Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

4 de octubre de 2011

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [12 pts.]

(a) Enunciar el teorema del muestreo.

(b) Demostrar.

Aplicación: Sea la señal $x_c(t) = \text{sinc}(30\text{kHz} \cdot t)$. La señal $x[n]$ corresponde a muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 20\text{kHz}$.

(c) Hallar $x[n]$, hallar y graficar $X(e^{j\theta})$.

Problema 1 [8 pts.]

(a) Indicar qué condiciones debe cumplir un proceso para ser estacionario en sentido amplio.

Sea el proceso de tiempo continuo $x_c(t)$ que vale $x_c(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi)$ con la variable aleatoria $\phi \sim U[0, 2\pi)$.

(b) Estudiar si el proceso $x_c(t)$ es estacionario en sentido amplio. Justificar.

El proceso $x_c(t)$ se muestrea a una frecuencia $f_s > 2f_c$ y se obtiene el proceso de tiempo discreto $x[n] = x_c(n/f_s)$.

(c) Estudiar si el proceso $x[n]$ es estacionario en sentido amplio. Justificar.

(d) ¿El proceso x_c es ergódico? Justificar.

Problema 2 [8 pts.]

Se considera el filtro H dado por la ecuación en diferencias: $y[n] = kx[n] + (1 - k)y[n - 1]$.

(a) Dar un diagrama de bloques que implemente este filtro.

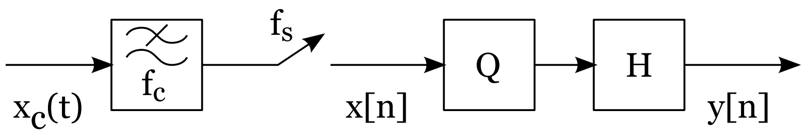
(b) Estudiar la estabilidad BIBO del filtro según el parámetro k.

(c) Calcular la respuesta frecuencial de H. Bosquejar el módulo de la respuesta frecuencial para los siguientes valores de k: 0.1, 0.5 y 1.5.

(d) Hallar k para que la respuesta frecuencial en frecuencia $\theta = \pi/2$ tenga módulo 1/2.

Problema 3 [12 pts.]

Se tiene un proceso de tiempo continuo $x_c(t)$ que se debe ecualizar, para lo cual se procesa en tiempo discreto. El proceso tiene media nula y densidad espectral de potencia $G_x(f) = \frac{1}{2f_0} \cdot \Lambda\left(\frac{f-f_0}{f_0}\right) + \frac{1}{2f_0} \cdot \Lambda\left(\frac{f+f_0}{f_0}\right)$.



(a) Hallar $R_x(\tau)$, la autocorrelación del proceso x_c.

(b) Hallar la potencia del proceso $x_c(t)$.

(c) Hallar la frecuencia de corte del pasabajos, y la mínima frecuencia de muestreo f_s que permita representar toda la señal de entrada en tiempo discreto.

A partir de ahora se trabaja con la f_s calculada. El filtro H se define mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = x[n] + x[n-2]$$

(d) Hallar la respuesta al impulso del filtro H.

(e) Hallar la respuesta frecuencial del filtro H. Graficar módulo y fase.

El cuantizador Q es lineal de 16 bits de resolución y rango ± 10.

(f) Calcular la SNR (relación señal a ruido) antes del filtro H.

(g) Calcular la SNR después del filtro H.

Solución

Pregunta

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) $x[n] = \mathrm{sinc}(3n/2)$.

El espectro de x_c es $X_c(f) = 1/30000 \cdot \Pi(f/30000)$.
$X(e^{j\theta})$ es la superposición cada 2π de la función $f_s/30000 \cdot \Pi(\theta f_s/60000\pi) = 2/3\Pi(\theta/3\pi)$:

$$X(e^{j\theta}) = 2/3 \sum_k \Pi((\theta - 2k\pi)/(3\pi))$$

Problema 1

(a) La esperanza debe ser constante (no depende del tiempo: $E\{x(t)\} = m_x$) y la autocorrelación debe ser una función de una sola variable (sólo depende de la distancia entre los dos instantes: $R_x(\tau) = r_x(t, t+\tau)$).

(b) Para ver si es estacionario en sentido amplio debemos ver si la media y la autocorrelación dependen del instante observado (t). Entonces planteando el valor medio se tiene:

$$E\{x_c(t)\} = E\{\cos(2\pi f_c t + \phi)\} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\pi f_c + \phi)}{2\pi} d\phi = 0$$

Luego, planteando la autocorrelacion se tiene:

$$R_x(t, t+\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = E\{\cos(2\pi f_c t + \phi)\cos(2\pi f_c(t+\tau) + \phi)\}$$

$$R_x(t, t+\tau) = \frac{1}{2} E\{\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + 2\phi)\}$$

$$R_x(t, t+\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + 2\phi)}{2\pi} d\phi$$

La primera integral, es la integral de una constante y la segunda es la integral de un coseno en una cantidad entera de ciclos, entonces:

$$R_x(\tau) = \frac{\cos(2\pi f_c \tau)}{2}$$

y el proceso es estacionario en sentido amplio.

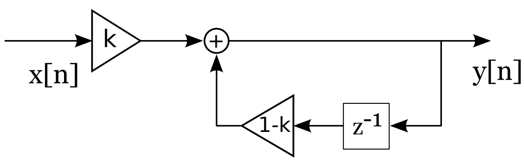
(c) Es estacionario en sentido amplio: $E\{x[n]\} = E\{x_c(n/f_s)\} = 0$, y la autocorrelación es el muestreo de R_{x_c}:

$$R_x[m] = \frac{1}{2}\cos(2\pi n f_c/f_s)$$

(d) El proceso no es ergódico dado que no es posible conocer la estadística del mismo a partir de una única realización. Notar que la fase es uniforme en el intervalo $[0, 2\pi)$ y con una realización solo se tiene un valor posible de esta variable aleatoria.

Problema 2

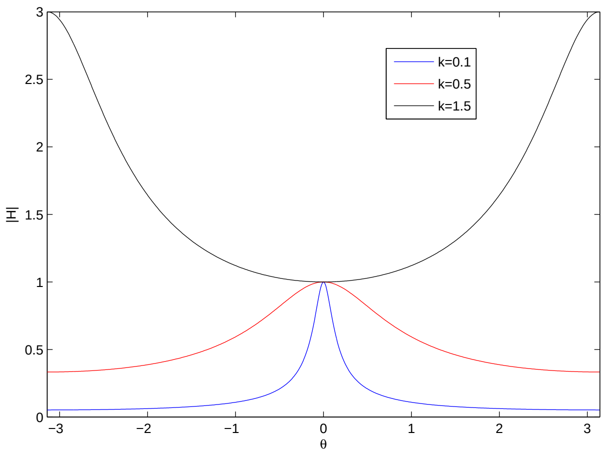
(a)



(b) k entre 0 y 2

(c)

$$H(e^{j\theta}) = \frac{k}{1-(1-k)e^{-j\theta}}$$



(d)

$$|H(e^{j\pi/2})|^2 = \frac{k^2}{1+(1-k)^2}$$

Igualando a $|H|^2 = 1/4$ queda una cuadrática $3k^2 + 2k - 2 = 0$, que tiene dos soluciones posibles. La solución que resulta en un filtro estable es $k = (\sqrt{7}-1)/3 \approx 0.54$.

Problema 3

(a)

$$R_x(\tau) = \operatorname{sinc}^2(f_0\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

(b) La potencia es 1 (integral de la densidad espectral).

(c) La mínima frecuencia de muestreo es $f_s = 4f_0$, y la frecuencia de corte correspondiente $f_{LP} = 2f_0$. En estas condiciones la entrada no es alterada por el pasabajos, y la frecuencia de muestreo es suficiente según el teorema del muestreo.

(d) $h[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$

(e) $H(e^{j\theta}) = 1 + e^{-2j\theta} = 2e^{-j\theta}cos(2\theta)$ 2π-periódico

$|H(e^{j\theta})| = 2|\cos(2\theta)|$ máximos (valor 2) en 0, $\pi/2$ y π, mínimos (valor 0) en $\pi/4$ y $3\pi/4$.

$\angle(H(e^{j\theta})) = -\theta$ con saltos de π en $\pi/2$ y $3\pi/2$.

Faltan gráficas.

(f) La autocorrelación de $x[n]$ queda $R_x[m] = R_x(\frac{m}{4f_0}) = \operatorname{sinc}^2(f_0\frac{m}{4f_0})\cos(2\pi f_0\frac{m}{4f_0}) = \operatorname{sinc}^2(\frac{m}{4})\cos(m\frac{\pi}{2})$. La potencia queda $P_x = R_x[0] = 1$.

$\text{SNR} = \frac{P_x}{\Delta^2/12} = \frac{12}{\Delta^2}$ con $\Delta = 10/2^{15}$.

(g) Se debe calcular la potencia de señal y ruido a la salida del filtro.

$$P_{y_x} = R_{y_x}[0] = 2(R_x[0] + R_x[2]) \approx 1.19$$
$$\sigma^2_{y_e} = 2 \cdot \sigma^2_e = 6/\Delta^2$$

$\text{SNR} = \frac{P_{y_x}}{\sigma^2_{y_e}} = \frac{P_{y_x}}{2\sigma^2_e} \approx \frac{7.14}{\Delta^2}$ con $\Delta = 10/2^{15}$.