Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

9 de octubre de 2006

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

(a) Definir estabilidad BIBO (entrada acotada - salida acotada) para un sistema en tiempo discreto con entrada x y salida y.

(b) Enunciar la condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

(c) Demostrar.

(d) Estudiar estabilidad para los siguientes sistemas. En condiciones de estabilidad, calcular una cota B_y para la salida dada la cota B_x para la entrada.

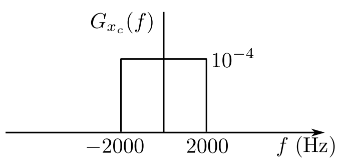
1. $y[n] = x[n] + \alpha y[n-1]$
2. $y[n] = x[8n]$
3. $y[n] = \sqrt{(\sum_{k=0}^{10} |x[n-k]|^2)}$

Problema 1 [13 pts.]

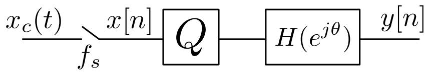
Sea el filtro H cuya resupesta al impulso es $h[n] = (\delta[n] + \delta[n-1])/2$.

(a) Estudiar estabilidad de H, calcular y graficar su respuesta frecuencial.

La señal $x_c(t)$ tiene densidad de potencia $G_{x_c}(f) = 10^{-4}\Pi(f/4000)$.



Esta señal es muestreada a $f_s = 8$kHz, y luego filtrada por H. El cuantizador tiene una resolución $\Delta = 10^{-3}$.



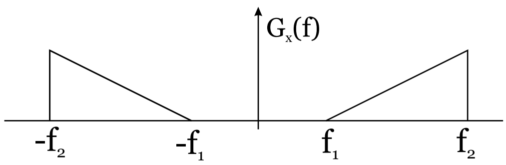
(b) Enunciar las hipótesis de validez del modelo de ruido de cuantización. ¿Se cumplen en este caso? Justificar. Dar el modelo.

(c) Calcular la relación señal a ruido de cuantización luego del cuantizador.

(d) Calcular la relación señal a ruido a la salida del filtro H.

Problema 2 [17 pts.]

Un proceso $x(t)$ con una densidad espectral de potencia como la que se muestra en la figura, se muestrea a una frecuencia de muestreo f_s. Se desea enviar x a través de un enlace digital que permite una transferencia de muestras por segundo máxima $f_{max} = \frac{5}{3} f_2$.



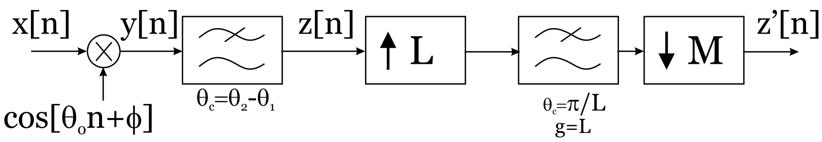
(a) Determinar la mínima frecuencia de muestreo f_{min} que permite representar al proceso x como $x[n] = x(nT_s)$, con $T_s = 1/f_s$. ¿Es posible transmitir las muestras $x[n]$ utilizando el enlace digital disponible?

Sea $y[n] = x[n]\ cos(\theta_o n + \phi)$, donde ϕ es una variable aleatoria de distribución uniforme en el intervalo $[0, 2\pi)$ e independiente de $x[n]$.

(b) Hallar la autocorrelación de $y[n]$, $R_y[m]$ en términos de la autocorrelación de $x[n]$, $R_x[m]$. Mostrar que:

$$G_y(e^{j\theta}) = G_x(e^{j\theta}) * \left(\frac{\delta(\theta - \theta_0) + \delta(\theta + \theta_0)}{4} \right)$$

Analizaremos el sistema de la figura, que se pretende utilizar para transmitir la señal utilizando el enlace digital. Asumiremos que la frecuencia de muestreo utilizada es $f_s = 3 \times f_{min}$.



(c) Graficar los espectros de $y[n]$ y $z[n]$ en los casos en que $\theta_o = \theta_1 \equiv \frac{2\pi f_1}{f_s}$ y $\theta_o = \theta_2 \equiv \frac{2\pi f_2}{f_s}$.

Se propone transmitir el proceso $z'[n]$, que es un submuestreo de $z[n]$. Utilizar como valor de θ_o aquel garantice que no hay solapamiento de espectros.

(d) Calcular L y M de manera de obtener la menor cantidad de muestras por segundo posible, siendo $f_1 = f_2/4$. ¿Es posible transmitir $z'[n]$ por el enlace digital?

(e) Calcular la mínima frecuencia de muestreo f_{s2} para que el esquema propuesto siga funcionando.

(f) Proponer un diagrama de bloques para el sistema receptor tal que a partir de $z'[n]$ se recupere $x[n]$. Justificar.

Solución

Pregunta

(a) Un sistema es estable BIBO si para toda entrada acotada, la salida es acotada.
Una señal x es acotada si existe una cota finita $B_x < \infty$ tal que $|x[n]| \leq B_x \forall n$.
(no alcanza decir $|x[n]| < \infty$: por ejemplo, $x[n] = n$ es siempre menor a infinito, pero no tiene cota finita)

(b) La CNS de estabilidad BIBO para SLIT es que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable: $\sum_k |x[k]| = S < \infty$

(c) Condición necesaria: H estable $\Rightarrow S < \infty$
El sistema es estable por hipótesis, entonces ante una entrada acotada, existe una cota finita para todos los valores de la salida.
En particular, tomamos una entrada que haga aparecer S como salida en algún instante.
Tomando $x[n] = \frac{h[-n]^*}{|h[-n]|}$ o 0 si $h[-n] = 0$. Evaluando la salida en $n = 0$, llegamos a $y[0] = S$.
La entrada está acotada por 1 y el sistema es estable BIBO, por lo tanto $y[n]$ tiene una cota finita. Entonces, S también tiene esa cota.
Condición suficiente: $S < \infty \Rightarrow H$ estable BIBO
Tomando una entrada genérica con cota B_x, buscamos una cota para la salida:

$$|y[n]| = |x * h| \leq \sum_k |h[k]||x[n-k]| \leq B_x.S$$

Entonces la salida está acotada por $B_x S$, que es una cota finita por hipótesis.

(d)

1. Para este sistema, $h[n] = u[n]\alpha^n$. $S = \sum |h|$ sólo converge para $|\alpha| < 1$. En este caso, y por la demostración de la condición suficiente, sabemos que existe una cota $B_y = SB_x$, con $S = \frac{1}{1-|\alpha|}$.
2. Este es un compresor (no es un SLIT), y los valores de la salida son algunos de los valores de entrada, por lo cual el sistema es estable, y una cota es $B_y = B_x$.
3. Este sistema (no es SLIT) acumula 11 valores de la entrada elevados al cuadrado. Esta acumulación tiene cota $B_a = 11B_x^2$ ya que cada valor acumulado tiene cota B_x^2. Una cota para la salida será entonces $B_y = \sqrt{11}B_x$, y se trata de un sistema estable BIBO.

Problema 1

(a) H es FIR, por lo tanto estable. Su respuesta frecuencial es $H(e^{j\theta}) = 0.5(1 + e^{-j\theta}) = e^{-j\theta/2}\sin(\theta/2)$. Por lo tanto, entre $-\pi$ y π, $|H| = \sin(\theta/2)$ y $arg(H) = -\theta/2$. Esto se periodiza cada 2π.
Para las próximas partes, calculamos $|H|^2 = 0.5(1 + \cos\theta)$.

(b) La potencia de la señal x es igual a la potencia de x_c: $\sigma_x^2 = 4000 \times 10^{-4} = 0.4$. Esto es mucho mayor que Δ^2. Además, $x[n]$ tiene su espectro distribuido hasta $\pi/2$. Esto significa que generalmente tendrá variaciones bastante mayores al paso de cuantización entre muestras sucesivas.
El modelo de error de cuantización será entonces el de un proceso blanco, con distribución uniforme, aditivo a la señal $x[n]$, e independiente de ella.

(c) La potencia de ruido de cuantización es $\Delta^2/12$. Por lo tanto, la SNR será $0.4 \times 12/\Delta^2 = 4.8e6 = 66.8$dB.

(d) Como el rudio de cuantización es IID, la potencia de ruido a la salida será $\sigma_{ye}^2 = \sigma_e^2 \times \sum |h[n]|^2 = \Delta^2/12 \times 1/2 = 4.167e-8$.
La potencia de señal será:

$$\sigma_{yx}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{10^{-4}}{T_s}\frac{1+\cos\theta}{2}d\theta$$

$$\ldots = \frac{1}{5} \times \frac{\pi+2}{\pi} = 0.327$$

La nueva SNR será entonces $0.327/4.1673e-8 = 1.74e6 = 68.95$dB.

Problema 2

(a) Por el teorema de Nyquist $f_s > 2W$ por lo tanto $f_{min} = 2f_2$. Como $f_{min} > f_{max}$ no es posible transmitir por dicho enlace.

(b)

$$R_y[m] = E\{x[n]cos(\theta_0 n + \phi)x[n+m]cos(\theta_0(n+m)+\phi)\}$$

Reordenando los términos y utilizando la independencia de $x[n]$ y ϕ obtenemos:

$$R_y[m] = R_x[m]E\{cos(\theta_0 n + \phi)cos(\theta_0(n+m)+\phi)\}$$

Planteando:

$$E\{cos(\theta_0 n + \phi)cos(\theta_0(n+m)+\phi)\} = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}cos(\theta_0 n + \phi)cos(\theta_0(n+m)+\phi)d\phi$$

Obtenemos:

$$E\{cos(\theta_0 n + \phi)cos(\theta_0(n+m)+\phi)\} = \frac{cos(m\theta_0)}{2}$$

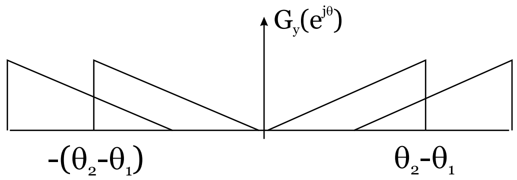
Finalmente:

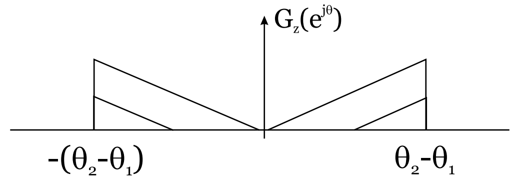
$$R_y[m] = R_x[m]\frac{cos(m\theta_0)}{2}$$

Transformando la autocorrelación de $y[n]$ obtenemos la densidad espectral de potencia:

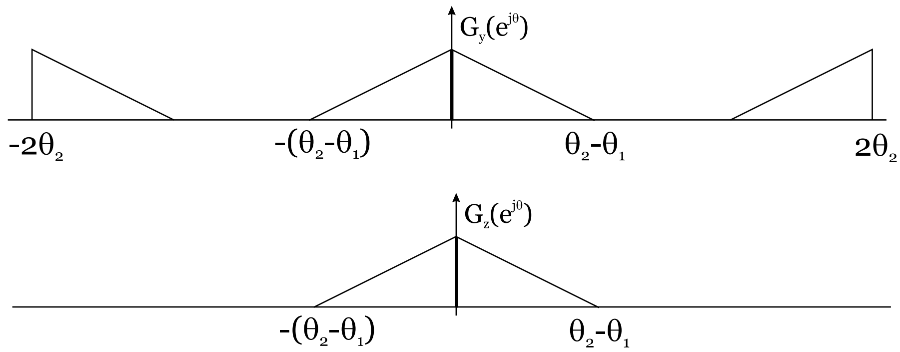
$$G_y(e^{j\theta}) = G_x(e^{j\theta}) * \left(\frac{\delta(\theta-\theta_0)+\delta(\theta+\theta_0)}{4}\right)$$

(c) Para el caso en que $\theta_o = \theta_1$ los espectros quedan:





En este caso no se puede asegurar que no haya solapamiento, dependerá de la relación entre f_1 y f_2.
Para el caso en que $\theta_o = \theta_2$:



En este caso se puede asegurar que no hay solapamiento para la frecuencia de muestreo sugerida.

(d) Se trabajará con el valor de $\theta_0 = \theta_2$ que nos asegura que no hay solapamiento. Ajustaremos la frecuencia de muestreo con el expansor y compresor de manera que el espectro cubra todo el rango entre $-\pi$ y π. Planteando la condición se tiene $\frac{M}{L}(\theta_2 - \theta_1) = \pi$ Sustituyendo los valores de θ_1 y θ_2 se tiene: $\frac{M}{L}(f_2 - f_1) = 3f_{min}/2 = 3f_2$. Como $f_1 = f_2/4$ nos queda $L = 1$ y $M = 4$. En este caso sí es posible transmitir puesto que $\frac{M}{L} f_s \leq f_{max}$.

(e) Para evitar el solapamiento es necesario que se cumpla $2f_2 + (f_2 - f_1) > f_{s2}$. Sustituyendo se tiene que la mínima es $\frac{8}{3} f_2$.

(f)