Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

9 de octubre de 2007

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

(a) Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada x y salida y.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

(c) Demostrar.

Problema 1 [15 pts.]

Se considera un filtro digital lineal y causal dado por la siguiente ecuación de recurrencia:

$$y[n] + \beta y[n-1] = x[n] + \alpha x[n-1] + x[n-2]$$

donde la entrada es $x[n]$ y la salida $y[n]$.

(a) Demostrar que el filtro digital se puede descomponer como dos filtros en cascada, es decir un filtro recursivo H_1 seguido por un filtro no recursivo H_2 dados por las ecuaciones:

- $H_1 : k[n] + \beta k[n-1] = x[n]$
- $H_2 : y[n] = k[n] + \alpha k[n-1] + k[n-2]$

(b) Hallar $h_1[n]$ y $h_2[n]$, las respuestas impulsivas de los filtros H_1 y H_2 respectivamente.

(c) Hallar la respuesta al impulso del filtro digital completo.

(d) Estudiar la estabilidad del filtro digital completo al variar los parámetros α y β.

Se considera ahora un sistema formado por un muestreador que trabaja a frecuencia $f_s = 90\text{kHz}$, seguido por el filtro digital analizado en las partes anteriores.

(e) Calcular α y β para que cuando se ingresa al sistema con la señal $x_1(t) = \cos(2\pi 60000t)$, la salida en régimen sea nula, y cuando al sistema ingresa una señal constante, la ganancia del filtro digital sea $+2$.

En este punto se estudiarán los efectos de la cuantización en el muestreo. Se modela como un cuantificador de 8 bits colocado entre el muestreador y el filtro digital. El cuantificador está diseñado para trabajar con señales que toman valores en el intervalo $[-1, 1]$.

(f) Dar un modelo para la distorsión introducida por el cuantificador indicando bajo qué hipótesis es válido.

(g) Hallar la potencia del ruido de cuantización a la salida del filtro digital.

Nota: Puede utilizarse el siguiente resultado (sin dar una demostración): en un SLIT en tiempo discreto real y estable, la respuesta a una entrada sinusoidal del tipo $x[n] = \cos(\theta_0 n)$ es $y[n] = |H(e^{j\theta_0})| \cos(\theta_0 n + \Phi[H(e^{j\theta_0})])$.

Problema 2 [15 pts.]

(a) Dar la relación entre las transformadas de Fourier de: una señal de tiempo continuo $x_c(t)$, y de la señal $x[n] = x_c(nT_s)$, muestras de x_c tomadas a frecuencia $f_s = 1/T_s$. No es necesario presentar una demostración.

Sea $a(t)$ un proceso estacionario en sentido amplio con autocorrelación $R_a(\tau)$ y densidad espectral de potencia $G_a(f)$.
Sea $x[n] = a(nT_s)$ muestras de a tomadas a frecuencia $f_s = 1/T_s$.

(b) Mostrar que x es un proceso estacionario en sentido amplio y calcular su autocorrelación, $R_x[m]$.

(c) Expresar la densidad espectral $G(e^{j\theta})$ de x en función de la densidad espectral de a.

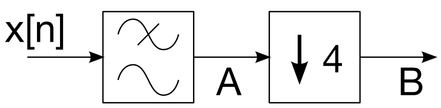
Se considera de ahora en más:

- $T_s = 1\text{ms}$
- $G_a(f) = 0.001\,\Pi(f/1200\,\text{Hz})$

(d) Calcular y graficar la densidad espectral de x.

(e) Calcular la potencia de x.

La señal x es decimada a una frecuencia de muestreo 4 veces menor, de la siguiente manera:



(f) Dar la ganancia y frecuencia de corte del filtro pasabajos (considerar un pasabajos ideal).

(g) Calcular la potencia de la señal en el punto A, luego del filtro pasabajos.

(h) Calcular la potencia en el punto B, a la salida del compresor.

Solución

Pregunta

(a) Un sistema es estable BIBO si para toda entrada acotada, la salida es acotada.
Una señal x es acotada si existe una cota finita $B_x < \infty$ tal que $|x[n]| \leq B_x \forall n$.
(no alcanza decir $|x[n]| < \infty$: por ejemplo, $x[n] = n$ es siempre menor a infinito, pero no tiene cota finita)

(b) La CNS de estabilidad BIBO para SLIT es que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable: $\sum_k |x[k]| = S < \infty$

(c) Condición necesaria: H estable $\Rightarrow S < \infty$
El sistema es estable por hipótesis, entonces ante una entrada acotada, existe una cota finita para todos los valores de la salida.
En particular, tomamos una entrada que haga aparecer S como salida en algún instante.
Tomando $x[n] = \frac{h[-n]^*}{|h[-n]|}$ o 0 si $h[-n] = 0$. Evaluando la salida en $n = 0$, llegamos a $y[0] = S$.
La entrada está acotada por 1 y el sistema es estable BIBO, por lo tanto $y[n]$ tiene una cota finita. Entonces, S también tiene esa cota.
Condición suficiente: $S < \infty \Rightarrow H$ estable BIBO
Tomando una entrada genérica con cota B_x, buscamos una cota para la salida:

$$|y[n]| = |x * h| \leq \sum_k |h[k]||x[n-k]| \leq B_x.S$$

Entonces la salida está acotada por $B_x S$, que es una cota finita por hipótesis.

Problema 1

(a) Como se trata de filtros LIT dispuestos en cascada, conmutan. Por lo tanto el sistema completo es equivalente al que se obtiene colocando en cascada primero el filtro H_2 y luego el filtro H_1. Las ecuaciones quedan entonces de la forma:

- $k[n] = x[n] + \alpha x[n-1] + x[n-2]$
- $y[n] + \beta y[n-1] = k[n]$

Igualando el término $k[n]$ que aparece en las ecuaciones anteriores se deduce la relación entre la entrada y la salida.

(b) El filtro recursivo tiene respuesta $h_1[n] = (-\beta)^n u[n]$, y el filtro no recursivo tiene respuesta $h_2[n] = \delta[n] + \alpha\delta[n-1] + \delta[n-2]$.

(c) Se tiene que la respuesta al impulso del sistema total es la convolución de las respuestas al impulso calculadas en la parte anterior. Por lo tanto,

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_1[n] + \alpha h_1[n-1] + h_1[n-2] = (-\beta)^n\{u[n] - \beta^{-1}\alpha u[n-1] + \beta^{-2}u[n-2]\}.$$

(d) Como se probó en la primera parte del problema, el filtro completo puede descomponerse como la cascada de los filtros H_1 y H_2. En este sentido, si la entrada al sistema (y por lo tanto la entrada al filtro H_1) es acotada, también lo será la secuencia que se obtiene a la salida de H_1 independientemente del valor de α ya que se trata de un filtro FIR. Por lo tanto la estabilidad del filtro completo depende únicamente de la estabilidad de H_2. Este será estable sí y solo sí,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2[n]| < \infty.$$

Usando el resultado hallado antes tenemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} |\beta|^n.$$

Notando que se trata de una serie geométrica, esta converge sí y solo sí $|\beta| < 1$. Por lo tanto el sistema es estable si los párametros cumplen $\{(\alpha, \beta)|\alpha \in \Re,\ |\beta| < 1\}$.

(e) A partir del teorema de muestreo puede deducirse que la señal luego del muestreador, $x[n]$, será es una sinusoidal a frecuencia $\theta_0 = \frac{4\pi}{3}$.
Utilizando la sugerencia puede verse que para que la salida sea nula es necesario que $|H(e^{j\theta_0})|$ también lo sea.

$$(1 + \beta e^{-j\theta})Y(e^{j\theta}) = (1 + \alpha e^{-j\theta} + e^{-j2\theta})X(e^{j\theta})$$

La respuesta en frecuencias queda entonces dada por:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{Y(e^{j\theta})}{X(e^{j\theta})} = \frac{(1 + \alpha e^{-j\theta} + e^{-j2\theta})}{(1 + \beta e^{-j\theta})}$$

Por lo tanto el numerador debe ser cero en $\theta = 4/3\pi$. Sustituyendo e igualando a cero se tiene,

$$1 + \alpha e^{-j4/3\pi} + e^{-j8/3\pi} = 0$$

despejando

$$\alpha = -(e^{j4/3\pi} + e^{-j4/3\pi}) = -2\cos(4/3\pi) = 1$$

En continua, la ganancia es $+2$, por lo tanto (sustituyendo $x[n] = 1$ en la ecuación de recurrencia y estudiando la salida en régimen), $2(1 + \beta) = 1 + 1 + 1$, entonces $\beta = 1/2$.

(f) Ver teórico.

(g) El ruido de cuantificación (antes de pasar por el filtro digital) es blanco y de potencia $\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-14}}{3}$. Por lo tanto a la salida del filtro digital se tendrá un proceso de potencia dada por

$$\sigma_{ye}^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2$$

donde $h[n]$ es la respuesta al impulso del filtro digital. Sustituyendo los valores de α y β hallados, tenemos que:

$$\sigma_{ye}^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n] - (1/2)^{-1}u[n-1] + (1/2)^{-2}u[n-2]|^2 (1/2)^{2n}$$

Separando los primeros sumandos, la serie anterior puede escribirse como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |1 - 2u[n-1] + 4u[n-2]|^2 (1/4)^2 = 1 + 1/4 + 9\sum_{n=2}^{\infty}(1/4)^n = 5/4 + \frac{9/16}{1-1/4} = 2$$

Por lo tanto la potencia a la salida del filtro será $\sigma_{ye}^2 = 2\sigma_e^2 = \frac{2^{-13}}{3}$.

Problema 2

(a) Este es un resultado intermedio del Teorema del Muestreo. Si $x[n] = x_c(n\,T_s)$, entonces las transformadas se relacionan de la siguiente manera:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{T_s}\sum_k X_c\left(\frac{\theta - 2k\pi}{2\pi T_s}\right)$$

(b)

$$R_x[m] = \mathbb{E}\{x[n] \cdot x[n+m]\} = \mathbb{E}\{a(n\,T_s) \cdot a((n+m)\,T_s)\}$$

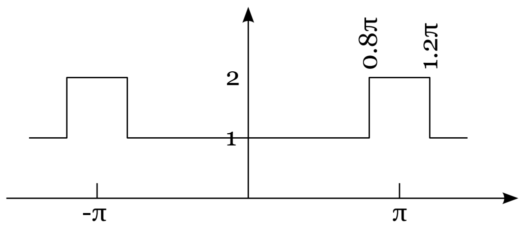
$$R_x[m] = R_a(m\,T_s)$$

Es decir, la autocorrelación de las muestras es el muestreo de la autocorrelación. $R_x[m]$ está bien definido: la autocorrelación sólo depende de la diferencia de tiempos m. Es entonces estacionario en autocorrelación.
$m_x = \mathbb{E}\{x[n]\} = \mathbb{E}\{a(nT_s)\} = m_a$, con m_a constante por ser a estacionario. Entonces x es estacionario en media.
Por lo tanto x es estacionario en sentido amplio.

(c) La densidad espectral es la transformada de Fourier de la autocorrelación, y las autocorrelaciones son el muestreo una de otra. Entonces, se aplica directamente el resultado de la primera parte:

$$G_x(e^{j\theta}) = \frac{1}{T_s}\sum_k G_a\left(\frac{\theta - 2k\pi}{2\pi T_s}\right)$$

(d) G_a es un pulso de ancho 1.2 veces f_s. Por lo tanto, G_x será la superposición cada 2π de pulsos de ancho 1.2 veces 2π, cada uno con amplitud $0.001/T_s = 1$.



(e) Las potencias de un proceso estacionario y de sus muestras son iguales. Se puede calcular cualquiera de ellas:

$$\sigma_x^2 = \sigma_a^2 = 0.001 \times 1200 = 1.2$$

o de otra forma,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} G_a(e^{j\theta})d\theta = 0.8 \times 1 + 0.2 \times 2 = 1.2$$

En este caso particular, varianza y potencia son iguales porque $m_a = 0$. Esto se ve de 2 formas: no hay un impulso en frecuencia 0 en la densidad espectral (no hay concentración de potencia en continua), y la autocorrelación (que tiene forma de sinc) decae a 0 al crecer τ (la autocorrelación tiende a m_a^2 salvo en casos muy fuertemente correlacionados).

(f) El filtro tiene que tener ganancia 1 y frecuencia de corte $\pi/4$.

(g) Esta potencia es la integral de G_x hasta $\pi/4$:

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} G_a(e^{j\theta})|H(e^{j\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} G_a(e^{j\theta}) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(h) El proceso y es estacionario, por lo tanto su potencia será igual a la de su submuestreo. $\sigma_B^2 = 1/4$.