Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

26 de setiembre de 2016

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

(a) Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada x y salida y.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

(c) Demostrar.

(d) Estudiar estabilidad para los siguientes sistemas.

1. $h[n] = 1/(n+1)$ si $n \geq 0$, y 0 si $n < 0$.
2. $h[n] = n^{100}(u[n] - u[n-100])$
3. $h[n] = u[-n](1/2)^n$
4. $h[n] = u[n](0.9)^n + u[-n](1.1)^n$

Problema 1 [15 pts.]

Se desea diseñar un filtro pasa–altos $H(z)$ causal.
Para ello se disponen en cascada dos filtros, $H_1(z)$ y $H_2(z)$ que tienen las siguientes transferencias, que dependen de un parámetro α real, con $0 < \alpha < 1$:

$$H_1(z) = (1 - \alpha e^{j\pi/3} z^{-1})(1 - \alpha e^{-j\pi/3} z^{-1})$$

$$H_2(z) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{j2\pi/3} z^{-1})(1 - \alpha e^{-j2\pi/3} z^{-1})}$$

(a) Para el filtro H_1, dar diagrama completo de ceros y polos, calcular ganancia en frecuencias 0 y π. Bosquejar la respuesta frecuencial en módulo (considerar $\alpha = 1/2$ para el bosquejo).

(b) Para el filtro H_2, dar diagrama completo de ceros y polos, calcular ganancia en frecuencias 0 y π. Bosquejar la respuesta frecuencial en módulo (considerar $\alpha = 1/2$ para el bosquejo).

(c) Dar el diagrama de ceros y polos completo de H.

(d) Calcular el parámetro α para que la ganancia en frecuencia $\theta = \pi$ sea 4 veces superior a la ganancia en frecuencia 0.

(e) Bosquejar detalladamente el módulo de la respuesta frecuencial de H con el parámetro calculado en la parte anterior.

(f) Dar un diagrama de bloques para el filtro H, que utilice únicamente 2 elementos de retardo.

Problema 2 [15 pts.]

Se desea digitalizar un disco de pasta con una grabación antigua $x_c(t)$, que debido a la tecnología de la época en que fue grabado, tiene un espectro con un ancho de banda muy limitado $X_c(f) = \Lambda\left(\frac{f}{16\ kHz}\right)$.

(a) Hallar la mínima frecuencia de muestreo que permite representar x_c sin perder información. Escribir la relación entre el espectro en tiempo continuo $X_c(f)$ y en tiempo discreto $X(e^{j\theta})$.

Se desea agregar una voz cantada sobre la grabación digitalizada $x[n]$. Se decide grabar la nueva voz a una tasa de 48 kHz, obteniendo $y[n]$. Para realizar la mezcla es necesario adecuar la frecuencia de muestreo de la señal x, de manera de obtener una nueva señal $x'[n]$ correspondiente a una tasa también de 48 kHz.

(b) Diseñar un sistema que realice el cambio de frecuencia de muestreo.

(c) Bosquejar el espectro de las señales en todos los puntos intermedios del sistema diseñado.

Al reproducir la mezcla $w'[n] = x'[n] + y[n]$ se identifica que suena muy antinatural porque los anchos de banda de la señal x'[n] e y[n] son tan diferentes que no parecen amalgamados. Una forma de resolver esto es atenuando un poco las altas frecuencias de la señal $x'[n]$ mediante un filtro FIR causal con respuesta al impulso:

$$h[n] = 0.25\delta[n] + 0.5\delta[n-1] + 0.25\delta[n-2]$$

(d) Hallar la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$. Verificar que se comporta como un pasabajos.

(e) Indique si el filtro propuesto es de fase lineal y cuál es su retardo de grupo ¿Cómo calcularía la mezcla para que el retardo de grupo existente no implique ningún desfasaje temporal entre las señales a ser mezcladas?

(f) Explicar qué efectos habría tenido desde el punto de vista temporal y frecuencial si se hubiera reconstruído a una tasa de 48 kHz la mezcla sin nigún tipo de adecuación: $w[n] = x[n] + y[n]$.

Solución

Pregunta

(a) Un sistema es estable BIBO si para toda entrada acotada, la salida es acotada.
Una señal x es acotada si existe una cota finita $B_x < \infty$ tal que $|x[n]| \leq B_x \forall n$.
(no alcanza decir $|x[n]| < \infty$: por ejemplo, $x[n] = n$ es siempre menor a infinito, pero no tiene cota finita)

(b) La CNS de estabilidad BIBO para SLIT es que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable: $\sum_k |x[k]| = S < \infty$

(c) Condición necesaria: H estable $\Rightarrow S < \infty$
El sistema es estable por hipótesis, entonces ante una entrada acotada, existe una cota finita para todos los valores de la salida.
En particular, tomamos una entrada que haga aparecer S como salida en algún instante.
Tomando $x[n] = \frac{h[-n]^*}{|h[-n]|}$ o 0 si $h[-n] = 0$. Evaluando la salida en $n = 0$, llegamos a $y[0] = S$.
La entrada está acotada por 1 y el sistema es estable BIBO, por lo tanto $y[n]$ tiene una cota finita. Entonces, S también tiene esa cota.
Condición suficiente: $S < \infty \Rightarrow H$ estable BIBO
Tomando una entrada genérica con cota B_x, buscamos una cota para la salida:

$$|y[n]| = |x * h| \leq \sum_k |h[k]||x[n-k]| \leq B_x.S$$

Entonces la salida está acotada por $B_x S$, que es una cota finita por hipótesis.

(d)

1. En el primer sistema, $|h|_1$ es la serie armónica, que no converge.
2. El segundo sistema es FIR; $|h|_1$ es una sumatoria (no una serie), y por lo tanto es acotada.
3. El tercer sistema es inestable. Haciendo un cambio de variable, $h[-k] = u[k]2^k$, que no es absolutamente sumable.
4. El cuarto sistema es estable. Tanto para n positivos como negativos, se tiene una serie geométrica con factor menor a 1: en un caso 0.9, y en el otro 1/(1.1).

Problema 1

(a) H_1 tiene 2 ceros en $z = \alpha e^{\pm jpi/3}$ y un polo doble en $z = 0$.
$H_1(e^{j0}) = 1 - \alpha + \alpha^2$, y $H_1(e^{j\pi}) = 1 + \alpha + \alpha^2$.

(b) H_2 tiene 2 polos en $z = \alpha e^{\pm j2pi/3}$ y un cero doble en $z = 0$.
$H_2(e^{j0}) = 1/(1 + \alpha + \alpha^2)$, y $H_2(e^{j\pi}) = 1/(1 - \alpha + \alpha^2)$.

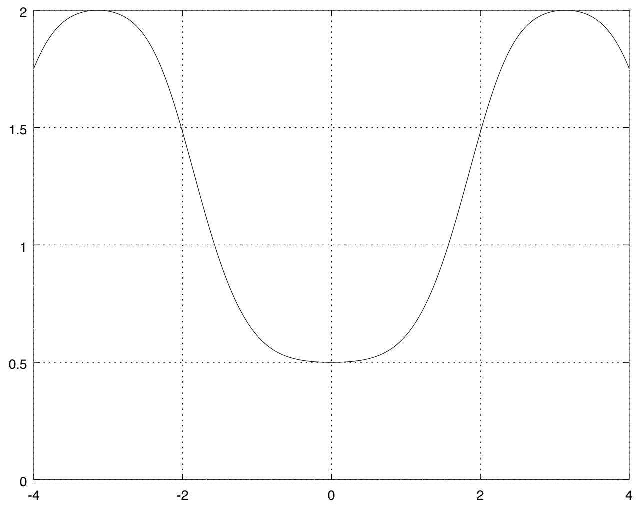
(c) H tiene 2 ceros en $z = \alpha e^{\pm j\pi/3}$ y 2 polos en $z = \alpha e^{\pm j2\pi/3}$.

(d) La relación de ganancias será:

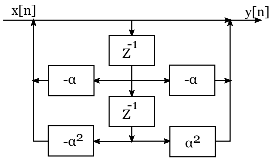
$$\frac{H_\pi}{H_0} = \frac{1+\alpha+\alpha^2}{1-\alpha+\alpha^2} \cdot \frac{1+\alpha+\alpha^2}{1-\alpha+\alpha^2} = \left(\frac{1+\alpha+\alpha^2}{1-\alpha+\alpha^2}\right)^2 = 4$$

Entonces debe ser $1 + \alpha + \alpha^2 = 2(1 - \alpha + \alpha^2)$, que tiene soluciones $\alpha = (3 \pm \sqrt(5))/2$. La solución estable (con $\alpha < 1$) es $\alpha = 0.382$.

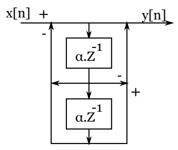
(e) Las ganancias en frecuencias 0 y π son inversas una de otra, y su cociente es 4, por lo tanto $H_0 = 1/2$ y $H_\pi = 2$.



(f) Se pide la forma canónica, donde los coeficientes recursivos son $-a_1 = -\alpha$ y $-a_2 = -\alpha^2$, y los coeficientes no recursivos son $b_0 = 1$, $b_1 = -\alpha$ y $b_2 = \alpha^2$.



Notar que se pueden ahorrar multiplicadores multiplicando por α antes de cada uno de los retardos, o multiplicando por α y α^2 una única vez:

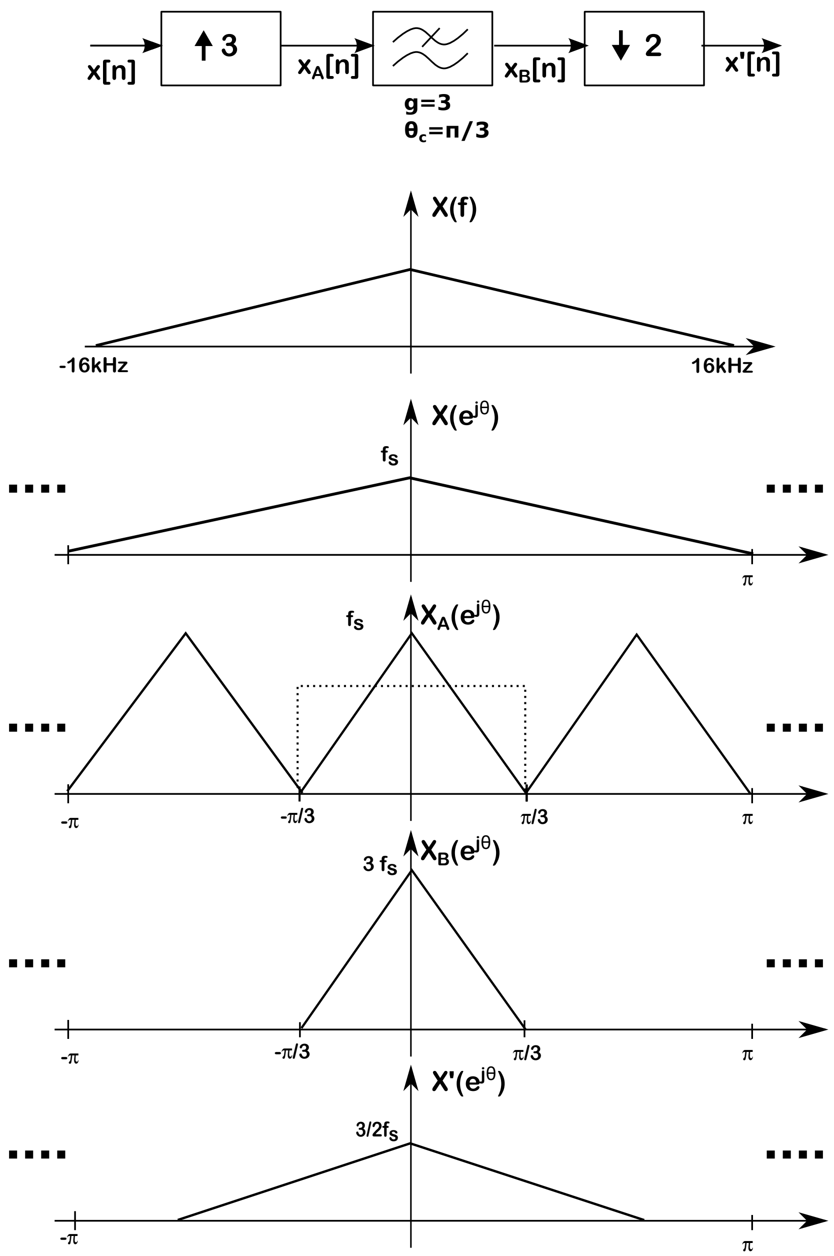


Problema 2

(a) La mínima frecuencia de muestreo es el doble del ancho de banda $f_s = 2 \times 16\ kHz = 32\ kHz$

(b) El cambio de freciuencia de 32 kHz a 48 kHz se logra con un expansor por 3 y un compresor por un factor de 2. Ver siguiente parte, diagrama de bloques y espectros.

(c)



(d) La respuesta en frecuencia es $H(e^{j\theta}) = 0.5 + 0.5cos(\theta)$. Es un coseno elevado, el módulo es 1 en frecuencia 0 y nulo en frecuencia π.

(e) El filtro es de Tipo I, es de fase lineal. El retardo de grupo es de una muestra. La forma de corregirlo es retrasando la señal $y[n]$ una muestra. $w'[n] = x'[n] * h[n] + y[n-1]$

(f) La señal x se reproduciría más rapido, por lo que terminaría en $2/3$ del tiempo total deseado. En cuanto a frecuencias, el espectro de lo reproducido corresponde a una homotecia hacia frecuencias más altas por un factor de $3/2$ por lo que se escucharía más agudo, aproximadamente 7 semitonos $(12\log_2(3/2))$ más arriba.