Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

1 de octubre de 2010

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

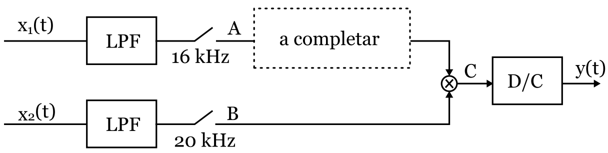
(a) Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada x y salida y.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

(c) Demostrar.

Problema 1 [15 pts.]

Considere el sistema de la figura, que sirve para multiplicar señales de tiempo continuo usando un sistema de tiempo discreto.



(a) ¿Cuáles son los máximos anchos de banda admisibles en las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para no tener solapamiento al muestrear? Bosquejar los espectros en los puntos A y B indicados en la figura cuando

$$X_1(f) = \Lambda\left(\frac{f}{4\text{ kHz}}\right)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi\ 5\text{kHz}\ t)$$

(b) Diseñar un sistema de cambio de la frecuencia de muestreo para incluir en el rectángulo punteado del diagrama, de forma de igualar las frecuencias de muestreo.

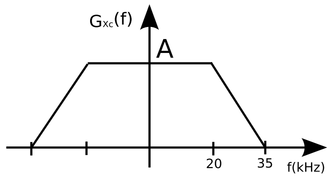
(c) Graficar el espectro en todos los puntos del sistema agregado cuando x_1 y x_2 son las indicadas en la parte (a).

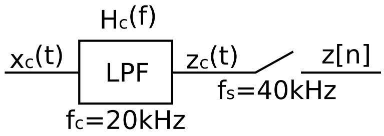
(d) Encontrar y graficar el espectro en el punto C indicado en la figura cuando x_1 y x_2 son las indicadas en la parte (a).

(e) ¿Qué condiciones deben cumplir W_1 y W_2, anchos de banda de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ respectivamente, para que $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$?

Problema 2 [15 pts.]

Sea el proceso de tiempo continuo $x_c(t)$ de media nula, con densidad espectral de potencia $G_{x_c}(f)$ como se muestra en la figura. Este proceso pasa por el filtro pasabajos ideal $H_c(f)$ de frecuencia de corte $f_c = 20$ kHz y se muestrea a una frecuencia $f_s = 40$ kHz.





(a) Graficar la densidad espectral de potencia de $z_c(t)$: $G_z(f)$.

(b) Dar la condiciones que debe cumplir un proceso para ser estacionario en sentido amplio. Verificar que $z_c(t)$ las cumple.

(c) Demostrar que la autocorrelación de $z[n]$ es igual a las muestras de la autocorrelación de $z_c(t)$, es decir $R_z[m] = R_{z_c}(mT_s)$.

En algunas aplicaciones es necesario trabajar con procesos que se denominan ruido coloreado. A diferencia del ruido blanco, no poseen densidad espectral de potencia plana.
En particular encontramos ruidos cuya densidad espectral de potencia decae proporcionalmente con potencias de la frecuencia, como por ejemplo $1/f$ (ruido rosa) o $1/f^2$ (ruido marrón). Una forma de generar ruido coloreado es a partir del filtrado de ruido blanco, donde se debe diseñar el filtro de manera de que a la salida del mismo se obtenga la densidad espectral de potencia deseada.
El proceso $z[n]$ se pasa por el filtro de tiempo de discreto $H_d(e^{j\theta})$ definido por la siguiente ecuación de recurrencia:

$$y[n] = 0.9y[n-1] + z[n] + z[n-1]$$

(d) Verificar que el filtro es estable `BIBO`.

(e) Hallar y bosquejar la respuesta en frecuencia del filtro $H_d(e^{j\theta})$.

(f) Hallar y bosquejar la densidad espectral de potencia a la salida del filtro $G_y(e^{j\theta})$.

(g) Calcular la potencia a la salida del filtro.

Solución

Pregunta

(a) Un sistema es estable BIBO si para toda entrada acotada, la salida es acotada.
Una señal x es acotada si existe una cota finita $B_x < \infty$ tal que $|x[n]| \leq B_x \forall n$.
(no alcanza decir $|x[n]| < \infty$: por ejemplo, $x[n] = n$ es siempre menor a infinito, pero no tiene cota finita)

(b) La CNS de estabilidad BIBO para SLIT es que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable: $\sum_k |x[k]| = S < \infty$

(c) Condición necesaria: H estable $\Rightarrow S < \infty$
El sistema es estable por hipótesis, entonces ante una entrada acotada, existe una cota finita para todos los valores de la salida.
En particular, tomamos una entrada que haga aparecer S como salida en algún instante.
Tomando $x[n] = \frac{h[-n]^*}{|h[-n]|}$ o 0 si $h[-n] = 0$. Evaluando la salida en $n = 0$, llegamos a $y[0] = S$.
La entrada está acotada por 1 y el sistema es estable BIBO, por lo tanto $y[n]$ tiene una cota finita. Entonces, S también tiene esa cota.
Condición suficiente: $S < \infty \Rightarrow H$ estable BIBO
Tomando una entrada genérica con cota B_x, buscamos una cota para la salida:

$$|y[n]| = |x * h| \leq \sum_k |h[k]||x[n-k]| \leq B_x.S$$

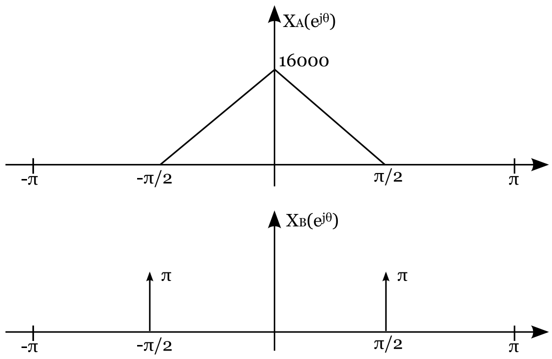
Entonces la salida está acotada por $B_x S$, que es una cota finita por hipótesis.

Problema 1

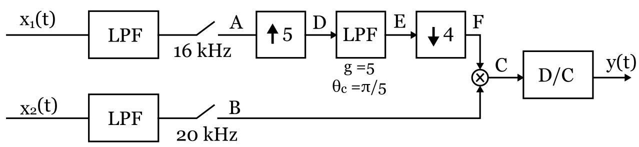
(a) Por teorema de muestreo podemos asegurar que no hay solapamiento si las señales a muestrear tiene un ancho de banda menor o igual a la mitad de la frecuencia de muestreo. En este caso implica que

$$W_1 \leq 8 \text{ kHz} \qquad W_2 \leq 10 \text{ kHz}.$$

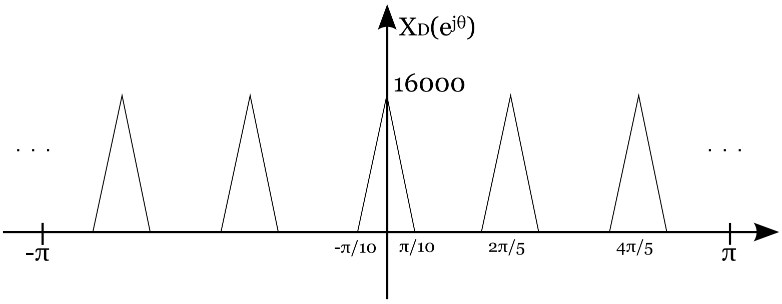
Los espectros pedidos son:

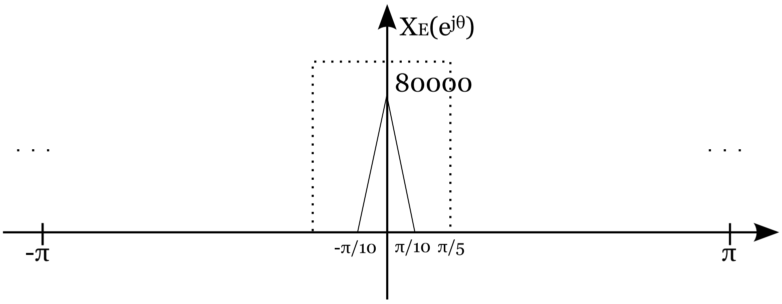


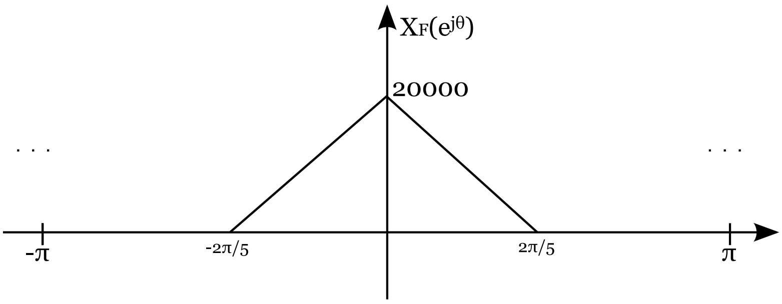
(b) El sistema completo es:



(c) Llamamos a los tres puntos intermedios del sistema D, E y F, y están indicados en la figura anterior. Los espectros son los siguientes:







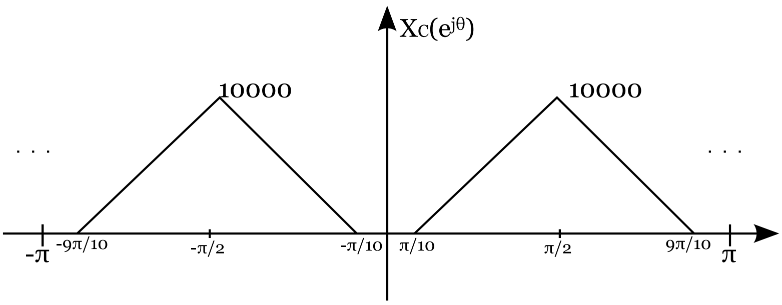
(d) La señal en C verifica

$$x_C[n] = x_F[n] \cdot x_B[n]$$

por lo tanto

$$X_C(e^{j\theta}) = X_F(e^{j\theta}) * X_B(e^{j\theta})$$

donde la convolución es circular. El resultado es



(e) Si no hay solapamiento o perdida de información en ninguna parte del sistema tendremos el resultado deseado. Los filtros evitan solapamiento en el muestreo, pero podría haber pérdida de información si el ancho de banda de las señales es mayor que la frecuencia de corte de los filtros. Debemos imponer las condiciones encontradas en (a).
En la conversión de frecuencia no hay problemas.
El otro punto de riesgo es al multiplicar las señales. Como los espectros se convolucionan entre sí, el ancho de banda final será la suma de ambos, $W_1 + W_2$. Si la frecuencia de muestreo final no es superior al doble de este ancho de banda, tendremos solapamiento y perderemos información.
La condiciones completas son:

$$W_1 \leq 8 \text{ kHz}, \qquad W_2 \leq 10 \text{ kHz} \quad \text{y} \quad W_1 + W_2 \leq 10 \text{ kHz}.$$

Problema 2

(a) $G_z(f) = A \cdot \Pi\left(\frac{f}{40 \text{ kHz}}\right)$

(b) Un proceso, para ser estacionario en sentido amplio, debe cumplir estas dos condiciones:

$$m_z = \mathbb{E}\{z(t)\} = K \text{ con } K \text{ constante}$$

$$r_z(t,s) = \mathbb{E}\{z(t)z(s)\} = R_z(t-s)$$

Por lo tanto $z_c(t)$ es estacionario en sentido amplio porque cumple $m_z = 0$ constante y $R_z(\tau) = A \cdot f_1 \cdot sinc(f_1\tau)$ con $f_1 = 40$ kHz .

(c) $R_z[m] = E\{z[n]z[n+m]\} = E\{z_c(nT_s) \cdot z_c((n+m)T_s)\} = R_{z_c}(mT_s)$

(d)

$$\sum_k |h_d[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k u[k] + \sum_{k=0}^{\infty} 0.9^{k-1} u[k-1] = \sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k + \sum_{k=1}^{\infty} 0.9^{k-1}$$

donde la segunda sumatoria se observa que es igual a la primera mediante el cambio de variable $l = k-1$ por lo que queda:

$$\sum_k |h_d[k]| = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k = 2 \cdot \frac{1}{1-0.9} = 20 < \infty$$

(e)

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1+e^{-j\theta}}{1-0.9e^{-j\theta}}$$

(f)

$$G_y(e^{j\theta}) = G_z(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2$$

$$G_y(e^{j\theta}) = \sigma_z^2 \left|\frac{1+e^{-j\theta}}{1-0.9e^{-j\theta}}\right|^2$$

(g)

$$\sigma_y^2 = \sigma_z^2 \sum_k |h[k]|^2 = \sigma_z^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (0.9^k u[k] + 0.9^{k-1} u[k-1])^2\right)$$

$$\sigma_z^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} 0.9^{2k} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 0.9^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 0.9^{2(k-1)}\right) = \sigma_z^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} 0.9^{2k} + (2 \cdot 0.9 + 1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 0.9^{2(k-1)}\right)$$

donde la segunda sumatoria se observa que es igual a la primera mediante el cambio de variable $l = k-1$ por lo que queda:

$$\sigma_y^2 = \sigma_z^2 \cdot (1 + 2 \cdot 0.9 + 1) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 0.9^{2k} = \sigma_z^2 \cdot 3.8 \cdot \frac{1}{1-0.9^2} = 20 \cdot \sigma_z^2$$

donde $\sigma_z^2 = A \cdot f_s$.