

Muestreo y Procesamiento Digital

Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

26 de setiembre de 2017

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

- Enunciar el Teorema de Muestreo.
- Demostrar el Teorema de Muestreo.
- Una señal $x(t) = \cos(2\pi 5000 t)$ es muestreada sin utilizar un filtro antialiasing con una frecuencia de muestreo $f_s = 7000$ Hz. Hallar la señal que es reconstruida utilizando la misma f_s .

Problema 1 [15 pts.]

Se desea diseñar un filtro pasabanda, donde interesa amplificar componentes frecuenciales alrededor de $\theta = \pi/2$ y atenuar componentes en frecuencias cercanas a $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

Para el diseño, se consideran varios filtros FIR reales y causales en cascada, cada uno de los cuales atenúa parte del espectro. Como simplificación, considerar que todos los filtros tienen su primer coeficiente $b_0 = 1$.

- Diseñar el filtro $H_1(z)$, FIR causal de orden 1, que elimine componentes en frecuencias $\theta = 0$.
- Diseñar el filtro $H_2(z)$, también de orden 1, que elimine componentes en frecuencia $\theta = \pi$.
- Diseñar el filtro $H_3(z)$, de orden 2, que elimine componentes sinusoidales de frecuencia $\theta = \pi/6$.
- Diseñar el filtro $H_4(z)$, de orden 2, que elimine componentes sinusoidales de frecuencia $\theta = 5\pi/6$.
- Calcular el retardo de grupo de los 4 filtros diseñados. Comentar en cada caso si se trata de un filtro de fase lineal, lineal generalizada, o no lineal.
- Calcular la respuesta al impulso de los 4 filtros en cascada, al que llamaremos $H(z)$. Calcular el retardo de grupo del filtro completo.
- Bosquejar el módulo de la respuesta frecuencial de $H(z)$.

Se quiere atenuar aún más la respuesta en frecuencias mayores a $5\pi/6$ y menores a $\pi/6$. Se propone agregar 2 polos al sistema anterior.

- ¿Dónde deberían ir los polos (aproximadamente) para cumplir con el objetivo planteado, y que el filtro siga siendo real y causal?
- ¿Qué ocurre ahora con la linealidad de fase?
- Para implementar el filtro completo, incluyendo los 2 polos, ¿cuál es el mínimo número de elementos de retardo necesarios? Proponga una implementación (diagrama de bloques) correspondiente.

Problema 2 [15 pts.]

Una forma de monitorear el correcto funcionamiento de algunas máquinas es analizando el sonido que producen. Se decide diseñar un sistema que monitoree una impresora industrial. En su funcionamiento normal, el espectro del sonido que produce es:

$$x(t) = \Lambda \left(\frac{f}{6 \text{ kHz}} \right)$$

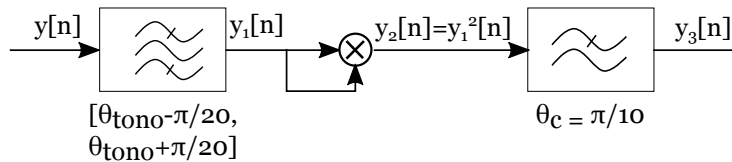
Se detecta que cuando la impresora comienza a fallar, aparece un tono sinusoidal $x_f(t)$ en 7kHz y de amplitud 1. Cuando la falla se produce, la señal de audio obtenida es:

$$y(t) = x(t) + x_f(t)$$

A los efectos de detectar estas fallas, se dispone de un sistema en tiempo discreto que adquiere la señal de audio muestreándola a 15kHz.

- (a) Graficar el módulo del espectro de $y[n]$ correspondiente a la señal $y(t)$ muestreada.

Una manera de detectar la falla es filtrando la señal muestreada con un filtro pasabandas centrado en la frecuencia del tono, y estimando la potencia de la señal resultante según como se muestra en el diagrama de bloques.



- (b) Bosquejar cómo queda el espectro de la señal en cada punto intermedio del sistema propuesto.
 (c) Indicar en qué puntos intermedios no se cumple el teorema de muestreo y cuál debería ser la frecuencia de muestreo para que sí se cumpla.

Se decide cambiar la frecuencia de muestreo a 40kHz previo a la detección para lograr el correcto funcionamiento del sistema.

- (d) Diseñar un sistema en tiempo discreto que realice el cambio de frecuencia de muestreo. Dar su diagrama de bloques indicando todos los parámetros diseñados.
 (e) Graficar el espectro de la señal en todos los puntos intermedios del sistema completo.
 (f) Indicar cómo implementaría la etapa final de detección de la falla.
 (g) Indicar si el sistema cumple su cometido aún si no se realiza el cambio de frecuencia de muestreo propuesto. Justificar.

Solución

Problema 1

(a) Un FIR causal de orden 1 tiene la forma general $H_1(z) = \alpha + \beta z^{-1}$. Para las condiciones pedidas (es decir, $H_1(e^{j0}) = 0$ y $H_1(e^{j\pi}) = 2$, debe ser $H_1(z) = 1 - z^{-1}$.

(b) $H_2(z) = 1 + z^{-1}$

(c) Este filtro debe tener ceros en $e^{\pm j\pi/6}$. Debe ser entonces $H_3(z) = (1 - e^{j\pi/6}z^{-1})(1 - e^{-j\pi/6}z^{-1}) = 1 - 2\cos(\pi/6)z^{-1} + z^{-2} = 1 - \sqrt{3}z^{-1} + z^{-2}$.

(d) Este filtro debe tener ceros en $e^{\pm j5\pi/6}$. Debe ser entonces $H_3(z) = (1 - e^{j5\pi/6}z^{-1})(1 - e^{-j5\pi/6}z^{-1}) = 1 - 2\cos(5\pi/6)z^{-1} + z^{-2} = 1 + \sqrt{3}z^{-1} + z^{-2}$.

(e) H_1 es de tipo IV, de fase lineal generalizada (es de tipo derivador, con fase lineal $+\pi/2$). H_2 es de tipo II, de fase lineal. Ambos tienen retardo de grupo $1/2$.

H_3 y H_4 son de tipo II, y al tener cruce por cero en la respuesta frecuencial, son de fase lineal generalizada. Tienen retardo de grupo 1.

(f) Se puede fácilmente hacer la convolución de los 4 filtros:

$$h_1 * h_2 = [1 \ 0 \ -1]$$

$$(h_1 * h_2) * h_3 = [1 \ -\sqrt{3} \ 0 \ \sqrt{3} \ -1]$$

$$h = ((h_1 * h_2) * h_3) * h_4 = [1 \ 0 \ -2 \ 0 \ 2 \ 0 \ -1]$$

El retardo de grupo es la suma de todos los retardos, y también se ve en la respuesta al impulso final, que vale 3.

(g) El módulo de la respuesta frecuencial vale cero en frecuencias $0, \pm\pi/6, \pm5\pi/6$ y π . El máximo de su respuesta es en $\theta = \pi/2$, donde vale $\sum h[n]j^n = 1 + 2 + 2 + 1 = 6$.

(h) Para que el filtro sea real, los polos deben ser complejos conjugados. Como la frecuencia central del pasabanda es $\theta = \pi/2$, los polos deben ir sobre el eje imaginario, cercanos al círculo unidad. Cuanto más cercanos, mayor la atenuación relativa de las bandas de corte respecto de la banda de paso, aunque esta banda se volvería cada vez más estrecha.

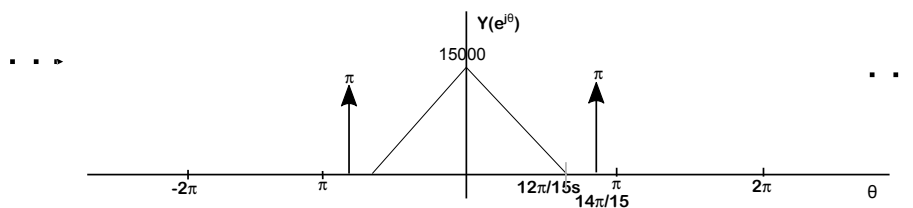
(i) Al introducir coeficientes recursivos (polos), se pierde la linealidad de fase.

(j) Los filtros FIR en cascada usan 6 retardos, que además es el orden de $H(z)$. Este es el mínimo número de retardos. Otra forma con 6 retardos sería la forma canónica.

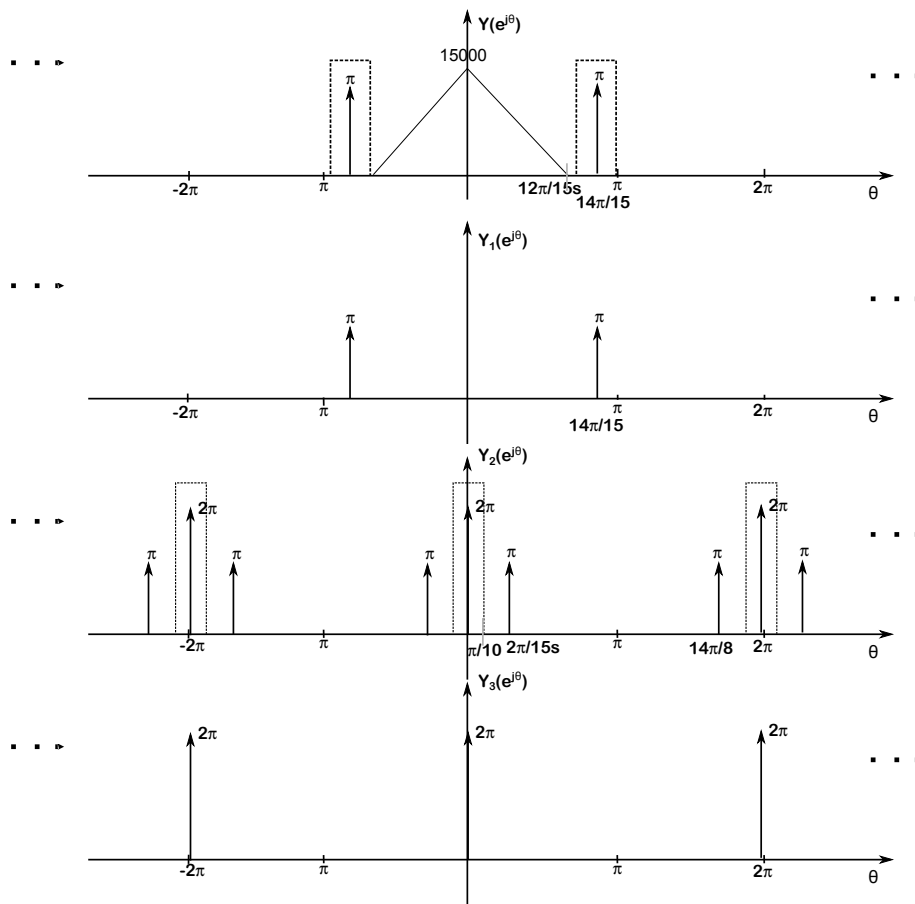
Al introducir 2 polos, se puede aprovechar a agregarlos como coeficientes recursivos en cualquiera de H_3 o H_4 , o en la implementación canónica, sin aumentar la cantidad de retardos necesarios.

Problema 2

(a)

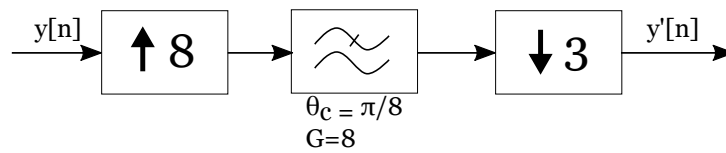


(b)

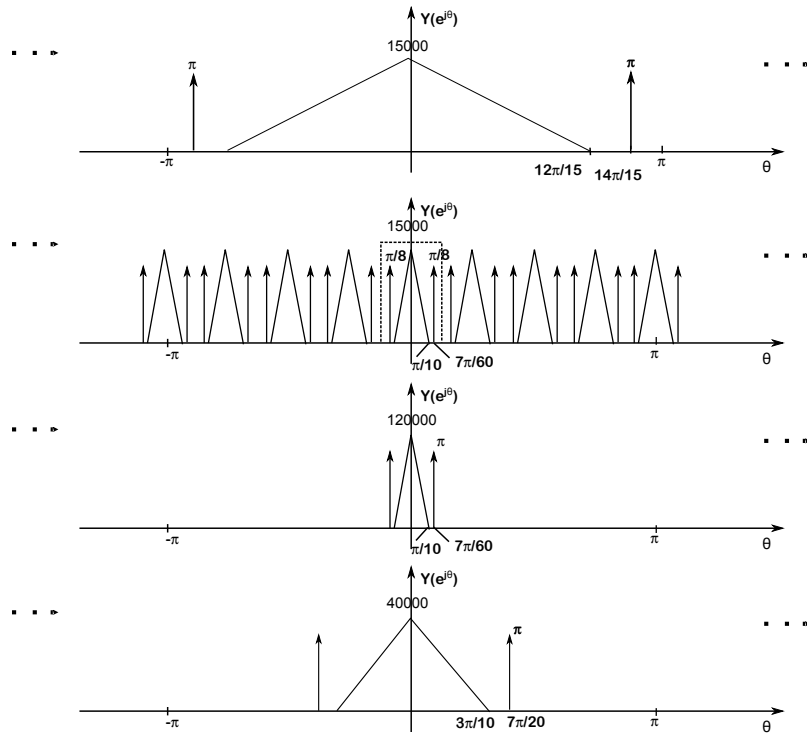


(c) No se cumple el teorema de muestreo para $y_2[n]$, la frecuencia debería ser al menos 28 kHz

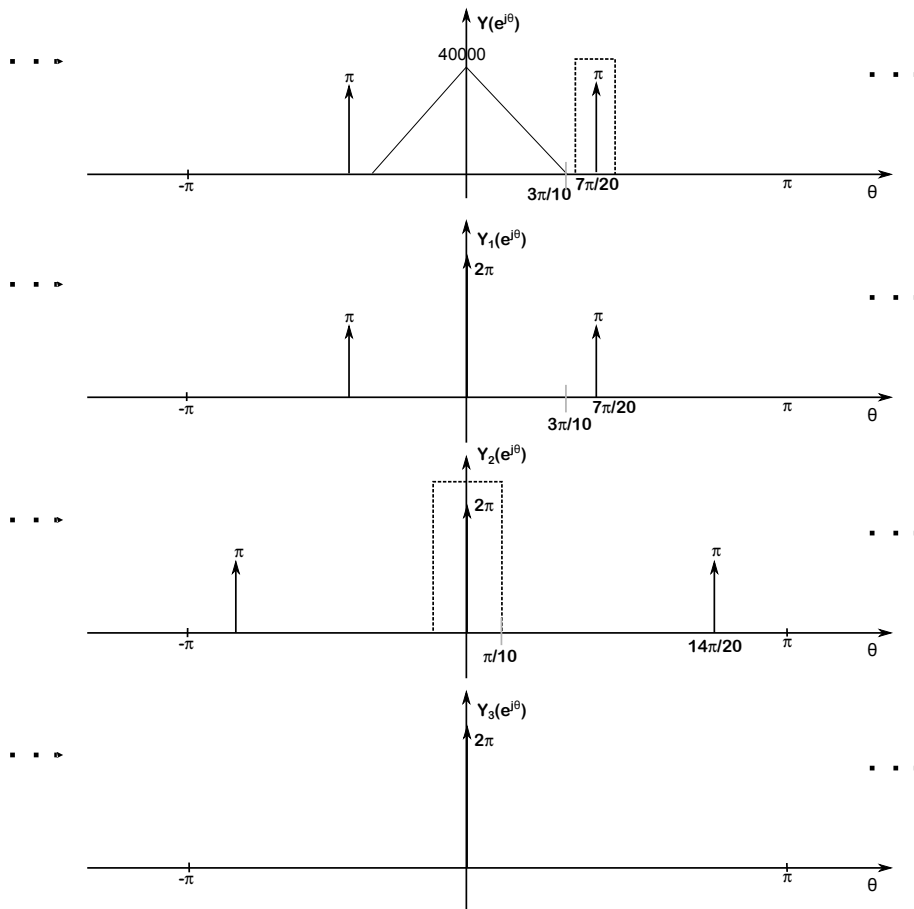
(d)



(e) Los espectros en la etapa de cambio de frecuencia de muestreo son:



Los espectros en la etapa de detección de la falla son:



(f) Se puede detectar la falla comparando $y_3[n]$ con un umbral. Si se supera ese umbral se considera que hay falla.

(g) Sí, el sistema se comporta correctamente aún no haciendo el cambio de frecuencia de muestreo. Esto es debido a que toda la zona del espectro donde se produce solapamiento es eliminada por el filtro pasabajos al final del sistema.