# Muestreo y Procesamiento Digital
# Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

4 de octubre de 2008

**Indicaciones:**

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

## Pregunta [10 pts.]

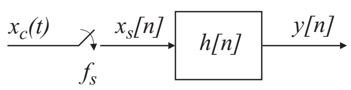
(a) Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada $x$ y salida $y$.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

(c) Demostrar.

## Problema 1 [15 pts.]

Sean $x_s[n]$ una secuencia obtenida a partir de las muestras de un proceso estocástico real, estacionario de tiempo continuo $x_c(t)$, muestreado con una frecuencia $f_s = 1/T_s$. Las muestras $x_s[n]$ son filtradas con un filtro discreto de respuesta frecuencial $H(e^{j\theta})$.




(a) Hallar una expresión para la autocorrelación de $x_s$, $R_{x_s}[n]$, en función de la autocorrelación de $x_c(t)$, $R_{x_c}(\tau)$

(b) Sea $G_{x_c}(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$ la densidad espectral de $x_c(t)$. Hallar todas las posibles frecuencias de muestreo de forma que no haya solapamiento en la densidad espectral de $x_s[n]$, $G_{x_s}(e^{j\theta})$. Bosquejar $G_{x_s}(e^{j\theta})$ indicando las características (altura, frecuencias particulares, etc.)

(c) Hallar $R_{x_s}[n]$, en las condiciones de la parte 2

(d) Dar una expresión para la densidad espectral de potencia de la señal de salida del filtro, $y[n]$, $G_y(e^{j\theta})$.

(e) Hallar en función de los parámetros del problema la autocorrelación de la señal de salida, $R_y[n]$, cuando el filtro es el definido por la ecuación de recurrencia: $y[n] = x_s[n] - a\,x_s[n-1]$.

(f) Hallar en función de los parámetros del problema la autocorrelación de la señal de salida, $R_y[n]$, cuando el filtro tiene transferencia $H(e^{j\theta}) = \Pi\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)$, con $\theta_0 f_s = \omega_0$.

## Problema 2 [15 pts.]

Se considera la señal de tiempo continuo $x(t)$:

$$x(t) = \mathrm{sinc}^2(\mathrm{f_1 t})\cos(2\pi \mathrm{f_1 t}).$$

(a) Hallar el espectro de $x(t)$.

La señal $x(t)$ es muestreada para ser procesada en un sistema de tiempo discreto.

(b) Hallar la mínima frecuencia de muestreo necesaria para representar correctamente a $x(t)$.

(c) Hallar el espectro de la señal en tiempo discreto $x[n] = x(nT_s)$ para la frecuencia de muestreo hallada en la parte anterior.

La señal se procesa filtrándola con un filtro SLIT $H$ con respuesta al impulso:

$$h[n] = 0.5\delta[n-1] + \delta[n] + 0.5\delta[n+1]$$

(d) Hallar la respuesta en frecuencia del fltro $H$.

(e) Hallar y bosquejar el espectro a la salida del filtro.

Se desea aumentar la frecuencia de muestreo al doble, implementando este aumento de frecuencia en tiempo discreto.

(f) Dar el diagrama de bloques del sistema completo si se aumenta la frecuencia de muestreo antes del filtro H. Bosquejar el espectro a la salida.

(g) Dar el diagrama de bloques del sistema completo si se aumenta la frecuencia de muestreo después del filtro H. Bosquejar el espectro a la salida. ¿Es igual al espectro de la parte anterior?

# Solución

## Pregunta

**(a)** Un sistema es estable BIBO si para toda entrada acotada, la salida es acotada.
Una señal $x$ es acotada si existe una cota finita $B_x < \infty$ tal que $|x[n]| \leq B_x \forall n$.
(no alcanza decir $|x[n]| < \infty$: por ejemplo, $x[n] = n$ es siempre menor a infinito, pero no tiene cota finita)

**(b)** La CNS de estabilidad BIBO para SLIT es que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable: $\sum_k |x[k]| = S < \infty$

**(c)** Condición necesaria: $H$ estable $\Rightarrow S < \infty$
El sistema es estable por hipótesis, entonces ante una entrada acotada, existe una cota finita para todos los valores de la salida.
En particular, tomamos una entrada que haga aparecer $S$ como salida en algún instante.
Tomando $x[n] = \frac{h[-n]^*}{|h[-n]|}$ o 0 si $h[-n] = 0$. Evaluando la salida en $n = 0$, llegamos a $y[0] = S$.
La entrada está acotada por 1 y el sistema es estable BIBO, por lo tanto $y[n]$ tiene una cota finita. Entonces, $S$ también tiene esa cota.
Condición suficiente: $S < \infty \Rightarrow H$ estable BIBO
Tomando una entrada genérica con cota $B_x$, buscamos una cota para la salida:

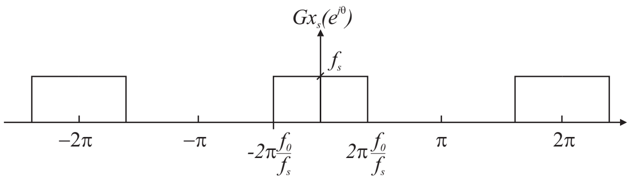
$$|y[n]| = |x * h| \leq \sum_k |h[k]||x[n-k]| \leq B_x.S$$

Entonces la salida está acotada por $B_x S$, que es una cota finita por hipótesis.

## Problema 1

**(a)** $R_{x_s}[n] = E\{x_s[m]x_s[m+n]\} = E\{x_c(mT_s)x_c((m+n)T_s)\} = R_{x_c}(nT_s)$

**(b)** $R_{x_c}(\tau)$ es una señal de banda acotada en $f_o$ ($w_o = 2\pi f_o$). Según el teorema de muestreo, para no tener solapamiento debemos utilizar una frecuencia de muestreo $f_s \geq 2f_o$.




**(c)** $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s \Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ donde $\theta_o = 2\pi\frac{f_o}{f_s}$

$$R_{x_s}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_{x_s}(e^{j\theta})e^{jn\theta}d\theta = \frac{f_s}{2\pi}\int_{-\theta_o}^{\theta_o} e^{jn\theta}d\theta$$

$$= \frac{f_s}{2\pi}\left.\frac{e^{jn\theta}}{jn}\right|_{-\theta_o}^{\theta_o} = f_s\frac{e^{jn\theta_o} - e^{-jn\theta_o}}{j2\pi n} = f_s\frac{sen(\theta_o n)}{\pi n}$$

**(d)** $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta})$

**(e)**

$$R_y[n] = E\{y[m]y[m+n]\} =$$
$$E\{(x_s[m] - ax_s[m-1])(x_s[m+n] - ax_s[m+n-1])\} =$$
$$E\{x_s[m]x_s[m+n]\} - aE\{x_s[m-1]x_s[m+n]\} -$$
$$-aE\{x_s[m]x_s[m+n-1]\} + a^2E\{x_s[m-1]x_s[m+n-1]\}$$
$$= (1+a^2)R_{x_s}[n] - a(R_{x_s}[n+1]) + R_{x_s}[n-1])$$
$$R_y[n] = (1+a^2)f_s\frac{sen(\theta_o n)}{\pi n} - a\,f_s\left(\frac{sen(\theta_o(n+1))}{\pi(n+1)} + \frac{sen(\theta_o(n-1))}{\pi(n-1)}\right)$$

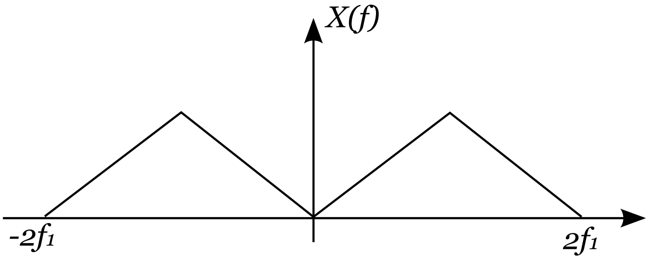
**(f)** $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s\Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ con lo que $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s\Pi\left(\frac{\theta}{\theta_o}\right)$ y tiene la misma forma que la densidad espectral de potencia con que trabajamos en la parte 3. Si repetimos la cuentas obtenemos:

$$R_y[n] = f_s\frac{sen\left(\frac{\theta_o}{2}n\right)}{\pi n}$$

# Problema 2

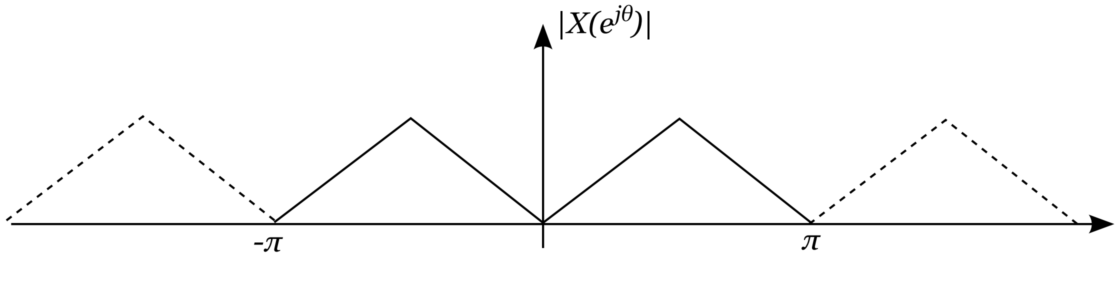
**(a)**

$$X(f) = \Delta\left(\frac{f-f_1}{f_1}\right) + \Delta\left(\frac{f+f_1}{f_1}\right)$$



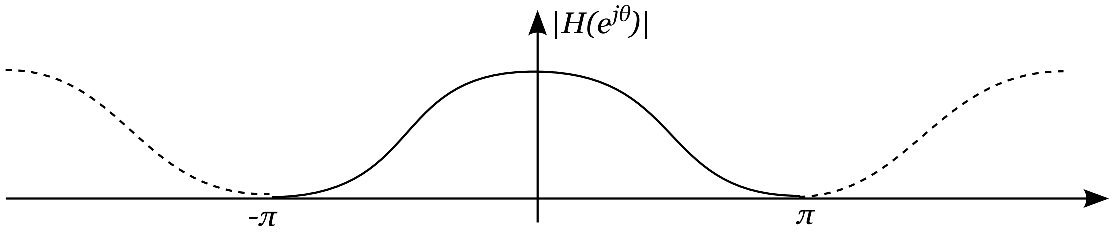

**(b)** La mínima frecuencia de muestreo es igual al doble del ancho de banda de $x(t)$, es decir $2 \times 2f_1$.
La mínima frecuencia de muestreo es $f_s = 4f_1$.

**(c)** El espectro de la señal $x[n]$ se muestra en la figura.



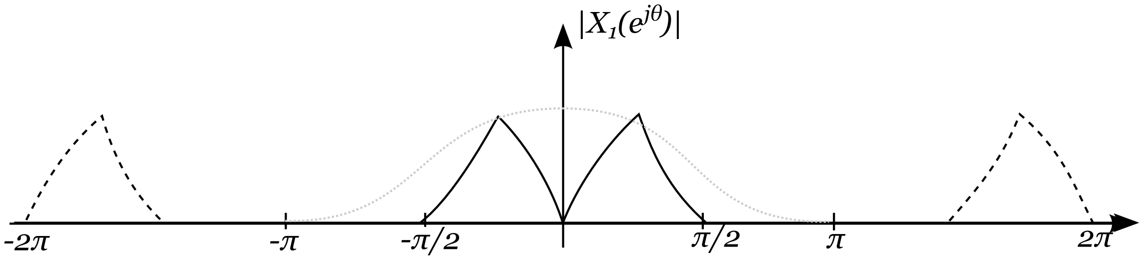
**(d)**

$$H(e^{j\theta}) = 1 + \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = 1 + cos(\theta)$$




**(f)** En el caso en que se aumenta la frecuencia de muestreo antes del filtro, se obtiene el siguiente espectro:

$$X(f) = 8f_1(1 + \cos(\theta)) \left( \Delta\left(\frac{\theta - \pi/4}{\pi/4}\right) + \Delta\left(\frac{\theta + \pi/4}{\pi/4}\right) \right)$$




**(g)**

$$X(f) = 8f_1(1 + \cos(2\theta)) \left( \Delta\left(\frac{\theta - \pi/4}{\pi/4}\right) + \Delta\left(\frac{\theta + \pi/4}{\pi/4}\right) \right)$$