Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

30 de noviembre de 2010

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

Al usar una representación de número con punto flotante:

(a) ¿En cuáles operaciones se producen errores? Explicar detalladamente qué sucede en cada caso.

(b) Presentar el modelo completo de errores en las operaciones, e indicar hipótesis de validez.

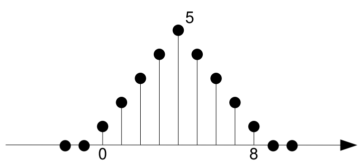
Problema 1 [10 pts.]

Sea $x[n]$ una secuencia que cumple, $x[n] = 0$ para todo n fuera del intervalo $[0, N-1]$. Sea $\hat{x}[n]$ la señal obtenida de periodizar $x[n]$, es decir:

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

(a) Explicar cómo se relacionan $X[k]$, DFT de la secuencia $x[n]$; $\hat{X}[k]$, serie de Fourier de la secuencia $\hat{x}[n]$ y $X(e^{j\theta})$, transformada de Fourier de $x[n]$. Justificar cada afirmación realizada.

Sea x[n] la secuencia que se muestra en la figura.



Sea $X[k]$ una secuencia finita de N términos que se obtiene de muestrear el espectro de $x[n]$ como se indica,

$$X[k] = X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$$

con $k = 0 \dots N-1$.

(b) Hallar las secuencias que se obtienen al aplicar la transformada DFT inversa a la secuencia $X[k]$ usando los valores $N = 9$ y $N = 6$.

Problema 2 [20 pts.]

En este ejercicio se estudia el uso de retardos múltiples en la implementación de filtros.

(a) Sea $P(z)$ un polinomio en $z \in C$, siendo c_i las raíces del polinomio. Llamamos $P_N(z) = P(z^N)$. Hallar todas las raíces de $P_N(z)$.

(b) Verificar el resultado anterior para el polinomio $Q(z) = 1 - z^{-2}$, resolviéndolo directamente, y como $P_2(z)$.

Sea el filtro digital causal dado por la siguiente transformada, siendo $a < 1$ real y cercano a 1.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

(c) Estudiar estabilidad de H, dibujar diagrama de ceros y polos, bosquejar el módulo de su respuesta frecuencial.

(d) Para el filtro resultante de sustituir todos los retardos por retardos dobles, $H_2(z)$, dar diagrama de ceros y polos y bosquejar módulo de la respuesta frecuencial.

(e) Análogamente, para $H_3(z)$, dar diagrama de ceros y polos y bosquejar módulo de la respuesta frecuencial.

Se desea implementar el filtro $H_2(z)$ como 2 filtros en forma canónica de orden 1 dispuestos en cascada. El sistema trabaja en punto fijo con redondeo, con 10 bits de parte fraccionaria. El parámetro del filtro es $a = 0.9$.
Notar que hay varias implementaciones posibles según se agrupen ceros y polos.

(f) Encontrar la o las implementaciones que introduzcan menor potencia de ruido a la salida debida a errores en operaciones. Puede ser útil notar que, en general, $h_N[n]$ es la expansión de orden N de $h_1[n]$.

Problema 3 [20 pts.]

En una aplicación industrial se desea monitorear los tiempos de duración de los trabajos que realiza una máquina específica. Para esto, se cuenta con un sensor que mide dos estados posibles de la máquina: encendida y apagada . Dicho sensor se consulta periódicamente cada un tiempo Δ. Asumiendo que Δ es suficientemente chico como para que no ocurran dos cambios de estado sucesivos en dicho período, este mecanismo permite detectar el tiempo de inicio y el tiempo de fin de cada trabajo. Dichas medidas se modelan para el trabajo k como:

$$\hat{T}_i[k] = T_i[k] + e_i[k]$$

$$\hat{T}_f[k] = T_f[k] + e_f[k]$$

donde $e_i[k]$ y $e_f[k]$ son los errores cometidos al medir los instantes de inicio $T_i[k]$ y fin $T_f[k]$ de la tarea k.
El error en cada medida del tiempo de inicio y fin se modela con una densidad de pobablidad uniforme en el intervalo $(-\Delta/2, \Delta/2]$, siendo cada medida independiente del resto.

(a) Indicar qué hipótesis son necesarias para que dicho modelo sea válido.

(b) Hallar la autocorrelación y la densidad espectral de potencia de los procesos e_i y e_f.

Se desea monitorear la duración de cada tarea. Esta se calcula como la diferencia de tiempo entre el inicio y el fin de la misma. La duración de la tarea k será

$$\hat{T}[k] = \hat{T}_f[k] - \hat{T}_i[k]$$

(c) Expresar el error $e[k]$ cometido en la medida k en función de $e_i[k]$ y $e_f[k]$. Calcular la densidad de probabilidad de $e[k]$.

Nota: La densidad de probabilidad de la suma de dos variables aleatorias independientes con densidades de probabilidad f y g es la convolución de f y g.

(d) Hallar la media y la potencia del error $e[k]$.

(e) Hallar la autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $e[k]$.

Se desea tener un promedio de la duración de las últimas tareas mediante la utilización de un filtro.

(f) Hallar la media y la potencia del ruido a la salida si el filtrado consiste en un promedio de las últimas N medidas.

(g) Hallar la media y la potencia del ruido a la salida si el filtro es un IIR pasabajos con un polo y sin ceros que tiene respuesta en frecuencia 1 en $\theta = 0$ y -0.01 en $\theta = \pi$.

Solución

Pregunta

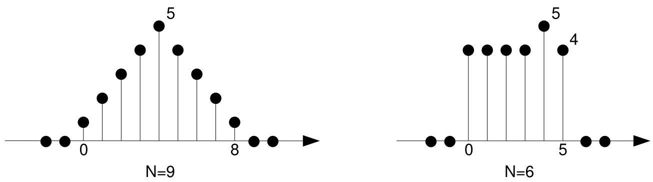
(a) Ver Teórico.

(b) Ver Teórico.

Problema 1

(a) Ver teórico.

(b)



Problema 2

(a) Si $P(z)$ se anula en c_i, entonces $P_N(z)$ se anula en todos los puntos en que $z^N = c_i$.
Entonces los ceros de P_N serán todas las raíces N-ésimas de cada uno de los ceros originales c_i.

(b) $Q(z) = (1 + z^{-1})(1 - z^{-1})$ que tiene ceros en $z = 1$ y $z = -1$.
Por otra parte, $Q(z) = P_2(z)$ donde $P(z) = 1 - z^{-1}$.
$P(z)$ tiene un cero $c_1 = 1$. Las raíces cuadradas de c_1 son $z = 1$ y $z = -1$, lo cual coincide con el resultado anterior.

(c) $H(z)$ tiene un cero en $z = 1$ y un polo en $z = a$. Por ser causal y $|a| < 1$, el sistema es estable.
La respuesta frecuencial vale 0 en frecuencia 0, y se acerca a 1 al alejarse del cero (ya que cero y polo se encuentran muy próximos).

(d) Los ceros y polos serán las raíces cuadradas de los ceros y polos de H, es decir: $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $p_1 = \sqrt{a}$, $p_2 = -\sqrt{a}$.

(e) Los ceros y polos serán las raíces cúbicas de los ceros y polos de H, es decir: $c_1 = 1$, $c_2 = e^{j2\pi/3}$, $c_3 = e^{j4\pi/3}$, $p_1 = \sqrt[3]{a}$, $p_1 = \sqrt[3]{a}e^{j2\pi/3}$, $p_1 = \sqrt[3]{a}e^{j4\pi/3}$.

(f) Dada la simetría del sistema, sólo es necesario considerar 2 casos, según se agrupen en cada filtro polos y ceros del mismo semiplano o de semiplanos opuestos.
Cualquiera sea el caso, los coeficientes no recursivos valen ± 1, con lo cual no hay productos que introduzcan errores.
Los errores corresponden a los productos por los coeficientes recursivos (de factor $\sqrt{0.9}$). Estos errores se modelan como sumados a la entrada de cada filtro de orden 1.
Entonces el modelo completo de errores queda un componente de ruido a la entrada del filtro completo, más un componente de ruido (independiente del primero) a la entrada del segundo filtro de orden 1.
El primer componente agrega potencia de ruido a la salida que es independiente de la agrupación de ceros y polos.
Por lo tanto, lo único que interesa es la potencia de ruido agregada por el segundo filtro de orden 1.
Para este filtro, $\sum |h[n]|^2 = 2/(1 + \beta)$, donde $\beta = \pm\sqrt{0.9}$. Esta suma vale 1.105 o 10.52 según el cero y polo se encuentren en el mismo semiplano, o en semiplanos opuestos respectivamente.
Por lo tanto, y concordando con lo que se espera intuitivamente, es mucho menos ruidosa la implementación donde se agrupan ceros y polos cercanos entre sí.

Problema 3

(a) Ninguna relación entre los instantes de comienzo y fin y los tiempos de sensado. Que la duración de las tareas sea aleatoria y con una variación suficiente para cubrir varios períodos de sensado. Por ejemplo una duración con una densidad de probabilidad gausiana con $\sigma = 10\Delta$.

(b)

$$R_{e_i}[m] = R_{e_f}[m] = \frac{\Delta^2}{12}\delta[m]$$

$$G_{e_i}(e^{j\theta}) = G_{e_f}(e^{j\theta}) = \frac{\Delta^2}{12}$$

(c)

$$e[k] = e_f[k] - e_i[k]$$

Como e_i tiene distribución uniforme, simétrica respecto a 0, $-e_i$ tiene la misma distribución. De esta forma aplicamos la propiedad indicada en la nota y obtenemos:

$$f_e(x) = f_{e_f}(x) * f_{-e_i}(x) = \Pi(\frac{x}{\Delta}) * \Pi(\frac{x}{\Delta})$$

$$f_e(x) = \Lambda(\frac{x}{\Delta})$$

(d)

$$E\{e[k]\} = 0$$

$$E\{e^2[k]\} = \frac{\Delta^2}{6}$$

(e)

$$R_e[m] = \frac{\Delta^2}{6}\delta[m]$$

$$G_e(e^{j\theta}) = \frac{\Delta^2}{6}$$

(f)

$$E\{e_N[k]\} = 0$$

$$E\{e_N^2[k]\} = \frac{\Delta^2}{6N}$$

(g) Imponiendo las condiciones del filtro $H(z) = \frac{a}{z-p}$ queda:

$$\frac{a}{1-p} = 1$$

$$\frac{a}{-1-p} = -0.01$$

Despejando se obtienen los coeficientes $p = 99/101$ y $a = 2/101$.

$$E\{e_{IIR}[k]\} = 0$$

$$E\{e_{IIR}^2[k]\} = E\{e^2[k]\}\sum |h[n]|^2 = E\{e^2[k]\}\sum_{n=1}^{\infty} a^2(p^2)^{n-1} = \frac{\Delta^2}{6}\frac{a^2}{1-b^2}$$