Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

1 de octubre de 2014

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

(a) Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada x y salida y.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

(c) Demostrar.

(d) Estudiar estabilidad para los siguientes sistemas. En condiciones de estabilidad, calcular una cota B_y para la salida dada la cota B_x para la entrada.

1. $y[n] = x[n] + \alpha y[n-1]$
2. $y[n] = x^2[n]$
3. $y[n] = (\sum_{k=0}^{5} |x[n-k]|)^2$

Problema 1 [15 pts.]

Se considera la señal de tiempo continuo $x(t)$:

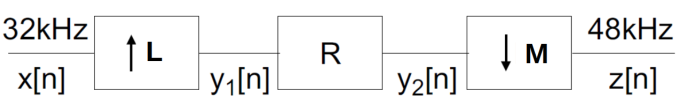
$$x(t) = 8000 \ \mathrm{sinc}^2(8000\mathrm{t}) \cos(2\pi 8000\mathrm{t}).$$

(a) Hallar el espectro de $x(t)$.

(b) Hallar la mínima frecuencia de muestreo necesaria para representar correctamente a $x(t)$.

(c) Hallar el espectro de la señal en tiempo discreto $x[n] = x(nT_s)$ para la frecuencia de muestreo hallada en la parte anterior.

La señal se va a procesar con otro sistema que funciona a frecuencia $f_s' = 48$kHz. Para ello se propone el siguiente sistema para modificar la frecuencia de muestreo:



El bloque $\boxed{\uparrow L}$ es un expansor (entre dos muestras consecutivas de la entrada, agrega $L-1$ muestras nulas), R es un filtro digital, y $\boxed{\downarrow M}$ es un compresor (devuelve una de cada M muestras).

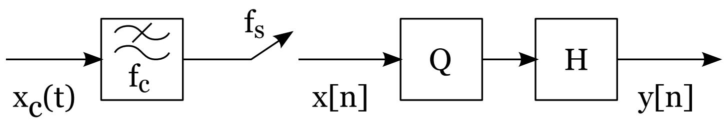
(d) Evaluar los parámetros L y M e indicar las características del filtro R.

(e) Graficar los espectros en todos los puntos($y_1[n]$,$y_2[n]$,$z[n]$).

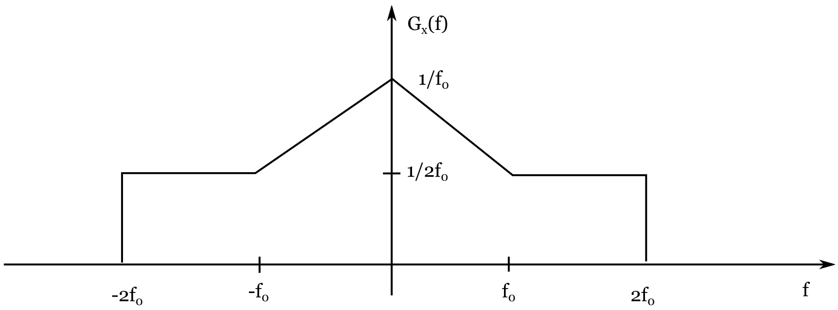
(f) ¿Se podría utilizar el bloque compresor antes del bloque expansor? Justifique.

Problema 2 [15 pts.]

Se tiene un proceso de tiempo continuo $x_c(t)$ que se debe ecualizar. Esta ecualización se realiza en tiempo discreto mediante el siguiente sistema.



El proceso tiene media nula y densidad espectral de potencia $G_x(f)$ como se muestra en la figura:



(a) Hallar $R_x(\tau)$, la autocorrelación del proceso x_c.

(b) Hallar la potencia del proceso $x_c(t)$.

(c) Hallar la frecuencia de corte del pasabajos, y la mínima frecuencia de muestreo f_s que permita representar toda la señal de entrada en tiempo discreto.

A partir de ahora se trabaja con la f_s calculada. El filtro H se define mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{6}(x[n-1] + x[n+1])$$

(d) Hallar la respuesta al impulso del filtro H.

(e) Hallar la respuesta frecuencial del filtro H. Graficar módulo y fase.

El cuantizador Q es lineal de 16 bits de resolución y rango ± 10.

(f) Calcular la SNR (relación señal a ruido) antes del filtro H.

(g) Calcular la SNR después del filtro H.

Solución

Pregunta

(a) Un sistema es estable BIBO si para toda entrada acotada, la salida es acotada.
Una señal x es acotada si existe una cota finita $B_x < \infty$ tal que $|x[n]| \leq B_x \forall n$.
(no alcanza decir $|x[n]| < \infty$: por ejemplo, $x[n] = n$ es siempre menor a infinito, pero no tiene cota finita)

(b) La CNS de estabilidad BIBO para SLIT es que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable: $\sum_k |x[k]| = S < \infty$

(c) Condición necesaria: H estable $\Rightarrow S < \infty$
El sistema es estable por hipótesis, entonces ante una entrada acotada, existe una cota finita para todos los valores de la salida.
En particular, tomamos una entrada que haga aparecer S como salida en algún instante.
Tomando $x[n] = \frac{h[-n]^*}{|h[-n]|}$ o 0 si $h[-n] = 0$. Evaluando la salida en $n = 0$, llegamos a $y[0] = S$.
La entrada está acotada por 1 y el sistema es estable BIBO, por lo tanto $y[n]$ tiene una cota finita. Entonces, S también tiene esa cota.
Condición suficiente: $S < \infty \Rightarrow H$ estable BIBO
Tomando una entrada genérica con cota B_x, buscamos una cota para la salida:

$$|y[n]| = |x * h| \leq \sum_k |h[k]||x[n-k]| \leq B_x.S$$

Entonces la salida está acotada por $B_x S$, que es una cota finita por hipótesis.

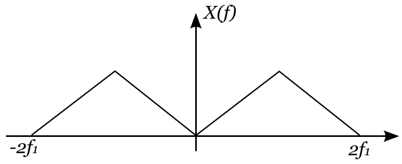
(d)

1. Para este sistema, $h[n] = u[n]\alpha^n$. $S = \sum |h|$ sólo converge para $|\alpha| < 1$. En este caso, y por la demostración de la condición suficiente, sabemos que existe una cota $B_y = SB_x$, con $S = \frac{1}{1-|\alpha|}$.
2. El sistema no es un SLIT), y los valores de la salida son los cuadrados de los valores de entrada, por lo cual el sistema es estable, y una cota es $B_y = (B_x)^2$.
3. Este sistema (no es SLIT) acumula 6 valores de la entrada elevados al cuadrado. Esta acumulación tiene cota $B_a = 36B_x^2$ ya que cada valor acumulado tiene cota B_x. Una cota para la salida será entonces $B_y = 36B_x^2$, y se trata de un sistema estable BIBO.

Problema 1

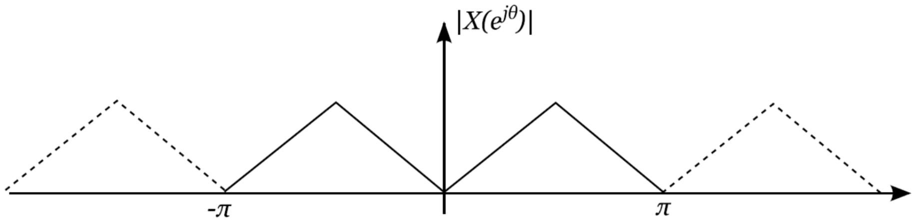
(a)

$$X(f) = \frac{1}{2}\left(\Delta\left(\frac{f-8000}{8000}\right) + \Delta\left(\frac{f+8000}{8000}\right)\right)$$

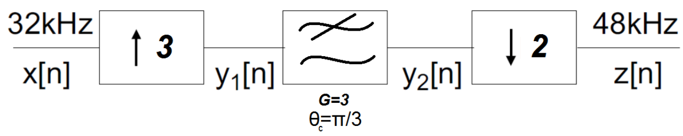


(b) La mínima frecuencia de muestreo es igual al doble del ancho de banda de $x(t)$, es decir 2×16kHz.
La mínima frecuencia de muestreo es $f_s = 32$kHz.

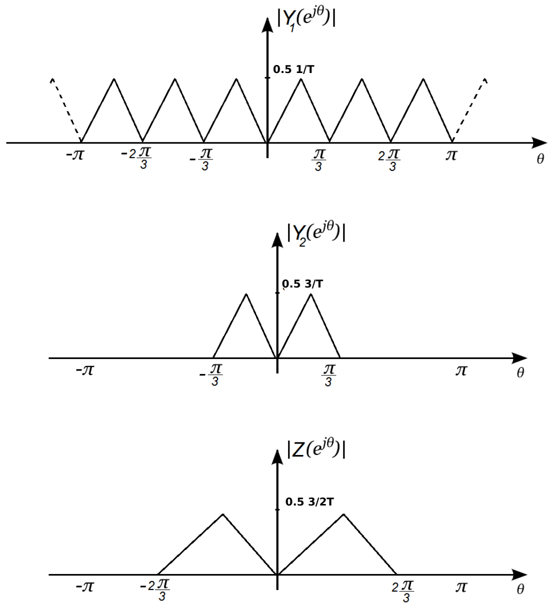
(c) El espectro de la señal $x[n]$ se muestra en la figura.



(d) Los parámetros del sistema de cambio de frecuencia se muestran en la figura.



(e) El espectros de las señales $y1[n]$,$y2[n]$ y $z[n]$ se muestran a continuación:.



(f) Si se utiliza el bloque compresor primero no se respetan las hipótesis del Terorema de Muestreo y no se podría reconstruir $x(t)$ utilizando las muestras $z[n]$.

Problema 2

(a)

$$R_x(\tau) = 2\text{sinc}(4f_0\tau) + \frac{1}{2}\text{sinc}^2(f_0\tau)$$

(b) La potencia es 5/2 (integral de la densidad espectral).

(c) La mínima frecuencia de muestreo es $f_s = 4f_0$, y la frecuencia de corte correspondiente $f_{LP} = 2f_0$. En estas condiciones la entrada no es alterada por el pasabajos, y la frecuencia de muestreo es suficiente según el teorema del muestreo.

(d) $h[n] = -\frac{1}{6}\delta[n+1] + \delta[n] - \frac{1}{6}\delta[n-1]$

(e) $H(e^{j\theta}) = 1 - \frac{1}{6}(e^{-j\theta} + e^{+j\theta}) = 1 - \frac{cos(\theta)}{3}$ 2π-periódico

Toma valores máximos (valor 4/3) en $\pm\pi$ y mínimo (valor 2/3) en 0.
La fase es nula.

(f) La autocorrelación de $x[n]$ queda $R_x[m] = R_x(\frac{m}{4f_0}) = 2\text{sinc}(4f_0\frac{m}{4f_0}) + \frac{1}{2}\text{sinc}^2(f_0\frac{m}{4f_0}) = 2\text{sinc}(m) + \frac{1}{2}\text{sinc}^2(m/4)$.
La potencia queda $P_x = R_x[0] = 5/2$.

$\text{SNR} = \frac{P_x}{\Delta^2/12} = \frac{30}{\Delta^2}$ con $\Delta = 10/2^{15}$.

(g) Se debe calcular la potencia de señal y ruido a la salida del filtro.

$$P_{y_x} = R_{y_x}[0] = \frac{38}{36}R_x[0] - \frac{4}{6}R_x[1] + \frac{1}{36}R_x[2] \approx 2.37$$

$$\sigma^2_{y_e} = (1 + 1/36 + 1/36) \cdot \sigma^2_e = (38/36) \cdot \sigma^2_e = \frac{38\Delta^2}{36 \times 12}$$

$\text{SNR} = \frac{P_{y_x}}{\sigma^2_{y_e}} \approx \frac{26.94}{\Delta^2}$ con $\Delta = 10/2^{15}$.
Como era de esperar la SNR luego de la ecualización es menor a la SNR a la entrada del filtro.