Muestreo y Procesamiento Digital
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

25 de noviembre de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

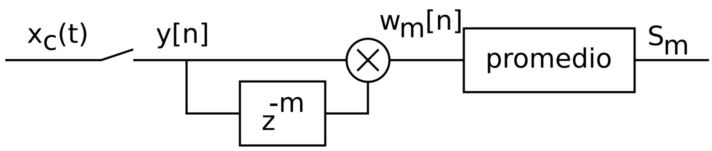
Pregunta [12 pts.]

Sea $x_c(t)$ un proceso real y estacionario con autocorrelación $R_{x_c}(\tau)$ y densidad espectral $G_{x_c}(f)$. Esta señal es muestreada a frecuencia $f_s = 1/T_s$ para obtener $y[n] = x_c(nT_s)$.

(a) Deducir la expresión para $R_y[m]$, autocorrelación de la señal $y[n]$, en función de la autocorrelación de x_c.

(b) Deducir la expresión para $G_y(e^{j\theta})$, densidad espectral de $y[n]$, en función de la densidad espectral de $x_c(t)$.

Para medir $R_x[m]$ se utiliza el siguiente sistema: dado el parámetro $m \geq 0$, se multiplica la señal entrante $y[n]$ por su versión retardada m muestras para obtener $w_m[n] = y[n] \times y[n-m]$. Al producto resultante se le calcula el valor medio: $S_m \approx \langle w_m[n] \rangle$.



(c) Explicar cómo usar este sistema para evaluar $R_y[m]\ \forall m \in \mathbb{Z}$. ¿Qué propiedad debería tener el proceso de entrada para que S_m sea una buena estimación del valor esperado?

Aplicación: La señal $x_c(t)$ tiene banda limitada $f_N = 100\,\text{Hz}$, y se utiliza una frecuencia de muestreo $f_s = 200\,\text{Hz}$. Con el sistema anterior, se mide $S_0 = 3$, $S_1 = 1$, y $S_m = 0$ para $m > 1$.

(d) Hallar $G_{x_c}(f)$.

Problema 1 [15 pts.]

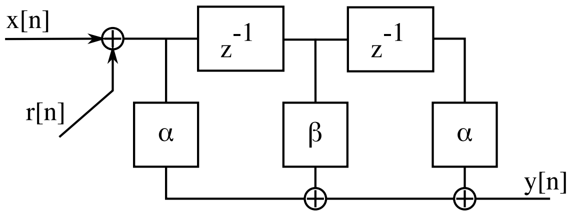
Al filtro digital real de la figura se aplicará la señal $x[n]$ que llega contaminada con $r[n]$, ruido blanco (IID) aditivo de potencia $\sigma_r^2 = 1/2$, de media nula y no correlacionado con $x[n]$. El proceso $x[n]$ tiene autocorrelación:

$$R_x[n] = -\delta[n+1] + 4\delta[n] - \delta[n-1]$$

(a) Calcular y graficar el espectro de x: $G_x(e^{j\theta})$.

(b) Calcular y graficar el espectro de r: $G_r(e^{j\theta})$.

El objetivo del filtro es minimizar el efecto del ruido mediante el siguiente filtro:



(c) Hallar el retardo de grupo del filtro, $\tau(e^{j\theta})$.

(d) Hallar los parámetros del filtro, α y β, de forma de minimizar ϵ^2 que mide la diferencia entre la salida y la señal original:

$$\epsilon^2 = \mathbb{E}\big\{(y[n] - x[n-1])^2\big\}$$

Problema 2 [12 pts.]

Considere la secuencia compleja

$$x[n] = \begin{cases} e^{j\theta_o n}, & 0 \le n \le 2N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Encontrar $X(e^{j\theta})$, la transformada de Fourier de $x[n]$.

(b) Encontrar $X[k]$, la DFT de $x[n]$ como secuencia finita de $2N$ puntos.

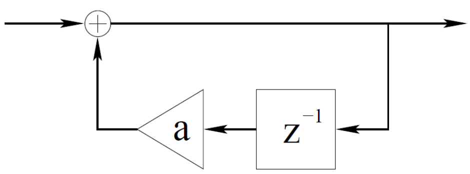
Considere

$$x_1[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n-kN] \quad \text{y} \quad \hat{x}[n] = \begin{cases} x_1[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c) Encontrar $\hat{X}[k]$, la DFT de $\hat{x}[n]$ como secuencia finita de N puntos.

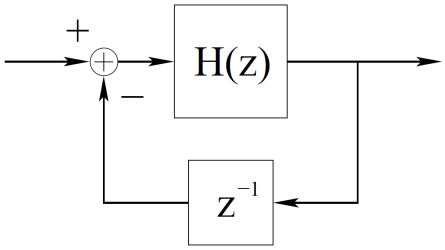
Problema 3 [21 pts.]

Sea el sistema de la figura:



(a) Encontrar la transferencia $H(z)$ y las condiciones para que sea estable.

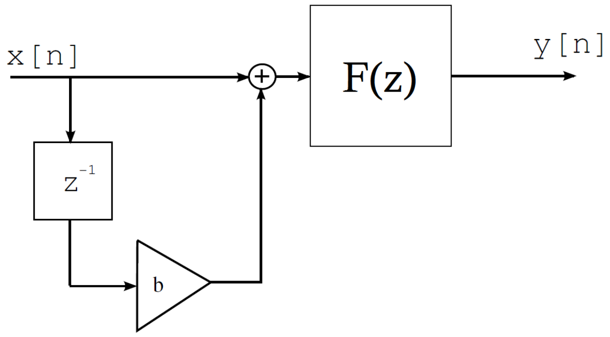
Al sistema anterior se le agrega una realimentación externa negativa, resultando el esquema siguiente que llamaremos $F(z)$:



(b) Encontrar la nueva transferencia F(z).

(c) Encontrar condiciones para que el nuevo sistema sea estable. ¿Hay valores de a para los que el primer sistema es inestable y el segundo no?

Las operaciones se hacen con una representación en punto fijo con redondeo y b bits de parte fraccionaria. Se trabaja con a en el rango de estabilidad determinado en (c).
Se considera el filtro $C(z)$ de la siguiente figura donde $F(z)$ corresponde a la transferencia del filtro de la parte (b).



(d) Calcular la potencia de la señal debida al error en las operaciones, a la salida del filtro $C(z)$ cuando éste se implementa de la forma mostrada en la figura. Justificar claramente.

(e) Proponer otra implementación (diagrama de bloques) de $C(z)$, utilizando únicamente un retardo. Explicar.

(f) Comparar el desempeño frente al error en las operaciones de ambas implementaciones, cuando $a = 1.5$ y $b = 2$. Asumir que, a pesar de los valores particulares escogidos, se tienen errores en las operaciones en todos los multiplicadores.)

Solución

Pregunta

(a) Visto en teórico: la autocorrelación de las muestras son las muestras de la autocorrelación, $R_y[m] = R_{x_c}(mT_s)$. Este resultado se obtiene directamente planteando la definición de autocorrelación.

(b) Al ser R_y muestras de R_{x_c}, vale el teorema de muestreo para relacionar sus transformadas de Fourier, que son justamente sus densidades espectrales.
Vale entonces: $G_y(e^{j\theta}) = \frac{1}{T_s}\sum_k G_{x_c}(\frac{\theta}{2\pi T_s} - \frac{k}{T_s})$.

(c) Para $m \geq 0$, el sistema devuelve directamente la autocorrelación: $S_m = R_y[m]$.
Para $m < 0$, como la señal es real, se usa el hecho de que la autocorrelación es simétrica: $R_y[m] = R_y[-m] = S_{-m}$.
El promedio de una señal converge a su valor esperado siempre que la señal sea ergódica.

(d) Por la parte anterior, se sabe que R_y tiene 3 términos no nulos: $R_y[m] = \delta[m+1] + 3\delta[m] + \delta[m-1]$.
De aquí se puede calcular $G_y(e^{j\theta}) = 3 + 2\cos(\theta)$.
Como la señal original es de banda limitada, entonces R_{x_c} se puede reconstruir completamente. Se obtiene $G_{x_c}(f)$ como el primer período de G_y con el cambio de variable correspondiente:
$G_{x_c}(f) = T_s(3 + 2\cos(2\pi f T_s))$ para $|f| < f_s/2$ y 0 afuera de ese rango de frecuencias.

Problema 1

(a) El espectro es la transformada de Fourier de la autocorrelación: $G_x(e^{j\theta}) = 4 - 2\cos(\theta)$.

(b) $G_r(e^{j\theta}) = \sigma_r^2$.

(c) El filtro tiene respuesta al impulso simétrica, por lo tanto es un filtro de fase lineal generalizada de tipo I. El retardo de grupo es el punto medio de la respuesta al impulso: $\tau(e^{j\theta}) = 1$.

(d) Se debe minimizar

$$\epsilon^2 = \mathbb{E}\big\{(\alpha x[n] + \beta x[n-1] + \alpha x[n-2] + \alpha r[n] + \beta r[n-1] + \alpha r[n-2] - x[n-1])^2\big\}$$

Operando, aparecen términos que se descartan por ser producto de términos no correlacionados y con media nula. Queda entonces:

$$\epsilon^2 = (2\alpha^2 + (\beta-1)^2)R_x[0] + 2\alpha(\beta-1)R_x[1] + (2\alpha^2 + \beta^2)R_r[0]$$

Sustituyendo R_x y R_r, y anulando las primeras derivadas parciales, se llega a:

$$\alpha = \frac{-\sigma_r^2}{2(r+\sigma_r^2)^2 - 1} = -0.013$$

$$\beta = \frac{\alpha + 4}{4 + \sigma_r^2} = 0.886$$

Con α negativo, el filtro atenúa las bajas frecuencias, que es justamente donde hay peor relación señal a ruido.

Problema 2

(a) La señal $x[n]$ es una exponencial compleja multiplicada por la señal $p[n]$ que vale 1 entre 0 y $2N-1$. $P(z) = (1 - z^{2N})/(1 - z)$, por lo tanto:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1 - e^{j(\theta_0 - \theta)2N}}{1 - e^{j(\theta_0 - \theta)}}$$

(b) La DFT de x[n] son 2N muestras equiespaciadas de su respuesta frecuencial:

$$X[k] = X(e^{j\frac{2\pi}{2N}k}) = \frac{1 - e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi}{2N}k)2N}}{1 - e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi}{2N}k)}}$$

Hay un factor $2\pi k$ en una exponencial que se puede eliminar:

$$X[k] = \frac{1 - e^{j\theta_0 2N}}{1 - e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi}{2N}k)}}$$

(c) Planteando explícitemente la transformada de $\hat{X}[k]$ tenemos:

$$\hat{X}[k] = \sum_{0}^{N-1}(\hat{x}[n])W_N^{kn} = \sum_{0}^{N-1}(x[n] + x[n+N])W_N^{kn} = \sum_{0}^{N-1}(e^{j\theta_o n} + e^{j\theta_o(n+N)})W_N^{kn}$$

$$\hat{X}[k] = (1 + e^{j\theta_o N})\sum_{0}^{N-1} e^{j\theta_o n}W_N^{kn} = \frac{1 - e^{j\theta_0 2N}}{1 - e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi}{N}k)}}$$

Problema 3

(a) Llamemos v y w a la entrada y salida del sistema, respectivamente. Entonces,

$$w[n] = v[n] + awn - 1$$

$$W(z) = V(z) + az^{-1}W(z)$$

$$H(z) = \frac{W(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Como el sistema es causal, el sistema es estabe si todos los polos están adentro del círculo unidad. En este caso el sistema es estable si

$$|a| < 1$$

(b) Llamemos x y y a la entrada y salida, respectivamente, del nuevo sistema. Entonces,

$$y[n] = h[n] * (x[n] - y[n-1])$$

$$Y(z) = H(z)\Big(X(z) - z^{-1}Y(z)\Big)$$

$$F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + z^{-1}H(z)}$$

Sustituyendo $H(z)$,

$$F(z) = \frac{1}{1 - (a-1)z^{-1}}$$

(c) Como antes, el polo debe estar adentro de del círculo unidad,

$$|a - 1| < 1$$

Sí. Por ejemplo cuando $a = 1.5$, que el primer sistema es inestable y el segundo es estable, ya que $a - 1 = 0.5$.

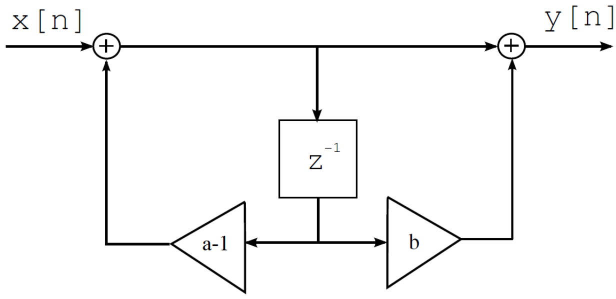
(d) Como se trabaja con aritmética de punto fijo, únicamente se tiene error en los multiplicadores. Se tendrá entonces un ruido ingresando al sistema a la salida de cada multiplicador. Los denotaremos $e_i[n]$ con $i = 1 \ldots 2$ (estos son blancos de potencia $\sigma^2 = \Delta^2/12$ e independientes entre si y de la señal).
Dada la configuración del sistema, todos los ruidos pueden pensarse aplicados a la entrada del bloque $F(z)$. A la salida se tienen dos ruidos independientes $e_{s,i}$ debidas a los ruidos e_i respectivamente. La potencia del ruido de operaciones será entonces:

$$P_r = 2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{j\theta})|^2 G_e(e^{j\theta})d\theta = 2\frac{\sigma_e^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{j\theta})|^2 d\theta = 2\sigma_e^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f[n]|^2$$

donde este último paso se justifica en la formula de Parseval. Antitransformando $F(z)$ obtenemos:

$$P_r = 2\sigma_e^2\sum_{n=0}^{\infty}|(a-1)^n|^2 = 2\sigma_e^2\frac{1}{1-(a-1)^2} = \sigma_e^2\frac{8}{3}$$

(e)



(f) Para la segunda configuración se tiene que el ruido debido al multiplicador b se suma directamente en la salida, mientras que el ruido debido al multiplicador $a-1$ se aplica a la entrada del sistema completo $C(z)$.
Por lo tanto la potencia del ruido está dada por,

$$P_{r_T} = P_{r_a} + \sigma_e^2$$

Donde $P_r a$ es el término correspondiente al multiplicador $a-1$:

$$P_{r_a} = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c[n]|^2$$

$$= \sigma_e^2(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a-1+b)^2((a-1)^2)^{(}n-1))$$

$$= \sigma_e^2(1 + (a-1+b)^2)\sum_{k=0}^{\infty}((a-1)^2)^k$$

$$= \sigma_e^2(1 + (a-1+b)^2\frac{1}{1-(a-1)^2})$$

Sustituyendo los parámetros $a = 1.5$ y $b = 2$ se obtiene la potencia debida al multiplicador $a-1$:

$$P_{r_a} = (1 + \frac{25}{3})\sigma_e^2 = \frac{28}{3}\sigma_e^2$$

La potencia de ruido total queda entonces:

$$P_{r_T} = (1 + \frac{28}{3})\sigma_e^2 = \frac{31}{3}\sigma_e^2$$

Se observa que en la segunda implementación se obtiene una potencia de ruido mayor a la inicial.