Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

2 de octubre de 2009

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

(a) Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada x y salida y.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

(c) Demostrar.

Problema 1 [15 pts.]

Se desea implementar un filtro pasabajos mediante el siguiente sistema:

$$y[n] = x[n] + \alpha x[n-1] + \beta y[n-1]$$

donde todos los coeficientes son reales, y el sistema es causal.

(a) Dar un diagrama de bloques que implemente este sistema con la mínima cantidad de elementos de retardo posible.

(b) Expresar la respuesta frecuencial $H(e^{j\theta})$ del sistema, y la respuesta en módulo cuadrática $|H(e^{j\theta})|^2$.

(c) Calcular la respuesta al impulso del filtro.

(d) Estudiar estabilidad del sistema en función de α y β.

El sistema deberá tener respuesta frecuencial 0 a frecuencia π, y además debe tener su caída -3dB en frecuencia $\pi/3$ (es decir, $\frac{|H_{\pi/3}|^2}{|H_0|^2} = 1/2$).

(e) Calcular α y β. Asegurar estabilidad del sistema.

El filtro diseñado se utiliza como el filtro pasabajos para construir un decimador de factor $M = 2$.

(f) Dar el diagrama completo del decimador. No es necesario corregir la amplitud del filtro.

(g) Si a la entrada del decimador hay una sinusoidal de frecuencia $\theta_0 = 5\pi/6$ y amplitud A, bosquejar el espectro a la salida, y calcular la amplitud de la señal de salida en función de A.

Problema 2 [15 pts.]

El proceso en tiempo discreto $x[n]$ se obtiene muestreando un proceso estacionario $x_c(t)$ en tiempo continuo de manera que $x[n] = x_c(nT_s)$, donde $|x_c(t)| < 1$.

(a) Probar que la autocorrelación del proceso en tiempo discreto es igual a la autocorrelación del proceso en tiempo continuo muestreada, es decir que $R_x[m] = R_{x_c}(mT_s)$.

Si la autocorrelación de $x_c(t)$ es

$$R_{x_c}(t) = 0.1[sinc(t/T_s) + \frac{1}{2}sinc((t - T_s)/T_s) + \frac{1}{2}sinc((t + T_s)/T_s)].$$

(b) Calcular la densidad espectral de potencia del proceso $x[n]$, $G_x(e^{j\theta})$. Verificar que se trabaja en las hipótesis del teorema del muestreo.

El proceso x_c es muestreado utilizando un cuantizador Q de 10 bits y posteriormente es filtrado con un fitro H lineal e invariante temporal, cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}(\delta[n + 1] + \delta[n - 1]).$$

(c) Dar el diagrama de bloques del sistema completo.

(d) Calcular la relación señal a ruido luego del cuantizador y antes del filtro H. Indicar las hipótesis de trabajo y el modelo utilizado para el ruido de cuantización

(e) Dar la potencia del ruido a la salida del sistema.

(f) Dar la relación señal a ruido a la salida del sistema. Comparar con la SNR previa al filtro H.

Solución

Pregunta

(a) Un sistema es estable BIBO si para toda entrada acotada, la salida es acotada.
Una señal x es acotada si existe una cota finita $B_x < \infty$ tal que $|x[n]| \leq B_x \forall n$.
(no alcanza decir $|x[n]| < \infty$: por ejemplo, $x[n] = n$ es siempre menor a infinito, pero no tiene cota finita)

(b) La CNS de estabilidad BIBO para SLIT es que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable: $\sum_k |x[k]| = S < \infty$

(c) Condición necesaria: H estable $\Rightarrow S < \infty$
El sistema es estable por hipótesis, entonces ante una entrada acotada, existe una cota finita para todos los valores de la salida.
En particular, tomamos una entrada que haga aparecer S como salida en algún instante.
Tomando $x[n] = \frac{h[-n]^*}{|h[-n]|}$ o 0 si $h[-n] = 0$. Evaluando la salida en $n = 0$, llegamos a $y[0] = S$.
La entrada está acotada por 1 y el sistema es estable BIBO, por lo tanto $y[n]$ tiene una cota finita. Entonces, S también tiene esa cota.
Condición suficiente: $S < \infty \Rightarrow H$ estable BIBO
Tomando una entrada genérica con cota B_x, buscamos una cota para la salida:

$$|y[n]| = |x * h| \leq \sum_k |h[k]||x[n-k]| \leq B_x.S$$

Entonces la salida está acotada por $B_x S$, que es una cota finita por hipótesis.

Problema 1

(a) Se pide la forma canónica, con 1 elemento de retardo. Los coeficientes no recursivos son 1 y α; el coeficiente recursivo es β.

(b)

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1 + \alpha e^{-j\theta}}{1 - \beta e^{-j\theta}}$$

$$|H(e^{j\theta})|^2 = \frac{1 + 2\alpha\cos\theta + \alpha^2}{1 - 2\beta\cos\theta + \beta^2}$$

(c)

$$H = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\theta}} + \frac{\alpha e^{-j\theta}}{1 - \beta e^{-j\theta}}$$

El primer término tiene respuesta al impulso $u[n]\beta^n$, y el segundo término $\alpha u[n-1]\beta^{n-1}$. Entonces:

$$h[n] = u[n]\beta^n + \alpha u[n-1]\beta^{n-1}$$

(d) $h[n]$ es sumable en módulo sólo si $|\beta| < 1$.
Como los coeficientes no recursivos no afectan a la estabilidad (salvo casos de cancelación cero-polo), la condición de estabilidad será la misma que para el sistema $y[n] = x[n] + \beta y[n-1]$, cuya respuesta al impulso es más fácil de sumar.
Otra forma de verlo es notar que salvo para algunos términos cerca de $n = 0$, $h[n]$ queda de la forma $(1 + \alpha/\beta)\beta^n$.

(e) El numerador de H se debe anular en $\theta = \pi$, por lo tanto debe ser $\alpha = 1$.
Planteando $\frac{|H_{\pi/3}|^2}{|H_0|^2}$ queda:

$$\frac{3(\beta^2 - 2\beta + 1)}{4(\beta^2 - \beta + 1)} = 1/2$$

Resolviendo la cuadrática resultante, queda $\beta = 2 \pm \sqrt{3}$. Se debe elegir la solución estable, es decir: $\beta = 2 - \sqrt{3}$.

(f) El decimador consiste de el filtro pasabajos H seguido de un compresor de factor $M = 2$ ($\downarrow 2$).
El pasabajos es para evitar solapamiento al submuestrear. En principio debería ser un pasabajos ideal con frecuencia de corte π/M. En este caso el filtro es de orden 1, por lo cual no es un buen filtro para esta aplicación y es de esperarse solapamiento.

(g) A la salida de H quedará sinusoidal atenuada por $H(e^{j5\pi/6})$. Luego del compresor va a aparecer esa sinusoidal pero ahora en $\pi/3$: debido al submuestreo, los componentes originales quedan en $\pm 5\pi/3$, y debido al solapamiento, esos componentes aparecen periodizados cada 2π, lo que los hace quedar en $\pm\pi/3$.
En cuanto a la amplitud, al tratarse de impulsos, se compensan los factores introducidos por el escalado del eje de frecuencias (M) y el introducido por el submuestreo ($1/M$).
Por lo tanto sale una sinusoidal de la misma frecuencia discreta y amplitud

$$A_{sal} = A.H(e^{j5\pi/6}) = \frac{A(2-\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})\beta} = \frac{A}{4+\sqrt{3}}.$$

Problema 2

(a)

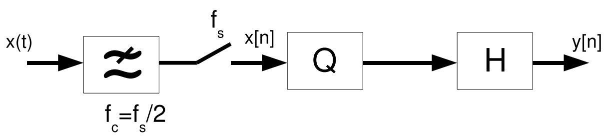
$$R_x[m] = E\{x[n]x[n+m]\} = E\{x_c(nT_s)x_c((n+m)(T_s))\} = R_{x_c}(mT_s)$$

(b)

$$G(e^{j\theta}) = F(R_x[m]) = F(0.1(\delta[n] + \frac{1}{2}(\delta[n+1] + \delta[n-1]))) = 0.1(1 + cos(\theta))$$

Observando el proceso, vemos que el ancho de banda es justo el correspondiente a $f_s/2$ por lo que estamos en las hipótesis del teorema.

(c)



(d) Del modelo de ruido y la autocorrelación de x se tiene:

$$S_{ruido} = \frac{\Delta^2}{12} \text{ con } \Delta = \frac{2}{2^{10}} = 2^{-9}$$
$$S_x = R_x[0] = 0.1$$

Planteando simplemente el cociente de las mismas obtenemos la SNR:

$$SNR = \frac{S_x}{S_{ruido}} = \frac{1.2}{2^{-18}} = 55dB$$

Ver hipótesis de trabajo y modelo de ruido en teórico.

(e) Aplicando un resultado visto en el curso para calcular la salida de un filtro para una entrada que es ruido blanco obtenemos:

$$S_{y_{ruido}} = S_{ruido} \sum |h[n]|^2 = \frac{\Delta^2}{12}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{3}{2}\frac{\Delta^2}{12} = \frac{\Delta^2}{8}$$

(f) Simplemente calculamos la potencia de señal a la salida del filtro y luego planteamos el cociente:

$$S_{y_x} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} G(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 0.1(1 + cos(\theta))^3 d\theta$$

$$S_{y_x} = 0.1\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} (1 + 3cos(\theta) + 3cos^2(\theta) + cos^3(\theta))\, d\theta = 0.25$$

$$SNR = \frac{S_{y_x}}{S_{y_{ruido}}} = \frac{0.25}{\frac{\Delta^2}{8}} = 57dB$$