Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

30 de setiembre de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [12 pts.]

(a) Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada x y salida y.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

(c) Demostrar.

Problema 1 [14 pts.]

Una señal de tiempo continuo, con espectro $X(f) = \Lambda(\frac{f-3\,\mathrm{kHz}}{3\,\mathrm{kHz}}) + \Lambda(\frac{f+3\,\mathrm{kHz}}{3\,\mathrm{kHz}}) + \delta(f)$ fue muestreada con una frecuencia de muestreo de 20kHz, obteniendo la señal en tiempo discreto $x[n]$.

(a) Hallar la mínima frecuencia de muestreo f_s' que permite representar X sin pérdida de información.

Se desea cambiar de frecuencia de muestreo al mínimo valor posible hallado en la parte anterior.

(b) Diseñar un sistema en tiempo discreto que permita cambiar la frecuencia de muestreo de $x[n]$ a f_s'. Indicar los valores de los parámetros obtenidos en el diseño.

(c) Bosquejar los espectros de las señales en todos los puntos intermedios del sistema.

Se descubre que por la naturaleza de la señal $X(f)$, la componente de continua debería ser nula y por lo tanto es una interferencia que se desea quitar. Para eliminarla se propone el filtro causal H definido por la siguiente ecuación de recurrencia:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + 0.99\; y[n-1]$$

(d) Hallar la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

(e) Estudiar la estabilidad del filtro.

(f) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro H.

(g) Bosquejar el espectro de la salida del filtro aplicado luego del cambio de frecuencia de muestreo f_s'.

Problema 2 [14 pts.]

Considere el filtro causal con la siguiente transferencia, donde α es un parámetro real positivo.

$$H_1(z) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{j\pi/3} z^{-1})(1 - \alpha e^{-j\pi/3} z^{-1})}$$

(a) Dar el diagrama de ceros y polos de H_1.

(b) Estudiar rango de α para que H_1 sea estable.

Se toma $\alpha = 0.8$ de aquí en más.

(c) Calcular la ganancia en módulo de H_1 en frecuencias $\theta = 0$, $\theta = \pi/3$ y $\theta = \pi$.

(d) Bosquejar la respuesta frecuencial de H_1 en módulo.

Este filtro se utiliza para acondicionar una señal $x_c(t)$ muestreada a frecuencia f_s y filtrada previamente para evitar solapamiento. Esta señal x_c tiene información de interés alrededor de 1 kHz, y en el resto del espectro hay otras señales interferentes.

(e) Calcular la frecuencia de muestreo f_s adecuada.

(f) Dar un diagrama de bloques que implemente el filtro H_1, utilizando coeficientes reales.

Se agrega ahora, en cascada con H_1, un filtro $H_2(z)$ no recursivo (FIR), causal, de 3 coeficientes, que tenga respuesta frecuencial nula en frecuencias $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

(g) Obtener $H_2(z)$ y su respuesta al impulso $h_2[n]$.

(h) Bosquejar la respuesta frecuencial de H_2.

El filtro completo a utilizar, $H(z)$, es la cascada de los 2 filtros anteriores: $H(z) = H_1(z)H_2(z)$.

(i) Dar un diagrama de bloques que implemente $H(z)$ con coeficientes reales y sólo 2 elementos de retardo.

(j) Calcular la respuesta al impulso del filtro H.

Solución

Pregunta

(a) Un sistema es estable BIBO si para toda entrada acotada, la salida es acotada.
Una señal x es acotada si existe una cota finita $B_x < \infty$ tal que $|x[n]| \leq B_x \forall n$.
(no alcanza decir $|x[n]| < \infty$: por ejemplo, $x[n] = n$ es siempre menor a infinito, pero no tiene cota finita)

(b) La CNS de estabilidad BIBO para SLIT es que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable: $\sum_k |x[k]| = S < \infty$

(c) Condición necesaria: H estable $\Rightarrow S < \infty$
El sistema es estable por hipótesis, entonces ante una entrada acotada, existe una cota finita para todos los valores de la salida.
En particular, tomamos una entrada que haga aparecer S como salida en algún instante.
Tomando $x[n] = \frac{h[-n]^*}{|h[-n]|}$ o 0 si $h[-n] = 0$. Evaluando la salida en $n = 0$, llegamos a $y[0] = S$.
La entrada está acotada por 1 y el sistema es estable BIBO, por lo tanto $y[n]$ tiene una cota finita. Entonces, S también tiene esa cota.
Condición suficiente: $S < \infty \Rightarrow H$ estable BIBO
Tomando una entrada genérica con cota B_x, buscamos una cota para la salida:

$$|y[n]| = |x * h| \leq \sum_k |h[k]||x[n-k]| \leq B_x.S$$

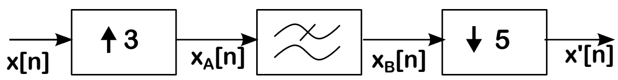
Entonces la salida está acotada por $B_x S$, que es una cota finita por hipótesis.

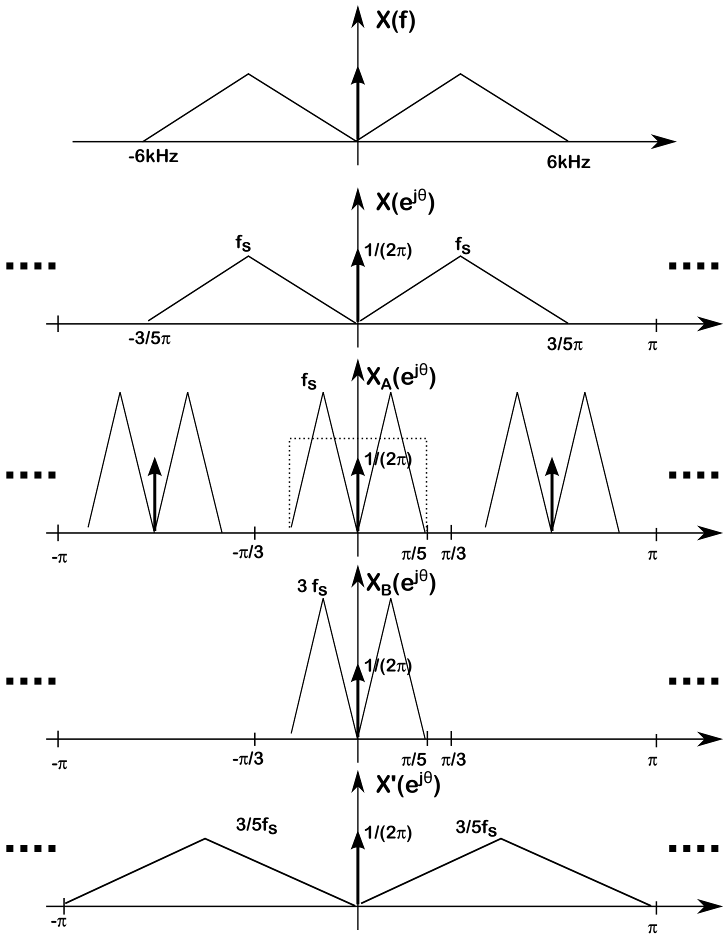
Problema 1

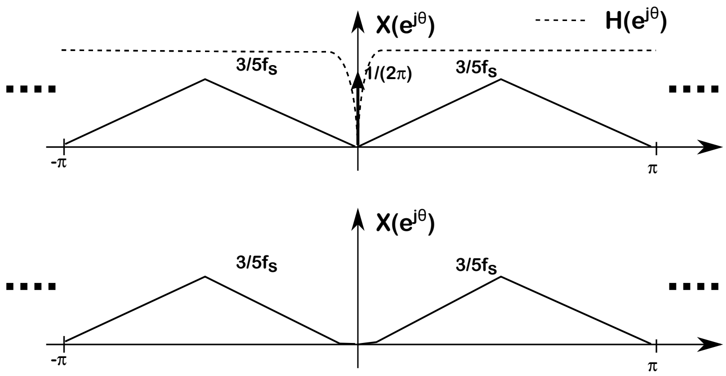
(a) El ancho de banda de la señal es 6 kHz, por lo tanto la mínima frecuencia de muestreo es 12 kHz.

(b) El cambio es de $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ Primero se debe subir la frecuencia por un factor $L = 3$ y luego bajarla con un factor $M = 5$. El filtro intermedio tiene frecuencia de corte $\theta_c = \pi/5$ y ganancia $g = 5$.

(c)





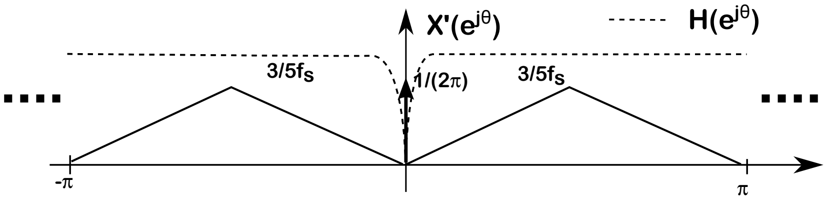


(d)

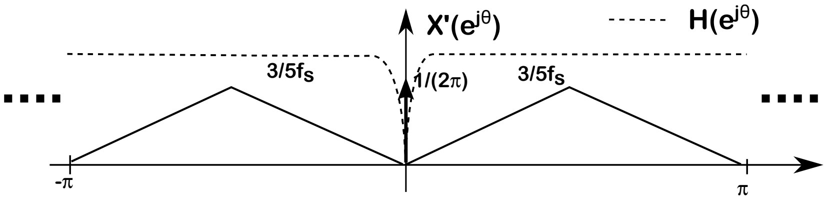
$$h[n] = u[n]\ 0.99^n - u[n-1]\ 0.99^{n-1}$$

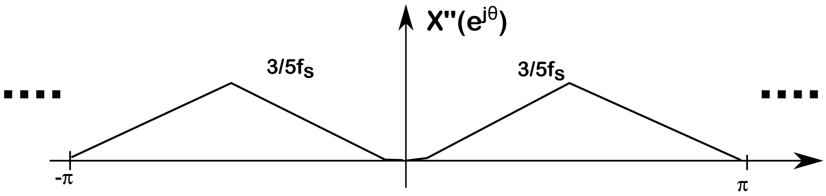
(e) El filtro es causal y tiene un polo dentro del círculo. unidad, por lo tanto es estable.

(f) El filtro tiene un cero en $\theta = 0$ y un polo cercano que hace que tenga una ganancia cercana a 1 para frecuencias lejanas a 0.



(g) Se elimina la componente de continua (la delta en frecuencia 0 presente en la señal).





Problema 2

(a) $H_1(z)$ tiene 2 polos complejos conjugados, con módulo α y fase $\pm\pi/3$. Tiene además 2 ceros en $z = 0$.

(b) Como el filtro es causal, los polos deben estar dentro del círculo unidad. Por lo tanto $\alpha < 1$.

(c)

$$H_1(e^{j0}) = 1/(1 - \alpha + \alpha^2) = 1/0.84 = 1.19$$

$$H_1(e^{j\pi}) = 1/(1 + \alpha + \alpha^2) = 1/2.44 = 0.41$$

$$H_1(e^{j\pi/3}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{j\pi/3} e^{-j\pi/3})(1 - \alpha e^{-j\pi/3} e^{-j\pi/3})} = \frac{1}{(1 - \alpha)(1 - \alpha e^{-j2\pi/3})}$$

$$|H_1(e^{-j\pi/3})| = \frac{5}{|1 - 0.8e^{-j2\pi/3}|} \approx 3.2009$$

(d) La respuesta en módulo tiene resonancia en $\theta = \pm\pi/3$ y mínimos locales en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

(e) La frecuencia de resonancia del filtro se debe corresponder a 1 kHz. Entonces debe ser $1000/f_s = (\pi/3)/(2\pi)$, lo que da $f_s = 6000$Hz.

(f) Agrupando pares de ceros y polos complejos conjugados se obtienen coeficientes reales. En este caso sólo hay 2 polos. Queda entonces una forma directa con 2 retardos.
$H_1(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}$, por lo que los coeficientes recursivos son α y $-\alpha^2$.

(g) Este filtro debe tener 2 ceros en frecuencias 0 y π:
$H_2(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) = 1 - z^{-2}$
Por inspección, resulta $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n - 2]$.

(h) $H_2(e^{j\theta}) = e^{-j\theta} 2j \sin(theta)$

(i) Debe usarse la forma canónica. Los coeficientes recursivos son los mismos de $H_1(z)$, y los coeficientes no recursivos son 1, 0 y -1.

(j) $h[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_1[n] - h_1[n-2]$

$$H_1(z) = \frac{1}{(1-\alpha e^{j\pi/3}z^{-1})(1-\alpha e^{-j\pi/3}z^{-1})}$$

$$= \frac{1/(1+e^{-j2\pi/3})}{1-\alpha e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{1/(1+e^{j2\pi/3})}{1-\alpha e^{-j\pi/3}z^{-1}}$$

Queda entonces:

$$h_1[n] = u[n]\alpha^n\left(\frac{e^{jn\pi/3}}{1-e^{-j2\pi/3}} + \frac{e^{-jn\pi/3}}{1-e^{j2\pi/3}}\right)$$

Simplificando, se verifica que el resultado es real:

$$h_1[n] = u[n]\alpha^n\frac{\sin(\pi(n+1)/3)}{\sin(\pi/3)}$$

Ahora, haciendo la convolución anterior, queda:

$$h[n] = u[n]\alpha^n\frac{\sin(\pi(n+1)/3)}{\sin(\pi/3)} - u[n-2]\alpha^{n-2}\frac{\sin(\pi(n-1)/3)}{\sin(\pi/3)}$$