Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

2 de octubre de 2013

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [12 pts.]

(a) Enunciar el teorema del muestreo.

(b) Demostrar.

Aplicación: Sea la señal $x_c(t) = \cos(25\text{kHz} \cdot 2\pi t)$. La señal $x[n]$ corresponde a muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 15\text{kHz}$.

(c) Hallar $x[n]$, hallar y graficar $X(e^{j\theta})$.

Problema 1 [14 pts.]

Se desea procesar una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ mediante un filtro digital H con la finalidad de eliminar completamente una interferencia que ocurre a $f_i = 10\text{kHz}$.
El filtro H tiene respuesta al impulso $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$.

(a) Estudiar estabilidad BIBO de H.

(b) Calcular la respuesta frecuencial de H y graficar (módulo y fase) indicando cruces por cero y amplitudes en frecuencias 0 y π.

Se agrega otro filtro H_2 en cascada con H de modo de ajustar la respuesta frecuencial para frecuencias $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. H_2 es un filtro causal, de coeficientes reales, con la siguiente relación entre entrada y salida:

$$y_2[n] = \alpha y_2[n-1] + \beta x_2[n]$$

(c) Calcular la respuesta frecuencial de H_2.

A H seguido de H_2 se lo llamará de ahora en más H_3.

(d) Calcular α y β de modo de que H_3 tenga respuesta frecuencial 1 *en módulo* para frecuencias $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

(e) Bosquejar respuesta frecuencial de H_3.

(f) Dar un diagrama de bloques que implemente directamente H_3 usando la mínima cantidad de elementos de retardo.

Para filtrar la señal $x_c(t)$, se utiliza un sistema de muestreo, el filtro digital H_3, y luego un reconstructor ideal, para obtener la salida procesada $y_c(t)$.

(g) Dar el diagrama completo del sistema.

(h) Calcular la frecuencia de muestreo para que la interferencia sea efectivamente eliminada.

Problema 2 [14 pts.]

Un proceso $x_c(t)$ con autocorrelación $0.5\Lambda(\frac{t}{2\tau})$ es muestreado con una frecuencia de muestreo $f_s = 1/\tau$. En el proceso de muestreo se utiliza un cuantizador de 10 bits en el rango de valores $[-1, 1]$.

(a) Hallar la autocorrelación del proceso $x[n]$ correspondiente al muestreo de $x_c(t)$. Justificar.

(b) Hallar y bosquejar la densidad espectral de potencia de $x[n]$.

(c) Hallar la relación señal a ruido luego de la cuantización.

Se desea mejorar la relación señal a ruido utilizando un filtro H con respuesta al impulso:

$$h[n] = (\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2])/3$$

(d) Hallar la respuesta en frecuencia del filtro H. Bosquejar.

(e) Hallar la potencia de la salida $y[n]$, correspondiente a la entrada $x[n]$.

(f) Hallar la potencia del error de cuantización en la salida del filtro H.

(g) Evaluar la SNR en la salida de H, comparar con la SNR en su entrada.

Como el objetivo del filtro H es mejorar la relación señal a ruido, se debe considerar como salida deseada $x[n]$ y como error $r[n] = (y[n] + e_o[n]) - x[n]$ para obtener una medida más adecuada de la SNR. Donde $y[n]$ es la salida correspondiente a la entrada $x[n]$ y $e_o[n]$ es el error de cuantización luego de pasar por el filtro H .
La relación señal a ruido que se desea evaluar es entonces $\mathrm{SNR}_r = S_x/S_r$

(h) Calcular SNR_r. Comentar el resultado.

Solución

Pregunta

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) Por definición del muestreo, $x[n] = \cos(25000n/15000 \cdot 2\pi) = \cos(5n/3 \cdot 2\pi)$.
La señal en tiempo continuo tiene espectro $X_c(f) = 1/2(\delta(f + 25000) + \delta(f - 25000))$. En tiempo discreto, podemos plantear: $\cos(5n/3 \cdot 2\pi) = \frac{e^{j5/3 \cdot 2\pi} + e^{-j5/3 \cdot 2\pi}}{2}$.
Queda entonces

$$X(e^{j\theta}) = \pi \sum_k \left(\delta(\theta - 10\pi/3 + 2k\pi) + \delta(\theta + 10\pi/3 + 2k\pi)\right).$$

Problema 1

(a) El filtro es de respuesta al impulso finita (FIR), que es absolutamente sumable. Por lo tanto es estable BIBO.

(b)

$$H(e^{j\theta}) = 1 + e^{-j\theta} + e^{-j2\theta} = e^{-j\theta}(1 + 2\cos(\theta))$$

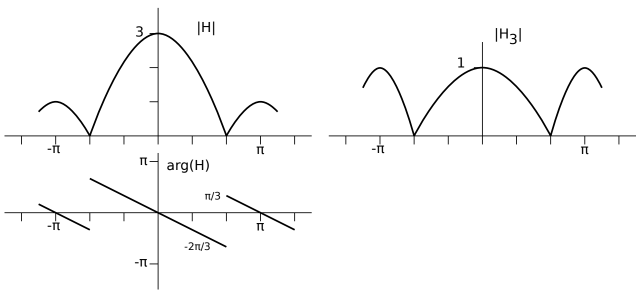
En frecuencia $\theta = 0$, $|H| = 3$; en alta frecuencia $\theta = \pi$, $|H| = 1$. Los cruces por ceros se dan cuando $\cos(\theta) = 1/2$, es decir, en $\theta = \pm 2\pi/3$.

(c)

$$H_2(e^{j\theta}) = \frac{\beta}{1 - \alpha e^{-j\theta}}$$

(d) En frecuencia $\theta = 0$, $|H_2| = \beta/(1 - \alpha)$, y en frecuencia $\theta = \pi$, $|H_2| = \beta/(1 + \alpha)$.
Se quiere entonces que $3 \times \beta/(1 - \alpha) = 1$ y por otra parte que $1 \times \beta/(1 + \alpha) = 1$. Queda entonces $\beta = 0.5$ y $\alpha = -0.5$

(e) El diagrama es similar al de H, sólo que ahora la respuesta en módulo en frecuencias 0 y π vale 1.



(f)

$$H_3(e^{j\theta}) = \frac{\beta(1 + e^{-j\theta} + e^{-j2\theta})}{1 - \alpha e^{-j\theta}}$$

Por lo tanto, se obtiene directamente el filtro en forma canónica (mínima cantidad de retardos, 2 en este caso) usando como coeficiente recursivo $[\alpha]$ y como coeficientes no recursivos $[\beta, \beta, \beta]$.

(g) Filtro pasabajos con frecuencia de corte $f_s/2$ para evitar solapamiento, muestreador a frecuencia f_s, filtro H_3, y reconstructor.

(h) La interferencia a 10 kHz debe coincidir con la frecuencia $\theta = 2\pi/3$ que es anulada por el filtro digital. Por lo tanto la frecuencia de muestreo debe ser $f_s = 30$kHz (recordar que la frecuencia de muestreo corresponde a $\theta = 2\pi$).

Problema 2

(a) La autocorrelación del proceso muestreado es el muestreo de la autocorrelación del proceso en tiempo discreto. Por lo tanto, la autocorrelación del proceso $x[n]$ es:

$$R_x[m] = 0.5\delta[n] + 0.25(\delta[n-1] + \delta[n+1])$$

(b) La densidad espectral del proceso x es la transformada de Fourier de su autocorrelación. Se tiene entonces que

$$X(e^{j\theta)} = 0.5(1 + \cos(\theta))$$

(c) La potencia del error de cuantización es:

$$S_N = \Delta^2/12$$

donde $\Delta = 2/(2^10)$ Entonces $S_N = 3.18 \times 10^{-7}$. La potencia delproceso x es simplemente su autocorrelación evaluada en 0, $S_x = 0.5$. Por lo tanto la SNR luego de la cuantización es SNR $= 1.57 \times 10^6 = 62\ dB$.

(d)

$$H(e^{j\theta}) =$$

(e) La potencia de $y[n]$ es $R_y[0]$,

$$R_y[0] = E\{y^2[n]\} = E\{(x[n] + x[n-1] + x[n-2])^2/3^2\} = \frac{3R_x[0] + 4R_x[1] + 2R_x[2]}{9}$$

$$R_y[0] = \frac{3 \times 0.5 + 4 \times 0.25 + 2 \times 0}{9} = 0.27778$$

(f) Utilizando Parseval para calcular la potencia del error de cuantización a la salida se tiene que

$$S_N^o = S_N \times (1/3^2 + 1/3^2 + 1/3^2) = S_N/3 = 1.06 \times 10^{-7}$$

.

(g) Como el error de cuantización es independiente de x y de media nula, se pueden calcular las potencias correspondientes a entrada y error de cuantización por separado como se hizo en las partes anteriores. Por lo tanto la relación señal a ruido es SNR$_o = 2.62 \times 10^6 = 64.2\ dB$, es decir una mejora de 2.2dB respecto a la entrada

(h) La potencia de la salida sería la potencia de x, $P_x = 0.5$.
La potencia del error es

$$P_r = R_r[0] = E\{(x[n]/3 + x[n-1]/3 + x[n-2]/3 + e_o[n] - x[n])^2\}$$

$$P_r = (4/9 + 1/9 + 1/9)R_x[0] + 2(1/9 - 2/9)R_x[1] + 2 \times 2/9 \times R_x[2] + R_e^o[0]$$

$$P_r = 2R_x[0]/3 - 2R_x[1]/9 + S_N^o = 1/3 - 1/18 + 1.06 \times 10^{-7} = 0.27778$$

La relación señal a ruido es entonces SNR $= \frac{0.5}{0.27778} = 1.8 = 2.7dB$.
Esto muestra que si el objetivo del filtro es efectivamente mejorar la relación señal a ruido, en realidad la empeora debido a la distorsión que introduce en x.