Muestreo y Procesamiento Digital
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

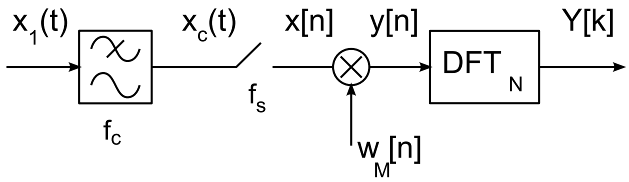
4 de diciembre de 2008

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [20 pts.]

Se utiliza el siguiente sistema para estimar el espectro de una señal $x_1(t)$ a partir de un tramo de la misma. Esta señal no es limitada en banda, pero sólo se desea conocer su espectro correctamente hasta la frecuencia $f_1 = 15000$ Hz.



H_1 es un filtro pasabajos ideal con frecuencia de corte f_c. f_s es la frecuencia de muestreo. $w_M[n]$ es una ventana de tamaño total $M+1$ muestras que multiplica a x para seleccionar un tramo. El bloque DFT calcula la transformada discreta de Fourier de N muestras.

(a) Calcular f_c y f_s de modo de usar la mínima frecuencia de muestreo posible. Justificar. Expresar y bosquejar los espectros $X_c(f)$ y $X(e^{j\theta})$.

(b) Si H fuera un filtro no ideal, ¿cómo se vería afectada la respuesta a la parte anterior? Justificar e ilustrar con un ejemplo.

Como ventana $w_M[n]$ se utiliza una ventana de Hann, que tiene su lóbulo principal de ancho $8\pi/M$.

(c) Bosquejar el espectro $W_M(e^{j\theta})$.

(d) Expresar el espectro $Y(e^{j\theta})$, y bosquejar ese espectro para el caso particular $M = 20$ y las siguientes señales de entrada al sistema:

1. $x_1(t)$ sinusoidal de frecuencia 10 kHz.

2. $x_1(t)$ seno cardinal de ancho de banda 5 kHz.

(e) A la salida del sistema se quieren poder distinguir claramente dos componentes sinusoidales en la entrada que estén a por lo menos 200 Hz de separación. A partir de lo visto en la parte anterior, calcular el mínimo tamaño de ventana M.

(f) Expresar la relación entre $Y[k]$ y el espectro de la señal enventanada $Y(e^{j\theta})$.

(g) Se quiere obtener medidas del espectro cada 10 Hz. Calcular N. Verificar que N y M sean compatibles.

Problema 1 [20 pts.]

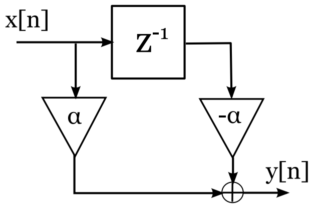
Se debe digitalizar un proceso $x(t)$ cuya densidad espectral de potencia es $G_x(f) = \frac{1}{22000}\Lambda(\frac{f}{11kHz})$, para ser procesado en tiempo discreto.

(a) Calcular la mínima frecuencia de muestreo necesaria para representar correctamente a x en tiempo discreto.

El proceso x es cuantizado luego de ser muestreado a la frecuencia hallada en la parte anterior. Se utiliza un cuantizador de 12 bits, y se asume que $x(t)$ varía entre -1 y 1.

(b) Calcular la relación señal a ruido debida al ruido de cuantización.

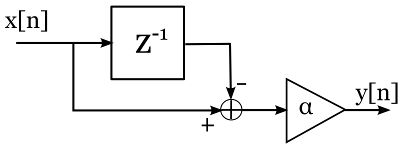
El proceso $x[n]$ es filtrado por un FIR como se muestra en la figura. Se utiliza una representación en punto flotante.



(c) Dar el diagrama de bloques del sistema completo, incluyendo todas las fuentes de error.

(d) Hallar la expresión de la salida del sistema $y[n]$ considerando sólo las fuentes de error en las operaciones.

Si se utliza la siguiente implementación del filtro:



(e) Dar el diagrama de bloques del sistema completo, incluyendo todas las fuentes de error.

(f) Hallar la expresión de la salida del sistema $y[n]$ considerando sólo las fuentes de error en las operaciones.

Se debe elegir una de las dos implementaciones de manera de tener la mayor relación señal a ruido a la salida posible.

(g) Calcular la autocorrelación del proceso $x[n]$ que surge de muestrear $x(t)$.

(h) Dar una expresión para la potencia del ruido en la salida para ambas implementaciones. Compararlas y elegir la implementación que brinde la mayor relación señal a ruido.

Problema 2 [20 pts.]

Se debe diseñar un filtro IIR con un único elemento de retardo. Este filtro funcionará como un pasaaltos, con las siguientes condiciones:

- Deberá tener ganancia 0.1 en frecuencia 0.
- Deberá tener ganancia 10 en frecuencia π.
- Tendrá un cero en $z = 0.9$.
- Todos sus coeficientes serán reales

(a) Determinar el filtro que cumpla las condiciones indicadas.

(b) Analizar la estabilidad del filtro obtenido.

Ahora se desea tener ganancia 10000 en $\theta = \pi$.

(c) Determinar los nuevos coeficientes del filtro. ¿Hacia qué punto se mueve el polo al aumentar la ganancia en π?

Al implementar el sistema, los coeficientes del filtro diseñado deben discretizarse, por lo que los valores realmente utilizados serán diferentes a los del diseño.

(d) Calcular el error en la discretización de los coeficientes máxima admitida para que el nuevo filtro sea estable.

Se considera el escalón como entrada: $x[n] = u[n]$.

(e) Hallar la salida del sistema para esta entrada.

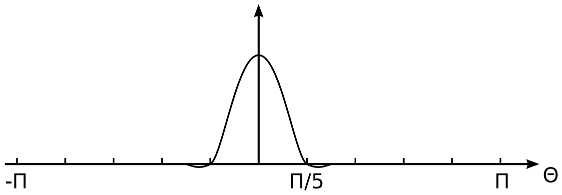
Solución

Pregunta

(a) Como el filtro pasabajos es ideal, alcanza con limitar en banda la entrada a la banda en que se quiere analizar, y cumplir estrictamente la condición del teorema del muestreo. Es decir: $f_c = 15000$ Hz, y $f_s = 30000$ Hz.
Filtrado: $X_c(f) = X_1(f)\Pi(f/2f_c)$; muestreo: $X(e^{j\theta}) = \sum_k X_c(\theta f_s/2\pi - kf_s)$.

(b) Por una parte, habrá que aumentar la frecuencia de corte del filtro para que su respuesta frecuencial sea lo suficientemente constante hasta 15000 Hz. Por otro lado, habrá que aumentar la frecuencia de muestreo para evitar solapamiento. Por ejemplo, si la banda de transición del filtro fuera entre 15000 y 16000 Hz, la frecuencia de muestreo deberá ser superior a 31000 Hz (si se acepta solapamiento por encima de 15000 Hz en el análisis), o, más razonablemente, superior a 32000 Hz para no introducir solapamiento.

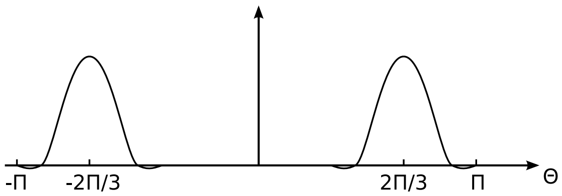
(c)

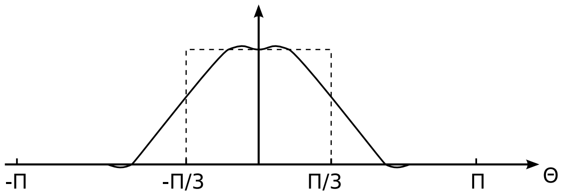


(d) El espectro de la señal enventanada será la convolución circular del espectro de la señal con la transformada de Fourier de la ventana:

$$Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta}) \otimes W_M(e^{j\theta})$$

Para $M = 20$, el lóbulo principal tendrá ancho $2\pi/5$. Las alturas de los espectros llevan un factor $1/2$ en amplitud con respecto a la señal sin enventanar (la transformada de la ventana vale $1/2$ en frecuencia 0).
10 kHz se corresponde a $\theta = 2\pi/3$, y 5 kHz se corresponde con $\theta = \pi/3$.





(e) El espectro Y tendrá, centrado en cada uno de sus componentes originales, una dispersión de medio ALP hacia cada lado. Para poder distinguir componentes a 200 Hz de separación, se puede poner como criterio que esa distancia se corresponda a un ALP. El ALP visto en tiempo continuo es de $f_s/(2\pi)8\pi/M = 4f_s/M$. Para que ALP = 200 Hz, deberá ser $M = f_s/50 = 600$.

(f) La transformada discreta de Fourier da N muestras equiespaciadas del espectro de $y[n]$:

$$Y[k] = Y(e^{jk2\pi/N})$$

(g) La DFT da muestras del espectro cada f_s/N, por lo tanto debe ser $N = f_s/10Hz = 3000$. Se verifica que $N > M$: las muestras en la DFT tienen que ser por lo menos del largo de la ventana para que $Y[k]$ represente sin ambigüedad a $Y(e^{j\theta})$.

Problema 1

(a) La mínima frecuencia para cumplir con el teorema de muestreo es $22kHz$.

(b) La potencia del ruido debido al error de cuantización es:

$$\sigma_e^2 = \Delta^2/12$$

donde

$$\Delta = 2^{-B+1}$$

.
Por lo tanto la potencia del ruido será:

$$\sigma_e^2 = 2^{-24}/3$$

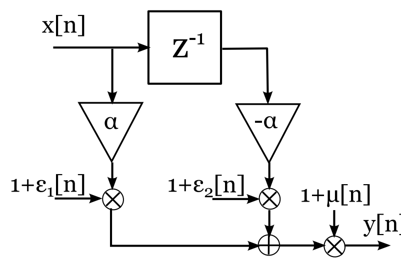
Es posible calcular la potencia del proceso $x[n]$ ya que se tiene su densidad espectral de potencia:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2} \times 1 \times 2\pi = \frac{1}{2}$$

Por lo que la relación señal a ruido es :

$$SNR = 3 * 2^{23} = 74dB$$

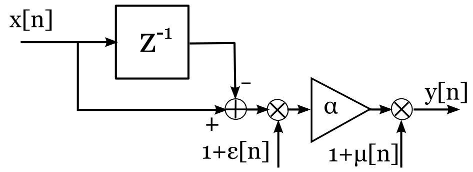
(c)



(d)

$$y[n] = \alpha(x[n](1+\epsilon_1[n]) - x[n-1](1+\epsilon_2[n]))(1+\mu[n])$$

(e)



(f)

$$y[n] = \alpha(x[n] - x[n-1])(1 + \epsilon[n])(1 + \mu[n])$$

(g) La autocorrelación del proceso x es la antitransformada de su densidad espectral de potencia:

$$R_x[n] = \frac{1}{2}.sinc^2(n/2)$$

(h) Para la primera implementación:

$$y[n] = \alpha(x[n](1 + \epsilon_1[n]) - x[n-1](1 + \epsilon_2[n]))(1 + \mu[n])$$

$$y[n] = \alpha(x[n]-x[n-1]+\epsilon_1[n]x[n]-\epsilon_2[n]x[n-1]+x[n]\mu[n]-x[n-1]\mu[n]+\epsilon_1[n]x[n]\mu[n]-\epsilon_2[n]x[n-1]\mu[n])$$

Utilizando independencia y media nula de las fuentes de error se tiene:

$$E\{y[n]^2\} = \alpha^2 E((2 + \epsilon_1^2[n] + \epsilon_2^2[n] + 2\mu^2[n] + \mu^2[n]\epsilon^2[n]))R_x[0] - \alpha^2 2E(1 + \mu^2[n])R_x[1]$$

despreciando los términos cuadráticos:

$$E\{y[n]^2\} = \alpha^2(2(1 + \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\mu^2)R_x[0] - (1 + \sigma_\mu^2)R_x[1])$$

$$E\{y[n]^2\} = \alpha^2(2(1 + 2\sigma_\epsilon^2)R_x[0] - (1 + \sigma_\epsilon^2)R_x[1])$$

Siendo la potencia del ruido:

$$N_1 = 2\alpha^2\sigma_\epsilon^2(2R_x[0] - R_x[1])$$

En la segunda implementación:

$$y[n] = \alpha(x[n] - x[n-1])(1 + \epsilon[n])(1 + \mu[n])$$

$$E\{y[n]^2\} = \alpha^2 E((x[n]-x[n-1]+\epsilon[n]x[n]-\epsilon[n]x[n-1]+x[n]\mu[n]-x[n-1]\mu[n]+\epsilon[n]x[n]\mu[n]-\epsilon[n]x[n-1]\mu[n])^2)$$

$$E\{y[n]^2\} = \alpha^2(2(1 + \epsilon^2[n] + \mu^2[n] + \mu^2[n]\epsilon^2[n])(R_x[0] - R_x[1]))$$

Utilizando independencia y media nula de las fuentes de error, se tiene:

$$E\{y[n]^2\} = \alpha^2(2(1 + \epsilon^2[n] + \mu^2[n] + \mu^2[n]\epsilon^2[n])(R_x[0] - R_x[1]))$$

despreciando los términos de segundo orden:

$$E\{y[n]^2\} = \alpha^2(2(1 + \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\mu^2)(R_x[0] - R_x[1]))$$

Siendo la potencia del ruido:

$$N_1 = 4\alpha^2\sigma_\epsilon^2(R_x[0] - R_x[1])$$

La autocorrelación de x es positiva, por lo que la segunda implementación apaprece una potencia de ruido menor, ya que aparecen restados más términos pesados por la autocorrelación en 1.

$$N_1 - N_2 = 2\alpha^2\sigma_\epsilon^2 R_x[1] > 0$$

Problema 2

(a) La respuesta del filtro será de la forma $H(z) = \alpha\frac{1+\beta z^{-1}}{1+\gamma z^{-1}}$, que con la restricción del cero en $z = 0.9$ resulta en $H(z) = \alpha\frac{1-0.9z^{-1}}{1+\gamma z^{-1}}$.
Imponiendo las condiciones de ganancia se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\alpha\frac{1-0.9}{1+\gamma} = 0.1 \Leftrightarrow \alpha = 1+\gamma \tag{1}$$

$$\alpha\frac{1+0.9}{1-\gamma} = 10 \Leftrightarrow 1.9(1+\gamma) = 10(1-\gamma) \tag{2}$$

De donde $\gamma = 81/119$ y $\alpha = 200/119$, por lo que el filtro resultante es

$$H(z) = \frac{200}{119}\frac{1-0.9z^{-1}}{1+\frac{81}{119}z^{-1}}$$

(b) El polo se encuentra en $z = \frac{-81}{119}$, que está dentro del circulo unidad. El filtro es causal por consturcción, por lo tanto es estable.

(c) Con un planteo idéntico al de la primera parte, los nuevos coeficientes resultan $\gamma = \frac{9998.1}{10001.9} \approx 0.99962$ y $\alpha \approx 1.99962$. El polo se desplaza hacia la izquierda, acercándose a $z = -1$, lo cual era de esperarse ya que para tener una alta ganancia cerca de $\theta = \pi$ el polo debe estar cerca de $z = e^{j\pi}$.

(d) El único coeficiente que influye en la estabilidad del filtro es γ, cuyo valor debe cumplir $-1 < \gamma < 1$ para garantizar la estabilidad. En este caso entonces, el error máximo ε que se puede admitir en la discretización es $\varepsilon = 1 - \gamma \approx 0,00038$

(e) $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$. Planteando $Y = H \cdot X$, y separando en fracciones simples, queda:

$$Y(z) = \alpha\left[\frac{\frac{\gamma-\beta}{1+\gamma}}{1+\gamma z^{-1}} + \frac{\frac{1+\beta}{1+\gamma}}{1-z^{-1}}\right]$$

Sustituyendo $\alpha = H(e^{j0})\frac{1+\gamma}{1+\beta}$ y antitransformando los 2 términos:

$$y[n] = H(e^{j0})u[n](1 + \frac{\gamma-\beta}{1+\gamma}(-1)^n\gamma^n)$$

Se puede ver que la respuesta al escalón va a estar amortiguada muy lentamente a medida que el polo se acerca al círculo unidad.
Además, en régimen, sólo queda la respuesta en continua.