Muestreo y Procesamiento Digital
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

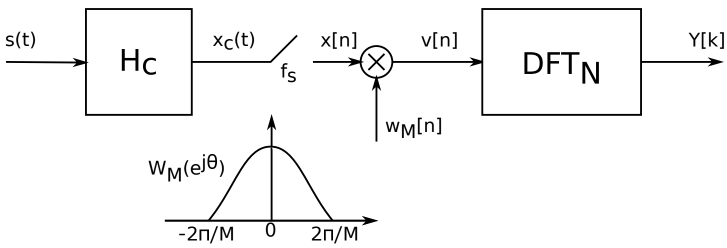
30 de noviembre de 2016

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [12 pts.]

Un analizador de espectro se puede representar por el siguiente esquema:



La frecuencia de muestreo f_s es 48 kHz, el tamaño de ventana es M muestras, y el tamaño de la transformada discreta es de $N \geq M$ muestras.
La señal de entrada es una sinusoidal de frecuencia $f_0 = 8$kHz y amplitud 1, y la transformada de la ventana $W_M(e^{j\theta})$ contiene únicamente un lóbulo principal de ancho $4\pi/M$.

(a) Determinar la frecuencia de corte máxima del pasabajos ideal H_c.

(b) Hallar y graficar el módulo del espectro de cada señal: $s(t)$, $x_c(t)$, $x[n]$, y $v[n]$.

(c) Expresar $Y[k]$ en función del espectro de v.

(d) Graficar detalladamente la salida en módulo $|Y[k]|$ para la señal estudiada anteriormente, cuando $M = N = 10$.

Problema 1 [24 pts.]

Sea un filtro H causal, con un parámetro real α, dado por la siguiente recurrencia, donde la entrada es x[n] y la salida y[n]:

$$y[n] + \alpha^2 y[n-2] = x[n] - 0.9x[n-1]$$

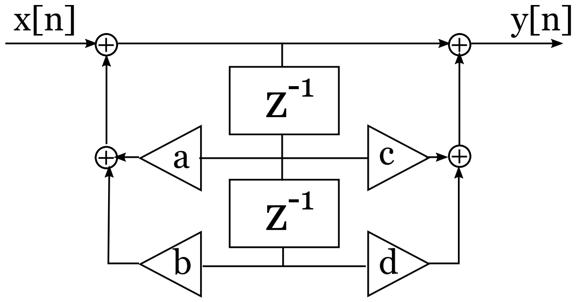
(a) Dar el diagrama de ceros y polos del filtro, indicando la región de convergencia.

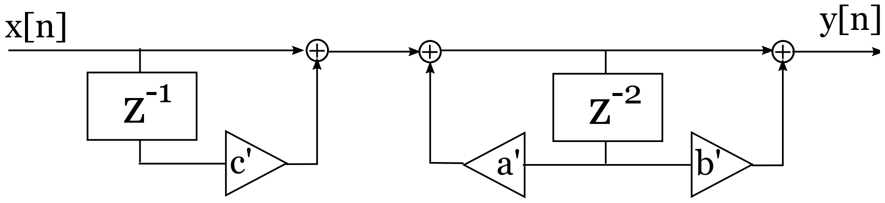
(b) Determinar el rango de α para que el filtro sea estable. Justificar.

(c) Calcular la respuesta al impulso del filtro, $h[n]$.

(d) Bosquejar la respuesta la respuesta en frecuencia del filtro, $H(e^{j\theta})$.

Se desea comparar dos implementaciones del filtro según los siguientes diagramas:





(e) Hallar los coeficientes para que implementen al filtro H.

Las operaciones son realizadas en punto fijo, con B bits de parte fraccionaria.

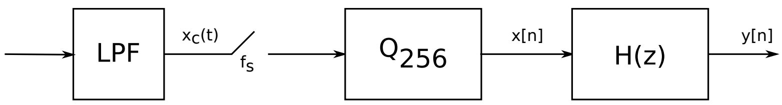
(f) Explicar cómo se introducen errores de redondeo al operar en punto fijo, y proponer un modelo como proceso independiente.

(g) Para cada una de las configuraciones, dar el diagrama de bloques aplicando el modelo de error de operaciones.

(h) Calcular en cada caso la potencia $\sigma_{y_e}^2$ de error a la salida del filtro debido a error de operaciones. Comparar si $\alpha = 0.5$.

Problema 2 [24 pts.]

Un instrumento para analizar el suministro de energía eléctrica toma muestras de la tensión de red para luego procesarlas.
Luego del filtro anti-solapamiento, se encuentra un conversor A/D que trabaja a frecuencia $f_s = 400$Hz. La cuantización es lineal, con 256 pasos, y con un rango de $\pm 400V$. A la salida del conversor A/D se obtiene $x[n]$.
El voltaje a medir se puede modelar como una sinusoidal de fase aleatoria: $x_c(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$, donde la frecuencia nominal es $f_0 = 50$Hz, y la amplitud nominal es $A = 230\sqrt{2}\text{V} = 325\text{Vp}$.



(a) Dar un modelo para el error de cuantización como proceso independiente.

(b) Bosquejar el espectro de señal y de error de cuantización.

(c) Calcular la relación señal a ruido de cuantización de la señal digitalizada en decibeles.

Para mejorar esta SNR, se filtra la señal con el siguiente filtro $H(z)$ causal, donde el parámetro $\alpha = 0.8$.

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{j\theta_0} z^{-1})(1 - \alpha e^{-j\theta_0} z^{-1})}$$

(d) Dar el diagrama de ceros y polos del filtro.

(e) A partir del diagrama de ceros y polos, elegir θ_0 para mejorar la SNR de cuantización.

(f) Calcular la nueva SNR a la salida del filtro.

Solución

Pregunta

(a) Este filtro se encarga de evitar solapamiento al muestrear. Su frecuencia de corte máxima es $f_s/2$ (24 kHz).

(b)

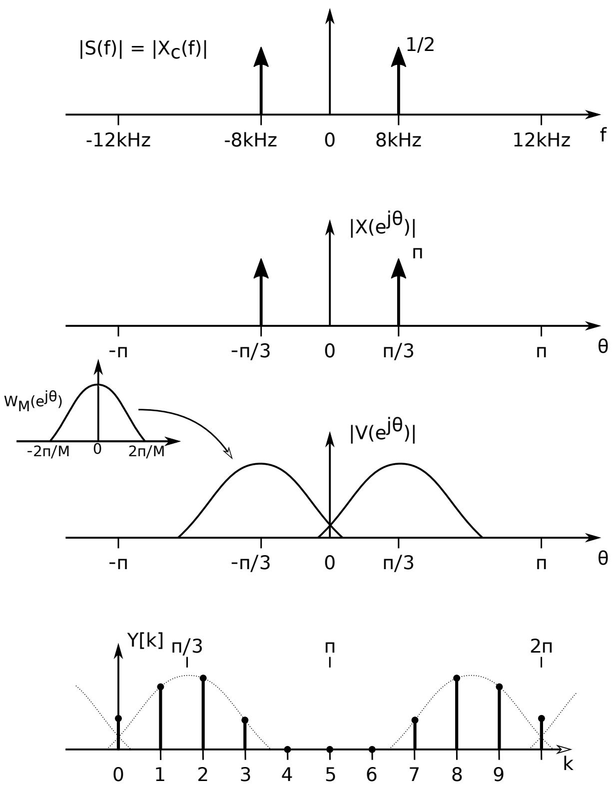
$$S(f) = X_c(f) = (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)/2$$

$$X(e^{j\theta}) = \pi(\delta(\theta + \pi/3) + \delta(\theta - \pi/3)) \text{ periodizada cada } 2\pi$$

$$V(e^{j\theta}) = \pi(W_M(e^{j(\theta+\pi/3)}) + W_M(e^{j(\theta-\pi/3)}))$$

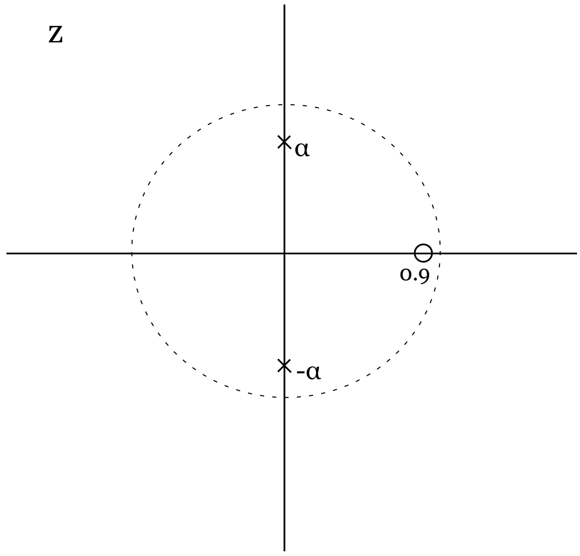
(c) La salida de la DFT son N muestras del espectro de v: $Y[k] = V(e^{j2\pi k/N})$.

(d)



Problema 1

(a) El sistema tiene dos polos en $\pm j\alpha$ y un cero en 0.9.

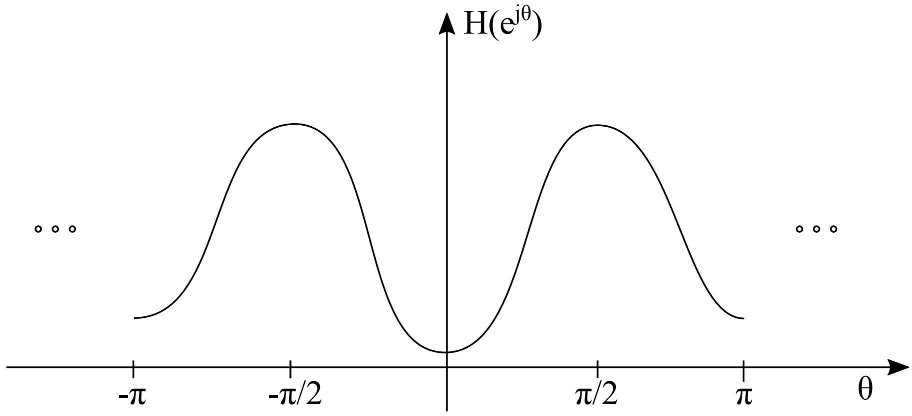


(b) Como el filtro es causal, los polos deben estar dentro de la cfa unidad. Para eso debe ocurrir que $|\alpha| < 1$.

(c) La respuesta al impulso es

$$h[n] = \begin{cases} (-1)^{n/2}\alpha^n u[n] & \text{si } n \text{ es par.} \\ -0.9(-1)^{(n-1)/2}(\alpha)^{n-1}u[n-1] & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

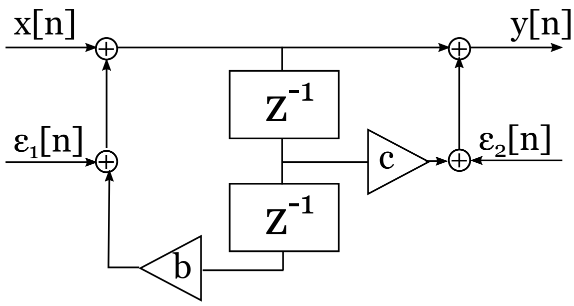
(d)

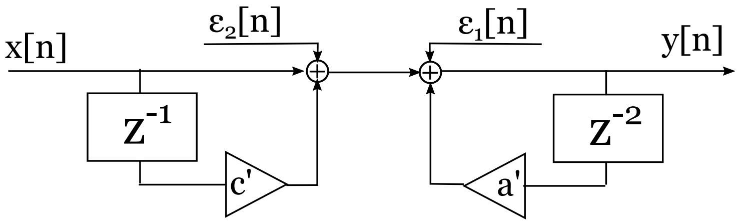


(e) Para la primera implementación; $a = 0$, $b = -\alpha^2$, $c = -0.9$, $d = 0$. Para la segunda implementación; $a' = -\alpha^2$, $b' = 0$, $c' = -0.9$.

(f) Ver teórico

(g)





(h) Siendo

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{H_2(z)}$$

$$\sum h^2[n] = \frac{1}{1-\alpha^4} + 0.81\frac{1}{1-\alpha^4} = \frac{1.81}{1-\alpha^4}$$

$$\sum h_2^2[n] = \frac{1}{1-\alpha^4}$$

En el primer sistema tenemos $N_1 = \sigma_e^2(1 + \frac{1.81}{1-\alpha^4})$. En el segundo sistema $N_2 = \sigma_e^2 \frac{2}{1-\alpha^4})$
Donde $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$ y $\Delta = 2^{-B}$.
Para $\alpha = 0.5$ se tiene $N_1 = 2.92\sigma_e^2$ y $N_2 = 2.13\sigma_e^2$.

Problema 2

(c) El paso de cuantización es $\Delta = 800/256 = 3.125\text{V}$, y su potencia será $\sigma_q^2 = \Delta^2/12 = 0.8138\text{V}^2$.
La potencia de señal será $S_x = 325^2/2 = 52812\text{V}^2$.
Entonces queda $\mathrm{SNR_q} = \mathrm{S_x}/\sigma_z^2 = 64896 = 48\text{dB}$.

(d) El filtro tiene dos ceros en $z = 0$ y dos polos conjugados en $z = e^{\pm j\theta_0}$.

(e) El filtro tendrá una resonancia a frecuencia θ_0. Se quiere que la señal a analizar esté a esta frecuencia para maximizar su ganancia respecto del error de cuantización, que se presenta por igual en todo el espectro.
Debe ser entonces $\theta_0 = 2\pi \times (50/400) = \pi/4$.

(f) La ganancia cuadrática del filtro a la frecuencia de la señal será:

$$|H(e^{j\pi/4})|^2 = \frac{1}{|(1-\alpha e^{j\pi/4}e^{-j\pi/4})(1-\alpha e^{-j\pi/4}e^{-j\pi/4})|^2}$$

$$= \frac{1}{0.2^2}\frac{1}{|1-\alpha e^{-j\pi/2}|^2} = \frac{25}{1+\alpha^2} = 15.2$$

Entonces la potencia de la señal luego del filtro se aumentará en $10\log_{10}(15.2) = 11.8\text{dB}$.
Para calcular la nueva potencia del ruido es necesario saber $\sum |h[n]|^2$.
De la hoja de fórmulas, $h[n] = u[n]\alpha^n \sin(\theta_0(n+1))/(\sin\theta_0)$. Sustituyendo:

$$|h[n]|^2 = 2u[n]\alpha^{2n}\sin^2((n+1)\pi/4)$$

$$= u[n]\alpha^{2n}(1-\cos((n+1)\pi/2)$$

La secuencia $(1-\cos((n+1)\pi/2))$ vale $[1, 2, 1, 0, 1, 2, \ldots]$.
Entonces la suma se separa en términos pares por una parte, y términos $(4k+1)$ por otra parte.

Queda $\sum |h[n]|^2 = \frac{1}{1-\alpha^4} + 2\frac{\alpha^2}{1-\alpha^8} = 3.2318$.
Esta ganancia se aplica a la potencia del error de cuantización, y lo aumenta en $10\log_{10}(3.2318) = 5.1$dB.
Por lo tanto, la nueva SNR será de $48 + 11.8 - 5.1 = 54.7$dB.