Muestreo y Procesamiento Digital
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

29 de noviembre de 2013

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

Sea una señal $x_c(t)$ cuyo espectro es $\Lambda(\frac{f}{5\ kHz})$, para la que se desea obtener una representación en frecuencias utilizando la DFT. Para esto, $x_c(t)$ es filtrada con un filtro pasabajos de frecuencia de corte 5 kHz y muestreada con $f_s = 10\ kHz$, obteniendo $x[n]$.

(a) Graficar $x(t)$ y $X(f)$. Bosquejar $x[n]$ y $X(e^{j\theta})$.

La señal $x[n]$ es enventanada con una ventana rectangular del ancho N, centrada en 0, obteniendo $x_1[n]$.

(b) Bosquejar $x_1[n]$ y $X_1(e^{j\theta})$.

Finalmente, se calcula la DFT de la secuencia $x_1[n]$, obteniendo $X_1[k]$ de largo $N = 10$.

(c) Bosquejar $X_1[k]$.

Problema 1 [25 pts.]

Sean los filtros digitales H_1, H_2 y H_3 reales, causales y dados por las siguientes transferencias:

$$H_1(z) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1})$$

$$H_2(z) = \frac{1}{(1 - \beta e^{j\pi/3} z^{-1})(1 - \beta e^{-j\pi/3} z^{-1})}$$

$$H_3(z) = \frac{1}{(1 - \beta e^{j2\pi/3} z^{-1})(1 - \beta e^{-j2\pi/3} z^{-1})}$$

Donde β es un coeficiente real.

(a) Para cada uno de los filtros:

1. Dar diagrama de ceros y polos.
2. Estudiar estabilidad según β.
3. Hallar la ecuación en recurrencia que lo define.
4. Dar la implementación (diagrama de bloques) en forma canónica.
5. Calcular la respuesta al impulso.

A partir de ahora se considera $\beta = 3/4$.

(b) Hallar la respuesta frecuencial de H_1, y bosquejar su módulo.

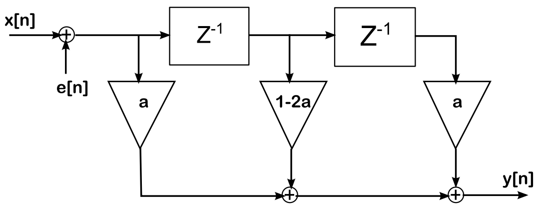
(c) A partir de los diagramas de ceros y polos, bosquejar la respuesta frecuencial en módulo de los filtros H_2 y H_3, indicando frecuencias de resonancia.

Los 3 filtros se conectan en cascada para realizar un filtro pasabanda $H(z) = H_1(z)H_2(z)H_3(z)$.

(d) Bosquejar, a partir de los resultados anteriores, la respuesta frecuencial en módulo de $H(z)$. Para completar el bosquejo, calcular la ganancia del filtro completo en frecuencias 0, $\pi/2$ y π.

Problema 2 [25 pts.]

Se considera el filtro digital H de la siguiente figura, con el coeficiente real a a determinar.



(a) Hallar la respuesta en frecuencia de H.

(b) Discutir según el valor de a si el filtro es de fase lineal o lineal generalizada. Calcular el retardo de grupo del filtro.

Al filtro H se aplicará el proceso $x[n]$, que llega contaminado con ruido blanco aditivo de potencia σ_N^2, de media nula y no correlacionado con $x[n]$. El objetivo del filtro es atenuar la componente de ruido.

(c) Hallar a de manera que la salida sea lo más similar posible a la señal original $x[n]$, tomando como criterio minimizar el error cuadrático medio introducido. Es decir, que considerando el retardo de grupo introducido, se desea minimizar:

$$\varepsilon^2 = \mathbf{E}\{(y[n] - x[n-1])^2\}$$

Datos: El proceso $x[n]$ tiene autocorrelación:

$$R_x[n] = \sigma_x^2 \left(\delta[n] + \frac{\delta[n-1] + \delta[n+1]}{4} \right) \qquad \sigma_x^2 = \sigma_N^2$$

(d) Dar el modelo *completo* para el error introducido en las operaciones cuando la representación numérica es en *punto fijo* y se utiliza *redondeo*. Justificar.

(e) Calcular la potencia total del ruido en la salida, debido al proceso $e[n]$ y los errores en las operaciones si el peso del bit menos significativo es Δ.

Solución

Problema 1

(a) H_1 tiene dos ceros en $z = \pm 1$. Es estable (no tiene polos; es un FIR). $y[n] = x[n] - x[n-2]$. Los coeficientes no recursivos son $[+1, 0, -1]$.
$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$.
H_2 tiene dos polos en $z = \beta e^{j\pm\pi/3}$. Al ser causal, es estable siempre que $|\beta| < 1$. Operando, $H_2(z) = 1/(1 - \beta z^{-1} + \beta^2 z^{-2})$, por lo tanto $y[n] - \beta y[n-1] + \beta^2 y[n-2] = x[n]$. Los coeficientes recursivos son $[\beta, -\beta^2]$.
De hoja de fórmulas, $h_2[n] = \frac{\beta^n \sin((n+1)\pi/3)}{\sin \pi/3} u[n]$.
H_3 es similar a H_2 pero con los polos en $z = \beta e^{j\pm 2\pi/3}$. $H_3(z) = 1/(1 + \beta z^{-1} + \beta^2 z^{-2})$, por lo tanto $y[n] + \beta y[n-1] + \beta^2 y[n-2] = x[n]$. Los coeficientes recursivos son $[-\beta, -\beta^2]$.
De hoja de fórmulas, $h_3[n] = \frac{\beta^n \sin((n+1)2\pi/3)}{\sin 2\pi/3} u[n]$.

(b) $H_1(e^{j\theta}) = 2je^{-j\theta} \sin\theta$. El módulo vale 0 en frecuencias 0 y π, y tiene máximo valor de 2 en frecuencias $\pm\pi/2$.

(c) Estos filtros tienen una resonancia en la cercanía de los polos: H_2 en frecuencia $\pi/3$ y H_3 en frecuencia $2\pi/3$.

(d) La banda de paso estará entre las 2 frecuencias de resonancia, y luego decae a 0 hacia frecuencias 0 y π.
Los ceros del FIR H_1 determinan que la ganancia en frecuencias 0 y π sea 0.
Por simetría, las ganancias de H_2 y H_3 en frecuencia $\pi/2$ son iguales. Calculemos una de ellas:
$H_2(e^{j\pi/2}) = \frac{1}{1-\beta e^{-j\pi/2}+\beta^2 e^{-j\pi}}$. Evaluando, $H_2(e^{j\pi/2}) = \frac{1}{1+j\beta-\beta^2}$. Entonces $|H_2(e^{j\pi/2})| = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+\beta^2}}$.
$|H_1(e^{j\pi/2})| = 2$.
Por lo tanto, el producto de las 3 ganancias da $|H(e^{j\pi/2})| = 2/((1-\beta^2)^2 + \beta^2) = 2.653$.

Problema 2

(a) Para que el filtro no presente distorción de fase, la respuesta en frecuencia del mismo debe ser de fase lineal. En este caso se tiene que la respuesta en frecuencias del filtro está dada por

$$H(e^{j\theta}) = a + (1-2a)e^{-j\theta} + ae^{-j2\theta}$$

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}(1 - 2a + 2a\cos\theta)$$

(c) La salida esta dada por

$$y[n] = ax[n] + (1-2a)x[n-1] + ax[n-2] + an[n] + (1-2a)n[n-1] + an[n-2]$$

donde n es el ruido aditivo.
Utilizando la relacion entre a y b hallada tenemos que

$$y[n] - x[n-1] = s_x[n] + s_n[n]$$

donde

$$s_x[n] = a(x[n] - 2x[n-1] + x[n-2])$$

$$s_n[n] = a(n[n] - 2n[n-1] + n[n-2]) + n[n-1]$$

Observar que, como $x[n]$ y $n[n]$ son independientes, también lo serán $s_x[n]$ y $s_n[n]$. Por lo tanto

$$\epsilon^2 = E\{(s_x[n] + s_n[n])^2\} = E\{s_x[n]^2\} + E\{s_n[n]^2\}$$

Luego realizando las cuentas correspondientes

$$\epsilon^2 = (2a - 4a^2)R_x[1] + 3(6a^2 - 4a^2 + 1)\sigma_x^2$$

Por lo tanto utilizando que $R_x[1] = \sigma_x^2/2$ y operando se tiene

$$\epsilon^2 = \sigma_x^2(14a^2 - 10a + 3)$$

Para obtener el mínimo igualamos la derivada de $\epsilon(a)$ respecto de a a cero. Es claro que este punto corresponde a un mínimo de dicha función. Realizando dichos cálculos se llega a que $a = 2/11$. Observar que esto garantiza que el sistema no distorsiona la fase.

(d) Ver teórico.

(e)