Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

26 de setiembre de 2012

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [13 pts.]

(a) Un proceso estacionario x[n], con densidad espectral $G_x(e^{j\theta})$ es la entrada al filtro digital $H(e^{j\theta})$. La salida es el proceso y[n], con espectro $G_y(e^{j\theta})$. Expresar G_y en función de G_x y H. Demostrar.

Sea el filtro dado por la ecuación $y[n] = 0.5\ y[n-1] + x[n]$

(b) Hallar la potencia del proceso a la salida si la autocorrelación de la entrada es $R_x[n] = 0.25\ \delta[n]$. Justificar el resultado.

Problema 1 [13 pts.]

Se considera la señal $x(t)$ dada por $x(t) = sinc(f_0 t) + 2sinc(2f_0 t)$.

(a) Dar el espectro $X(f)$ de la señal $x(t)$.

Se dispone de dos frecuencias de reloj para realizar el muestreo de una señal en tiempo continuo: $f_{s1} = 3/2\ f_0$ y $f_{s2} = 3f_0$.

(b) Dar el espectro y la señal en el tiempo que se obtendría muestreando $x(t)$ con la frecuencia de muestreo f_{s1} sin limitar en banda la señal muestreada.

(c) Dar el espectro y la señal en el tiempo que se obtendría muestreando $x(t)$ con la frecuencia de muestreo f_{s2} y limitando en banda la entrada antes del muestreo.

Al utilizar la frecuencia de muestreo f_{s2} se observa que es posible utilizar una frecuencia de muestreo inferior a la necesaria para representar correctamente a x. Se desea cambiar esta frecuencia de forma de obtener la señal correspondiente a haber muestreado con la mínima frecuencia de muestreo que representa adecuadamente a x.

(d) Dar el diagrama de bloques del sistema en tiempo discreto que realice el cambio indicado en la frecuencia de muestreo. Dar los valores de los parámetros de los bloques utilizados.

(e) Graficar el espectro en cada punto intermedio del diagrama de bloques propuesto en la parte anterior.

Problema 2 [14 pts.]

Sea un proceso en tiempo discreto $x[n]$ cuya autocorrelación es $R_x[n] = \frac{1}{8}(\delta[n-1] + \delta[n+1]) + 0.5\delta[n]$

(a) Dar una expresión y graficar la densidad espectral de potencia $G_x(e^{j\theta})$.

El proceso $x[n]$ surgió de muestrear un proceso en tiempo continuo que toma valores en el rango [-1,1] utilizando un cuantizador con redondeo de 10 bits.

(b) Dar la potencia del ruido de cuantización y la relación señal a ruido luego de la cuantización.

Se desea utilizar el filtro h dado por la ecuación $y[n] = 0.75x[n] + 0.25x[n-1]$

(c) Hallar la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$ del filtro h. Graficar el módulo de $H(e^{j\theta})$.

(d) Bosquejar la densidad espectral de potencia del proceso $y[n]$ asumiendo que no hay ruido de cuantización.

(e) Calcular la potencia del ruido de cuantización a la salida.

(f) Calcular la relación señal a ruido a la salida del filtro propuesto.

Solución

Pregunta

(a) Ver teórico.

(b)

$$h[n] = 0.5^n u[n]$$

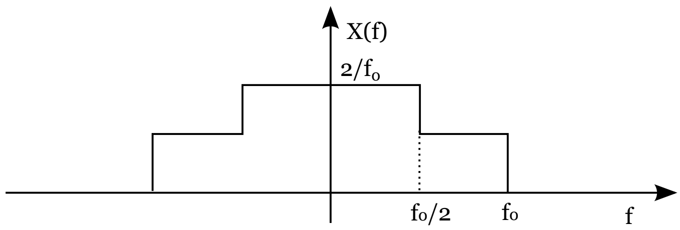
La potencia de la entrada es $\sigma_x^2 = 0.25$
Aplicando el resultado del teorema anterior, que la densidad espectral de x es constante y Parseval, se tiene que:

$$P_y = \sigma_x^2 \times \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} h[n]^2$$

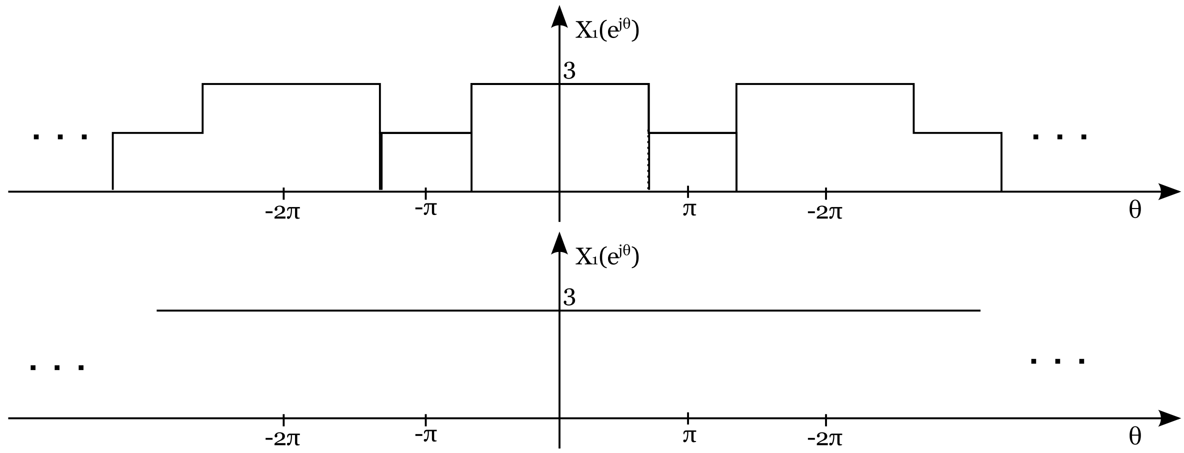
$$P_y = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{4}\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Problema 1

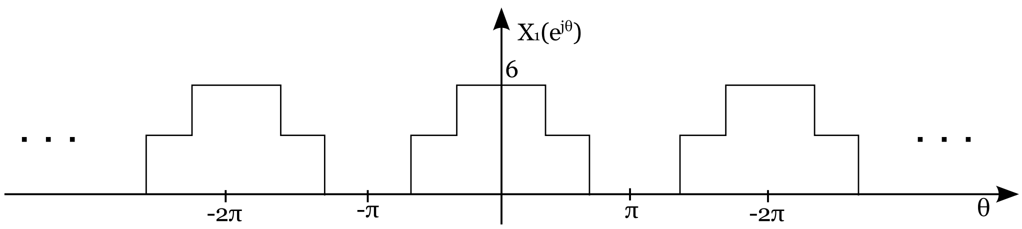
(a)



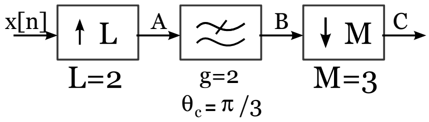
(b) En este caso hay solapamiento, obteniendo un espectro que es constante, cuya transformada inversa es el dentadiscreto. Por lo tanto la señal reconstruída corresponde a la reconstrucción de un seno cardinal $x_1(t) = sinc(3/4\ f_0 t)$



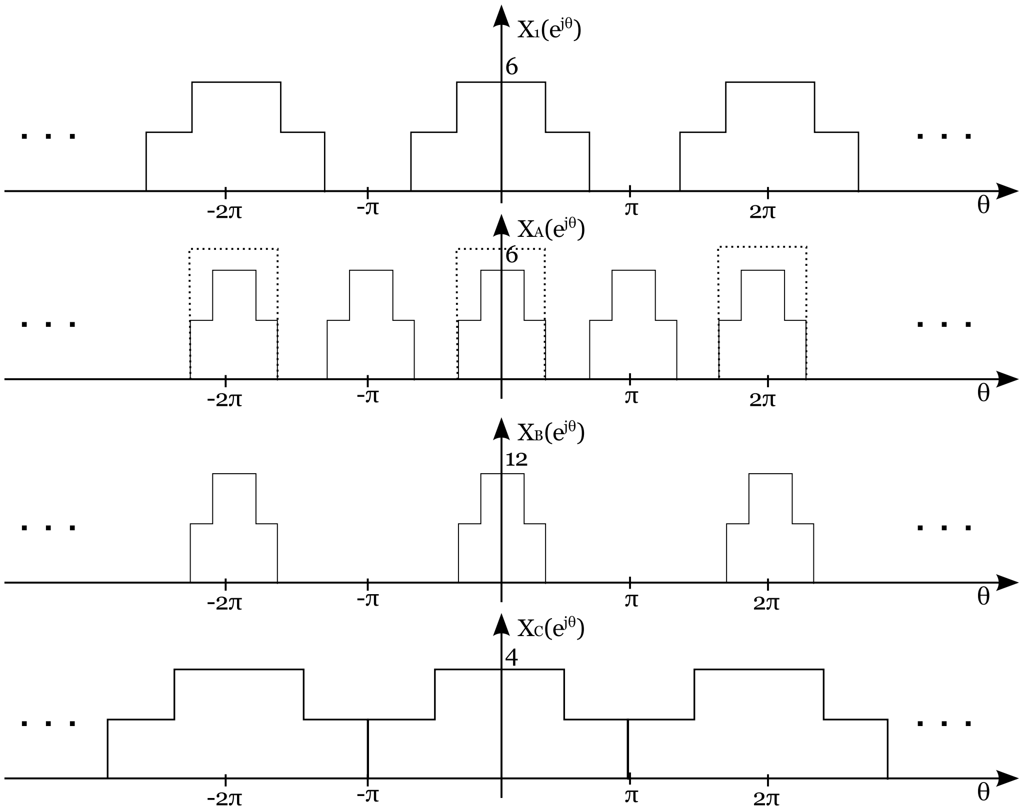
(c) En este caso se cumple el teorema del muestreo, obteniendo el espectro correspondiente a la periodización y escalado del espectro de la señal en tiempo contínuo. La señal reconstruída será exactamente $x(t)$



(d) EL cambio de frecuencia de muestreo corresponde a un factor de $L/M = 2/3$. Primero se efectúa la subida de frecuencia por un factor de $L = 2$ y luego se disminuye por un factor $M = 3$. El filtro intermedio para evitar el solapamiento tiene una ganancia $g = 2$ y frecuencia de corte $\theta_c = \pi/3$.

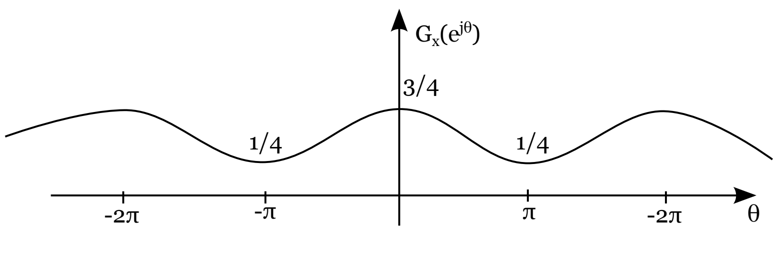


(e) En la figura se muestra el espectro en cada punto intermedio del sistema.



Problema 2

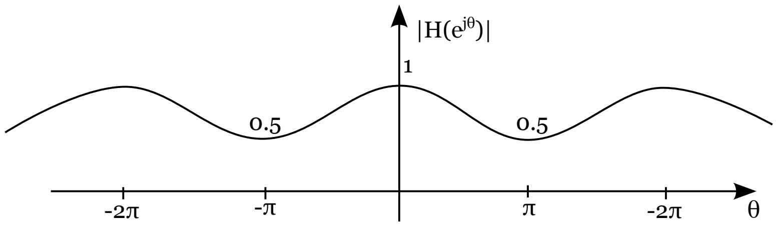
(a) La densidad espectral de potencia es $G_x(e^{j\theta}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}cos(\theta)$



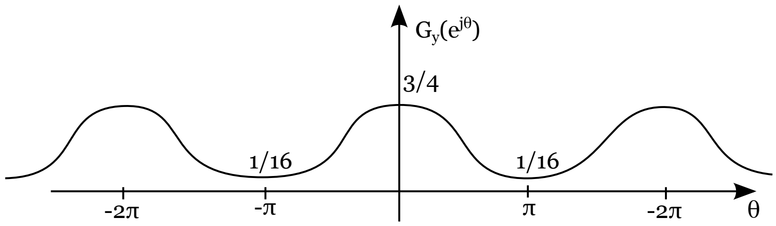
(b) La potencia del ruido de cuantización está dada por $S_n = \frac{\Delta^2}{12} = (2/2^{10})^2/12 = 3.18 \times 10^{-7}$. La potencia de la señal está dada por $S_x = R_x[0] = 0.5$. La relación señal a ruido es de 61.97 dB.

(c) La respuesta en frecuencia es:

$$H(e^{j\theta}) = 0.75 + 0.25e^{-j\theta}$$



(d)



(e) La potencia del ruido a la salida es $S_{n2} = S_n\ (0.75^2 + 0.25^2) = 1.99 \times 10^{-7}$.

(f) La potencia del proceso a la salida se puede calcular como:

$$E\{y[n]^2\} = E\{(0.75x[n] + 0.25x[n-1])^2\}$$

$$E\{y[n]^2\} = E\{(0.75^2 + 0.25^2)x[n]^2 + 2 \times 0.75 \times 0.25x[n]x[n-1]\}$$

$$E\{y[n]^2\} = (0.75^2 + 0.25^2)R_x[0]] + 2 \times 0.75 \times 0.25 \times R_x[1] = 0.359$$

La relación señal a ruido es entonces $SNR = 62.57\ dB$.