Muestreo y Procesamiento Digital
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

21 de noviembre de 2012

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [20 pts.]

En algunas aplicaciones, nos encontramos con señales "borroneadas" (blurred), de acuerdo a un proceso de convolución. Este proceso se puede modelar como un filtrado lineal: $x^b[n] = x[n] * h[n]$, donde x es la señal "limpia", x^b es la señal con blur, y la respuesta al impulso h es:

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^{-n}, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En este problema intentaremos recuperar la señal limpia x a partir de x^b, y se considerará $\alpha = 0.95$.

(a) Hallar la respuesta frecuencial $H(e^{j\theta})$ del filtro.

(b) Dibujar el diagrama de ceros y polos, y bosquejar el módulo de $H(e^{j\theta})$. Sugerencia: los ceros tienen módulo α.

Para recuperar la señal original, se propone utilizar un filtro lineal. Es decir, un filtro tal que al aplicarlo a la señal x^b, recupere la señal limpia x.

(c) Hallar la respuesta frecuencial $H_i(e^{j\theta})$ de este filtro.

(d) Dibujar el diagrama de ceros y polos de H_i.

(e) Hallar la respuesta al impulso $h_i[n]$ del filtro.

(f) ¿Es posible implementar este filtro? Justificar.

(g) Se propone realizar un filtro, a partir de h_i,según el método de ventanas. Detallar los pasos a seguir en la etapa de diseño, y describa la respuesta al impulso $h_i^T[n]$ cuando se utiliza una ventana rectangular.

Pregunta [15 pts.]

Considere la secuencia compleja

$$x[n] = \begin{cases} e^{j\theta_o n}, & 0 \leq n \leq 2N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Encontrar $X(e^{j\theta})$, la transformada de Fourier de $x[n]$.

(b) Encontrar $X[k]$, la DFT de $x[n]$ como secuencia finita de $2N$ puntos.

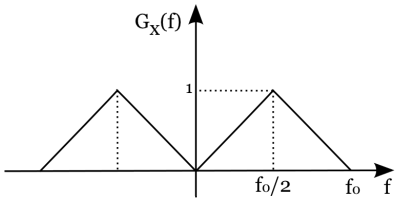
Considere

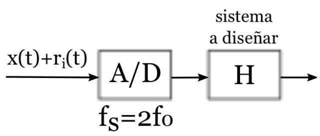
$$x_1[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n-kN] \quad \text{y} \quad \hat{x}[n] = \begin{cases} x_1[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c) Encontrar $\hat{X}[k]$, la DFT de $\hat{x}[n]$ como secuencia finita de N puntos.

Problema 2 [25 pts.]

Se desea digitalizar una señal $x(t)$ que se encuentra contaminada con un ruido interferente $r_i(t)$. La señal se modela como un proceso con densidad espectral de potencia como se muestra en la figura. El ruido interferente también se modela como un proceso, independiente de $x(t)$, con autocorrelación $R_i(t) = cos(2\pi f_i t)$ con $f_i = f_0/3$.





(a) Calcular la relación de potencia de la señal respecto a la potencia de la interferencia.

Para eliminar la interferencia se debe diseñar H formado por dos filtros en cascada, $\mathrm{H_{FIR}}$ y $\mathrm{H_{IIR}}$. $\mathrm{H_{FIR}}$ es un filtro FIR de segundo orden y $\mathrm{H_{IIR}}$ es un filtro IIR puro (sin ceros) de primer orden, ambos causales y estables, con coeficientes reales, que cumplen las siguientes condiciones:

- $\mathrm{H_{FIR}}$ debe eliminar la frecuencia de la interferencia.
- $\mathrm{H_{FIR}}$ debe tener ganancia $\alpha > 1$ en continua ($\theta = 0$).
- $\mathrm{H_{IIR}}$ debe tener ganancia inversa a $\mathrm{H_{FIR}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0})$ en $\theta = 0$.
- $\mathrm{H_{IIR}}$ debe tener ganancia inversa a $\mathrm{H_{FIR}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi})$ en $\theta = \pi$.

(b) Diseñar el filtro $\mathrm{H_{FIR}}$ que cumpla con las especificaciones indicadas.

(c) Diseñar el filtro $\mathrm{H_{IIR}}$ que cumpla con las especificaciones indicadas.

(d) ¿Existe α tal que el filtro H sea inestable? Justificar.

(e) Bosquejar el módulo de la respuesta frecuencial de H.

En la implementación de los filtros las operaciones se realizan en punto fijo con redondeo utilizando 12 bits de parte fraccionaria. Ambos filtros se deben implementar de manera de minimizar individualmente el ruido debido a los errores en las operaciones.

(f) Dar el diagrama de bloques del filtro $\mathrm{H_{FIR}}$. Justificar.

(g) Dar el diagrama de bloques del filtro $\mathrm{H_{IIR}}$. Justificar.

(h) En el sistema de filtros en cascada, indicar el orden más conveniente para minimizar el ruido a la salida debido a los errores en las operaciones ($\mathrm{H_{FIR}}$ primero o $\mathrm{H_{IIR}}$ primero). Justificar.

Solución

Pregunta

(a) La señal $x[n]$ es una exponencial compleja multiplicada por la señal $p[n]$ que vale 1 entre 0 y $2N-1$. $P(z) = (1 - z^{2N})/(1 - z)$, por lo tanto:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1 - e^{j(\theta_0 - \theta)2N}}{1 - e^{j(\theta_0 - \theta)}}$$

(b) La DFT de x[n] son 2N muestras equiespaciadas de su respuesta frecuencial:

$$X[k] = X(e^{j\frac{2\pi}{2N}k}) = \frac{1 - e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi}{2N}k)2N}}{1 - e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi}{2N}k)}}$$

Hay un factor $2\pi k$ en una exponencial que se puede eliminar:

$$X[k] = \frac{1 - e^{j\theta_0 2N}}{1 - e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi}{2N}k)}}$$

(c) $x_1[n]$ es x solapada cada N muestras, que justamente es lo que se obtiene si se hace la SDF inversa de N muestras de $X(e^{j\theta})$. Y $\hat{x}$ es el primer período de esta señal. Por lo tanto, su DFT serán N muestras de la TF:

$$\hat{X}[k] = X(e^{j2\pi k/N}) = \frac{1 - e^{j\theta_0 2N}}{1 - e^{j(\theta_0 - 2\pi k/N)}}$$

Una forma de verificar lo anterior es planteando explícitamente la transformada de $\hat{X}[k]$:

$$\hat{X}[k] = \sum_{0}^{N-1} (\hat{x}[n]) W_N^{kn} = \sum_{0}^{N-1} (x[n] + x[n+N]) W_N^{kn} = \sum_{0}^{N-1} (e^{j\theta_o n} + e^{j\theta_o (n+N)}) W_N^{kn}$$

$$\hat{X}[k] = (1 + e^{j\theta_o N}) \sum_{0}^{N-1} e^{j\theta_o n} W_N^{kn} = \frac{1 - e^{j\theta_0 2N}}{1 - e^{j(\theta_0 - \frac{2\pi}{N}k)}}$$

Problema 2

(a) La potencia de la señal es:

$$S_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_x(e^{j\theta}) d\theta = \frac{\pi f_s}{2\pi} = \frac{f_s}{2} = f_0$$

La potencia de la señal interferente es:

$$S_i = R_i[0] = R_i(0) = 1$$

Por lo que la relación señal a interferencia es:

$$R = 10 \log_{10}(2 f_0)$$

(b) El filtro $\mathrm{H_{FIR}}$ es de segundo orden, con ganancia α en $\theta = 0$ y tiene ceros en $\pm\theta_i$ por lo que toma la forma:

$$\mathrm{H_{FIR}} = \alpha(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_\mathrm{i}} \mathrm{z}^{-1})(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_\mathrm{i}} \mathrm{z}^{-1}) = \alpha(1 - 2\cos\theta_\mathrm{i} \mathrm{z}^{-1} + \mathrm{z}^{-2})$$

Luego $\cos\theta_i = \frac{1}{2}$ ya que $\theta_i = \pi/3$, por lo que el filtro FIR queda:

$$\mathrm{H_{FIR}} = \alpha(1 - \mathrm{z}^{-1} + \mathrm{z}^{-2})$$

(c) El filtro $\mathrm{H_{IIR}}$ es un filtro IIR puro (sin ceros) de primer orden por lo que toma la forma:

$$\mathrm{H_{IIR}} = \beta \frac{1}{(1 - \mathrm{pz}^{-1})}$$

Imponiendo las condiciones para la ganancia en continua y en $\theta_i = \pi$ se tiene:

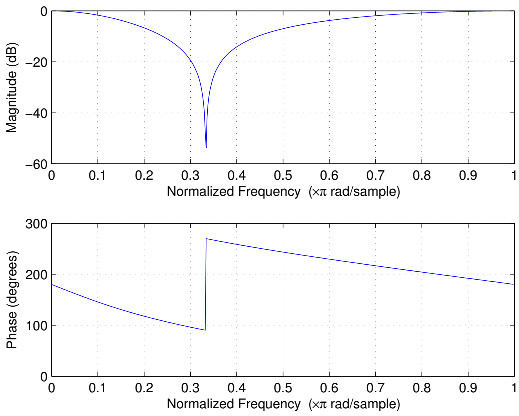
$$\beta \frac{1}{(1-p)} = \frac{1}{\alpha} \qquad \text{y} \qquad \beta \frac{1}{(1+\mathrm{p})} = \frac{1}{3\alpha}$$

De esta forma se llega a $\beta = 1/2\alpha$ y $p = 1/2$ y el filtro IIR queda:

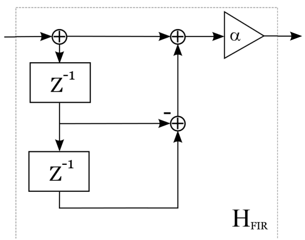
$$\mathrm{H_{IIR}} = \frac{1}{2\alpha(1 - \frac{1}{2}\mathrm{z}^{-1})}$$

(d) No, el polo siempre es $p = 1/2$, por lo que está dentro del círculo unidad para cualquier valor de α.

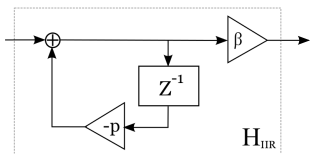
(e)



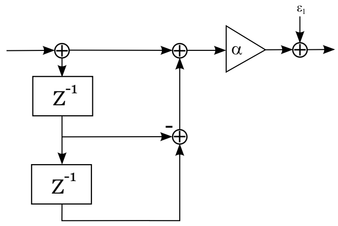
(f) El diagrama de bloques para cada filtro se muestra en la figura.

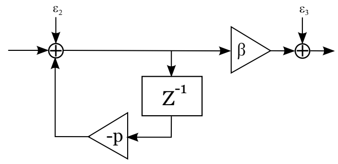


(g) El diagrama de bloques para cada filtro se muestra en la figura.



(h) Hay una única fuente de error en las operaciones para el filtro $\mathrm{H_{FIR}}$ mientras que hay dos en el filtro $\mathrm{H_{IIR}}$.





Por un lado el ruido en $\mathrm{H_{FIR}}$, $\epsilon_1[n]$, se ubica a la salida del filtro. Por otro lado, en $\mathrm{H_{IIR}}$, $\epsilon_2[n]$ se ubica a la entrada del filtro mientras que $\epsilon_3[n]$ se ubica a la salida del filtro. Todos los $\epsilon_i[n]$ son procesos blancos de media nula, independientes entre sí y de la entrada, con potencia $\sigma^2 = \Delta^2/12$. Esto hace que si el orden es con $\mathrm{H_{FIR}}$ primero el ruido total a la salida queda:

$$\sigma_e^2 = 2\sigma^2 \sum |\mathrm{h_{IIR}[n]}|^2 + \sigma^2$$

Si por el contrario el orden es con $\mathrm{H_{IIR}}$ primero el ruido total a la salida queda:

$$\sigma_e^2 = \sigma^2 \sum |\mathrm{h[n]}|^2 + \sigma^2 \sum |\mathrm{h_{FIR}[n]}|^2 + \sigma^2$$

De esta forma, para resolver qué orden es más conveniente, se debe estudiar:

$$2\sum |\mathrm{h_{IIR}[n]}|^2 \lesseqgtr \sum |\mathrm{h[n]}|^2 + \sum |\mathrm{h_{FIR}[n]}|^2$$

Tenemos que $h_{\mathrm{FIR}}[n] = \alpha(\delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2])$ y $h_{\mathrm{IIR}}[n] = \beta p^n u[n]$, mientras que $h[n] = \alpha\beta(p^n u[n] - p^{n-1}u[n-1] + p^{n-2}u[n-2]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(\delta[n] - \delta[n-1] + 3u[n-2])$. Se puede ver que:

$$\sum |\mathrm{h_{IIR}[n]}|^2 = \frac{1}{4\alpha^2}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{n}} = \frac{1}{4\alpha^2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3\alpha^2}$$

$$\sum |\mathrm{h_{FIR}[n]}|^2 = 3\alpha^2$$

$$\sum |\mathrm{h[n]}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \sum_{\mathrm{n=2}}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{n}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{19}{48}$$

De esta forma, con $\alpha > 1$, resulta que:

$$2\frac{1}{3\alpha^2} < \frac{19}{48} + 3\alpha^2 \rightarrow 2\sum |\mathrm{h_{IIR}[n]}|^2 < \sum |\mathrm{h[n]}|^2 + \sum |\mathrm{h_{FIR}[n]}|^2$$

por lo que es más conveniente el sistema con $\mathrm{H_{FIR}}$ primero.