

Muestreo y Procesamiento Digital

Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

4 de octubre de 2008

Indicaciones:

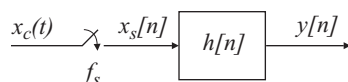
- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

- Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada x y salida y .
- Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.
- Demostrar.

Problema 1 [15 pts.]

Sean $x_s[n]$ una secuencia obtenida a partir de las muestras de un proceso estocástico real, estacionario de tiempo continuo $x_c(t)$, muestreado con una frecuencia $f_s = 1/T_s$. Las muestras $x_s[n]$ son filtradas con un filtro discreto de respuesta frecuencial $H(e^{j\theta})$.



- Hallar una expresión para la autocorrelación de x_s , $R_{x_s}[n]$, en función de la autocorrelación de $x_c(t)$, $R_{x_c}(\tau)$
- Sea $G_{x_c}(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$ la densidad espectral de $x_c(t)$. Hallar todas las posibles frecuencias de muestreo de forma que no haya solapamiento en la densidad espectral de $x_s[n]$, $G_{x_s}(e^{j\theta})$. Bosquejar $G_{x_s}(e^{j\theta})$ indicando las características (altura, frecuencias particulares, etc.)
- Hallar $R_{x_s}[n]$, en las condiciones de la parte 2

- (d) Dar una expresión para la densidad espectral de potencia de la señal de salida del filtro, $y[n]$, $G_y(e^{j\theta})$.
- (e) Hallar en función de los parámetros del problema la autocorrelación de la señal de salida, $R_y[n]$, cuando el filtro es el definido por la ecuación de recurrencia: $y[n] = x_s[n] - a x_s[n-1]$.
- (f) Hallar en función de los parámetros del problema la autocorrelación de la señal de salida, $R_y[n]$, cuando el filtro tiene transferencia $H(e^{j\theta}) = \Pi\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)$, con $\theta_0 f_s = \omega_0$.

Problema 2 [15 pts.]

Se considera la señal de tiempo continuo $x(t)$:

$$x(t) = \text{sinc}^2(f_1 t) \cos(2\pi f_1 t).$$

- (a) Hallar el espectro de $x(t)$.

La señal $x(t)$ es muestreada para ser procesada en un sistema de tiempo discreto.

- (b) Hallar la mínima frecuencia de muestreo necesaria para representar correctamente a $x(t)$.
- (c) Hallar el espectro de la señal en tiempo discreto $x[n] = x(nT_s)$ para la frecuencia de muestreo hallada en la parte anterior.

La señal se procesa filtrándola con un filtro SLIT H con respuesta al impulso:

$$h[n] = 0.5\delta[n-1] + \delta[n] + 0.5\delta[n+1]$$

- (d) Hallar la respuesta en frecuencia del filtro H .
- (e) Hallar y bosquejar el espectro a la salida del filtro.

Se desea aumentar la frecuencia de muestreo al doble, implementando este aumento de frecuencia en tiempo discreto.

- (f) Dar el diagrama de bloques del sistema completo si se aumenta la frecuencia de muestreo antes del filtro H . Bosquejar el espectro a la salida.
- (g) Dar el diagrama de bloques del sistema completo si se aumenta la frecuencia de muestreo después del filtro H . Bosquejar el espectro a la salida. ¿Es igual al espectro de la parte anterior?

Solución

Pregunta

(a) Un sistema es estable BIBO si para toda entrada acotada, la salida es acotada. Una señal x es acotada si existe una cota finita $B_x < \infty$ tal que $|x[n]| \leq B_x \forall n$. (no alcanza decir $|x[n]| < \infty$: por ejemplo, $x[n] = n$ es siempre menor a infinito, pero no tiene cota finita)

(b) La CNS de estabilidad BIBO para SLIT es que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable: $\sum_k |x[k]| = S < \infty$

(c) Condición necesaria: H estable $\Rightarrow S < \infty$

El sistema es estable por hipótesis, entonces ante una entrada acotada, existe una cota finita para todos los valores de la salida.

En particular, tomamos una entrada que haga aparecer S como salida en algún instante.

Tomando $x[n] = \frac{h[-n]^*}{|h[-n]|}$ o 0 si $h[-n] = 0$. Evaluando la salida en $n = 0$, llegamos a $y[0] = S$.

La entrada está acotada por 1 y el sistema es estable BIBO, por lo tanto $y[n]$ tiene una cota finita. Entonces, S también tiene esa cota.

Condición suficiente: $S < \infty \Rightarrow H$ estable BIBO

Tomando una entrada genérica con cota B_x , buscamos una cota para la salida:

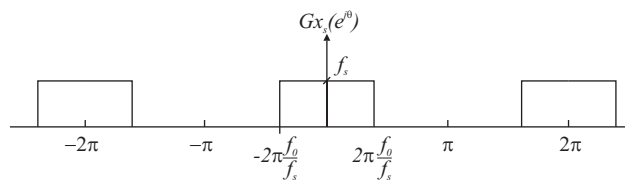
$$|y[n]| = |x * h| \leq \sum_k |h[k]| |x[n-k]| \leq B_x \cdot S$$

Entonces la salida está acotada por $B_x S$, que es una cota finita por hipótesis.

Problema 1

(a) $R_{x_s}[n] = E\{x_s[m]x_s[m+n]\} = E\{x_c(mT_s)x_c((m+n)T_s)\} = R_{x_c}(nT_s)$

(b) $R_{x_c}(\tau)$ es una señal de banda acotada en f_o ($w_o = 2\pi f_o$). Según el teorema de muestreo, para no tener solapamiento debemos utilizar una frecuencia de muestreo $f_s \geq 2f_o$.



(c) $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s \Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ donde $\theta_o = 2\pi \frac{f_o}{f_s}$

$$\begin{aligned} R_{x_s}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_{x_s}(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta = \frac{f_s}{2\pi} \int_{-\theta_o}^{\theta_o} e^{jn\theta} d\theta \\ &= \frac{f_s}{2\pi} \frac{e^{jn\theta}}{jn} \Big|_{-\theta_o}^{\theta_o} = f_s \frac{e^{jn\theta_o} - e^{-jn\theta_o}}{j2\pi n} = f_s \frac{\text{sen}(\theta_o n)}{\pi n} \end{aligned}$$

(d) $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta})$

(e)

$$\begin{aligned} R_y[n] &= E\{y[m]y[m+n]\} = \\ &E\{(x_s[m] - ax_s[m-1])(x_s[m+n] - ax_s[m+n-1])\} = \\ &E\{x_s[m]x_s[m+n]\} - aE\{x_s[m-1]x_s[m+n]\} - \\ &\quad - aE\{x_s[m]x_s[m+n-1]\} + a^2E\{x_s[m-1]x_s[m+n-1]\} \\ &= (1 + a^2)R_{x_s}[n] - a(R_{x_s}[n+1] + R_{x_s}[n-1]) \\ R_y[n] &= (1 + a^2)f_s \frac{\text{sen}(\theta_o n)}{\pi n} - a f_s \left(\frac{\text{sen}(\theta_o(n+1))}{\pi(n+1)} + \frac{\text{sen}(\theta_o(n-1))}{\pi(n-1)} \right) \end{aligned}$$

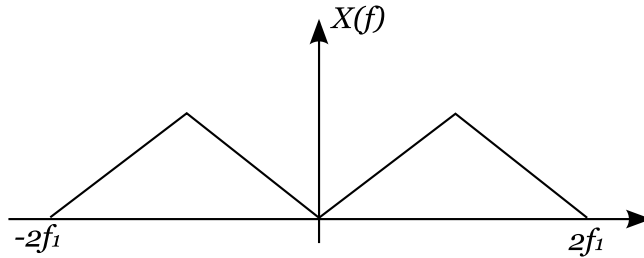
(f) $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s \Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ con lo que $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s \Pi\left(\frac{\theta}{\theta_o}\right)$ y tiene la misma forma que la densidad espectral de potencia con que trabajamos en la parte 3. Si repetimos la cuentas obtenemos:

$$R_y[n] = f_s \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta_o}{2} n\right)}{\pi n}$$

Problema 2

(a)

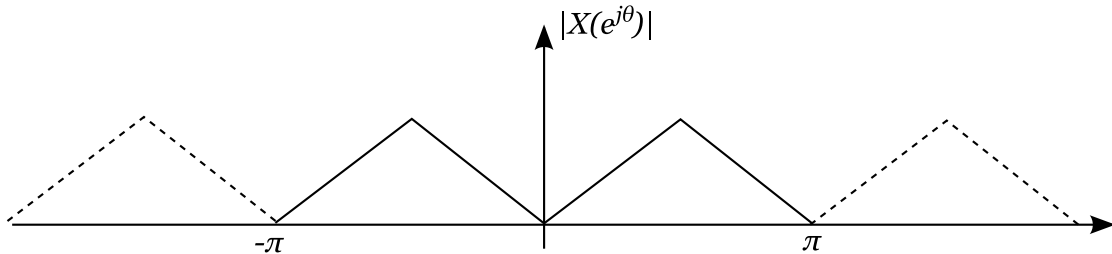
$$X(f) = \Delta \left(\frac{f - f_1}{f_1} \right) + \Delta \left(\frac{f + f_1}{f_1} \right)$$



(b) La mínima frecuencia de muestreo es igual al doble del ancho de banda de $x(t)$, es decir $2 \times 2f_1$.

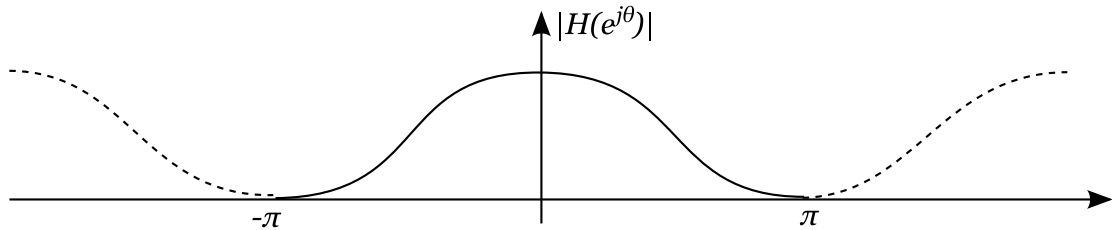
La mínima frecuencia de muestreo es $f_s = 4f_1$.

(c) El espectro de la señal $x[n]$ se muestra en la figura.



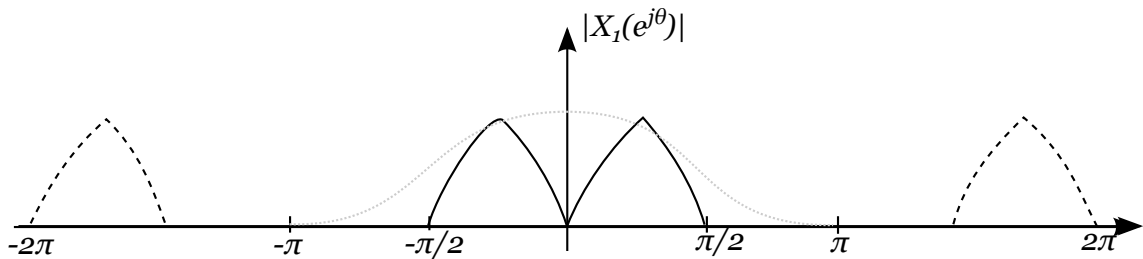
(d)

$$H(e^{j\theta}) = 1 + \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = 1 + \cos(\theta)$$



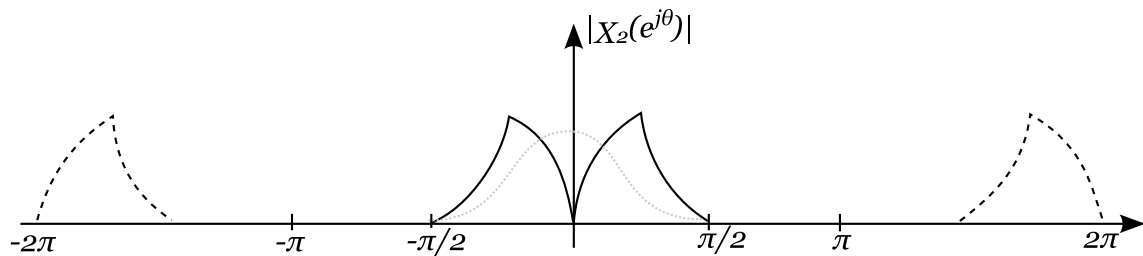
(f) En el caso en que se aumenta la frecuencia de muestreo antes del filtro, se obtiene el siguiente espectro:

$$X(f) = 8f_1(1 + \cos(\theta)) \left(\Delta \left(\frac{\theta - \pi/4}{\pi/4} \right) + \Delta \left(\frac{\theta + \pi/4}{\pi/4} \right) \right)$$



(g)

$$X(f) = 8f_1(1 + \cos(2\theta)) \left(\Delta \left(\frac{\theta - \pi/4}{\pi/4} \right) + \Delta \left(\frac{\theta + \pi/4}{\pi/4} \right) \right)$$



No, no son iguales, en este segundo caso se atenúa más a las frecuencias más altas.