4 muestras de la DFT (4 Hz).