Muestreo y Procesamiento Digital
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

8 de diciembre de 2005

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [15 pts.]

El método de diseño de filtros mediante la transformación bilineal se basa en una correspondencia entre los planos S y Z.
Esta correspondencia es la siguiente, y permite llevar una transferencia en tiempo continuo ($H_c(s)$) a una transferencia en tiempo discreto ($H_d(z)$).

$$s = \frac{2}{T_d}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$z = \frac{1+(T_d/2)s}{1-(T_d/2)s}$$

(a) Demostrar que el eje imaginario en S se corresponde con la circunferencia unidad en Z.

Demostrar que el semiplano izquierdo de S se corresponde con el círculo unidad en Z.

(b) Indicar, y justificar, la relación entre la ubicación de todos los ceros y polos de $H_c(s)$ y los de $H_d(z)$.

Determinar el orden de $H_d(z)$ en función del orden de $H_c(s)$.

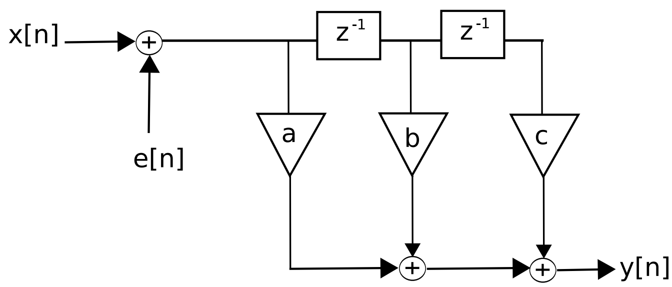
Estudiar la relación entre la estabilidad de $H_d(z)$ y de $H_c(s)$.

(c) Hallar la relación entre las respuestas frecuenciales de H_c y H_d.

(d) Dada la especificación (máscara) para el filtro digital a diseñar, enumerar los pasos a seguir para el diseño del filtro usando el método de transformación bilineal. Indicar en cada caso las correspondencias que deban hacerse entre especificaciones y transferencias de los filtros involucrados.

Problema 1 [20 pts.]

(a) Se considera el filtro digital real de la siguiente figura. Hallar condiciones en los parámetros del filtro para que éste **no** presente distorsión de fase. Para este caso, hallar la respuesta en frecuencia del mismo. Observar que el retardo de grupo del filtro es de una muestra.



(b) Al filtro de la parte (a) se aplicará la señal $x[n]$, que llega contaminada con ruido blanco aditivo de potencia σ_N^2, de media nula y no correlacionado con $x[n]$. El objetivo del filtro es recuperar la señal.

Hallar los coeficientes teniendo en cuenta las dos condiciones siguientes:

i. Las condiciones halladas en la parte (a).

ii. La respuesta en frecuencia cero es 1.

iii. Que la salida sea lo más similar posible a la señal original $x[n]$, tomando como criterio minimizar el error cuadrático medio introducido. Es decir, teniendo en cuenta la observación hecha sobre el retardo de grupo, se deberá minimizar:

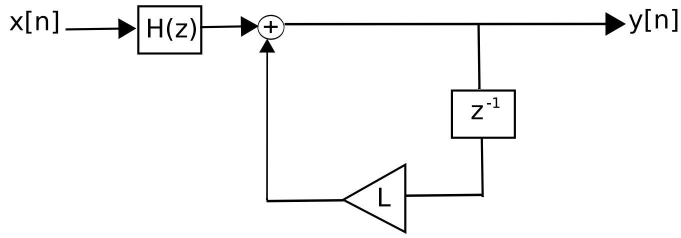
$$\varepsilon^2 = \mathbf{E}\big\{(y[n] - x[n-1])^2\big\}$$

Datos: El proceso $x[n]$ tiene autocorrelación:

$$R_x[n] = \sigma_x^2 \left(\delta[n] + \frac{\delta[n-1] + \delta[n+1]}{2}\right) \qquad \sigma_x^2 = \sigma_N^2$$

(c) Dar el modelo *completo* para el error introducido en las operaciones cuando la representación numérica es en *punto fijo* y se utiliza *redondeo*. Justificar.

(d) Se considera el filtro de la siguiente figura donde $H(z)$ corresponde a la transferencia del filtro de la parte (a).



Calcular la potencia de "ruido de operaciones" a la salida del segundo filtro, para una representación con punto fijo y redondeo, con coeficientes genéricos. Se debe fundamentar correctamente todos los pasos.

Problema 2 [15 pts.]

Analizaremos la implementación de aproximaciones de un filtro pasabandas de ancho $\pi/3$ y centrado en $\pi/2$ mediante un FIR y un IIR.

- FIR

  (a) Hallar la respuesta al impulso del filtro pasabandas ideal.

  (b) Se desea implementar este filtro utilizando un FIR causal con 30 elementos de retardo, enventanando la respuesta al impulso con una ventana rectangular. Hallar una expresión para los coeficientes $h[n]$ de dicho FIR.

- IIR

  Se desea aproximar el filtro pasabandas utilizando un IIR causal de segundo orden:

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - re^{j\theta_0})(z - re^{-j\theta_0})}$$

  (c) Hallar el valor de θ_0 y el rango de valores que puede tomar r para que el filtro se comporte de la forma deseada. Dibujar el diagrama de polos y ceros para posibles valores de r y θ_0.

  (d) Calcular $H(e^{j0})$, $H(e^{j\pi/2})$ y $H(e^{j\pi})$. Aproximar dichos valores si suponemos que $1 - r^2 \ll 1$.

  (e) Se desea que la relación entre el valor máximo y mínimo de $|H(e^{j\theta})|$ sea 100. Es decir:

$$\frac{|H(e^{j\pi/2})|}{|H(e^{j0})|} = \frac{|H(e^{j\pi/2})|}{|H(e^{j\pi})|} = 100$$

  Calcular los valores r y θ_0 utilizando las aproximaciones propuestas en la parte anterior.

Problema 3 [10 pts.]

Considere la secuencia compleja

$$x[n] = \begin{cases} e^{j\theta_o n}, & 0 \leq n \leq 2N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Encontrar $X(e^{j\theta})$, la transformada de Fourier de $x[n]$.

(b) Encontrar $X[k]$, la DFT de $x[n]$ como secuencia finita de $2N$ puntos.

Considere

$$x_1[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n-kN] \quad \text{y} \quad \hat{x}[n] = \begin{cases} x_1[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c) Encontrar $\hat{X}[k]$, la DFT de $\hat{x}[n]$ como secuencia finita de N puntos.

Solución

Pregunta

(a) Una manera directa de demostrar esto es directamente sustituyendo $s = \alpha + j\beta$ y estudiando el valor resultante de z. Con $\alpha = 0$, z recorre el círculo unidad una única vez al recorrerse todo el eje imaginario en s. Luego, con $alpha$ negativo, resultan valores de z dentro del círculo unidad.
También se puede notar que esta es una transformación de Möbius (el determinante de los coeficientes es no nulo). Por lo cual sabemos que circunferencias se corresponden con circunferencias (siendo las rectas un caso especial de circunferencia); se mantienen los ángulos; y se conservan las direcciones.
Entonces, evaluando en 3 puntos cualesquiera del eje imaginario en el plano S (por ejemplo, j, 0, $-j$), se verifica que los 3 puntos correspondientes en el plano Z pertenecen a la circunferencia unidad. Esto significa que todo el eje imaginario se corresponde con toda la circunferencia unidad, y queda demostrada la primera parte.
Estas transformaciones mantienen la conexividad, por lo tanto alcanza con que un único punto del semiplano izquierdo de S se corresponda con un punto dentro del círculo unidad en Z para demostrar la segunda parte.
Otra forma de ver esto es aprovechando la conservación de ángulos. Si se recorre el eje imaginario de S hacia arriba, el semiplano izquierdo queda a la izquierda. La circunferencia unidad queda recorrida en sentido antihorario, por lo cual su lado izquierdo es el círculo unidad, y queda así demostrada la segunda parte.

(b) Los ceros y polos en los planos S y Z se corresponden uno a uno mediante la transformación bilineal. Por lo tanto, la cantidad de ceros y polos se conserva, lo que resulta en sistemas de igual orden.
Además, por lo visto anteriormente, se corresponden el semiplano izquierdo con el interior del círculo unidad. Esto significa que sistemas causales estables en tiempo continuo se corresponden con sistemas causales estables en tiempo discreto.

(c) Las respuestas frecuenciales son la evaluación de la transformada en el eje imaginario o el círculo unidad, según el caso: $H_c(j\omega)$ y $H_d(e^{j\theta})$.
Sustituyendo $z = e^{j\theta}$ en la transformada, resulta en $s = j\frac{2}{T_d}\tan(\theta/2)$. Por lo tanto, a una frecuencia θ en tiempo discreto, le corresponde la frecuencia $\omega = \frac{2}{T_d}\tan(\theta/2)$.
Esta relación hace corresponder la circunferencia unidad en todo el eje imaginario. La relación es lineal para frecuencias bajas.

(d) Dada la especificación en tiempo discreto, se debe plantear una especificación en tiempo continuo. Como se vio en la parte anterior, la única diferencia entre las respuestas frecuenciales de uno y otro sistema es la relación no lineal entre las frecuencias. Entocnes la nueva especificación se tendrá los mismos valores y tolerancias en amplitud, y las frecuencias (ω_i) se deducen a partir de la relación de la parte anterior.
Con la nueva especificación para el sistema en tiempo continuo, se diseña un filtro mediante los métodos clásicos de diseño (ej. Butterworth, Chebychev, Elíptico, Bessel). Esto resulta en un $H_c(s)$.
Luego se aplica la transformada bilineal para obtener $H_d(z)$. Este es el sistema a implementar, y que ya sabemos cumplirá con la especificación original.

Problema 1

(a) Para que el filtro no presente distorción de fase, la respuesta en frecuencia del mismo debe ser de fase lineal. En este caso se tiene que la respuesta en frecuencias del filtro está dada por

$$H(e^{j\theta}) = a + be^{-j\theta} + ce^{-j2\theta}$$

Recordar que para que un filtro FIR sea de fase generalizada, es necesario que la respuesta al impulso sea simétrica respecto de su punto medio. Esto implica que $a = c$. Por lo tanto la respuesta en frecuencias queda

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}(b + 2a\cos\theta)$$

Para que la fase sea lineal $b + 2a\cos\theta$ no debe cambiar de signo.

(b) Imponiendo la segunda condición tenemos que

$$b + 2a = 1 \Rightarrow b = 1 - 2a$$

La salida esta dada por

$$y[n] = ax[n] + bx[n-1] + cx[n-2] + an[n] + bn[n-1] + cn[n-2]$$

donde n es el ruido aditivo.
Utilizando la relacion entre a y b hallada tenemos que

$$y[n] - x[n-1] = s_x[n] + s_n[n]$$

donde

$$s_x[n] = a(x[n] - 2x[n-1] + x[n-2])$$

$$s_n[n] = a(n[n] - 2n[n-1] + n[n-2]) + n[n-1]$$

Observar que, como $x[n]$ y $n[n]$ son independientes, también lo serán $s_x[n]$ y $s_n[n]$. Por lo tanto

$$\epsilon^2 = E\{(s_x[n] + s_n[n])^2\} = E\{s_x[n]^2\} + E\{s_n[n]^2\}$$

Luego realizando las cuentas correspondientes

$$\epsilon^2 = 6a^2\sigma_x^2 - 4a^2R_x[1] + (6a^2 - 4a^2 + 1)\sigma_x^2$$

Por lo tanto utilizando que $R_x[1] = \sigma_x^2/2$ y operando se tiene

$$\epsilon^2 = \sigma_x^2(8a^2 - 4a + 1)$$

Para obtener el mínimo igualamos la derivada de $\epsilon(a)$ respecto de a a cero. Es claro que este punto corresponde a un mínimo de dicha función. Realizando dichos cálculos se llega a que $a = 1/4$, lo que implica que $b = 1/2$. Observar que esto garantiza que el sistema no distorsiona la fase ya que $b > a$.

(c) Ver teórico.

(d) Debido a los errores en las operaciones en punto fijo aparecen ruidos 4 ruidos, uno por cada multiplicador.
Los ruidos debidos a los multiplicadores del filtro H pueden pensarse como aplicados a la salida de H. Por otro lado el ruido debido al multiplicador restante puede pensarse aplicado a la entrada de la última etapa del filtro, es decir en el mismo punto que los anteriores. De lo anterior se deduce que el ruido a la salida, y_e, será la salida que se obtiene al pasar la suma de los cuatro ruidos por la última etapa de filtrado. Por lo que se tiene que

$$E\{y_e[n]^2\} = \sum_{i=1}^{4} E\{y_e[n]^2\} = 4\sigma_{yei}$$

donde σ_{yei} es la potencia de la señales y_{ei}. Notar que estas coinsiden para todo i.
La transferencia de la etapa final está dada por

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - Lz^{-1}}$$

Por lo que la respuesta al impulso viene dada por

$$h_2[n] = L^{-n}u[n]$$

de donde la potencia a la salida debida a cada ruido es

$$\sigma_{yei}^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_2[n]^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - L}$$

La potencia total del ruido debido a las operaciones es

$$\sigma_{ye}^2 = \frac{4\sigma_e^2}{1 - L}$$

Problema 2

(a) El pasabandas ideal lo podemos escribir como:

$$H(e^{j\theta}) = (\delta(\theta - \pi/2) + \delta(\theta + \pi/2)) * \Pi\left(\frac{\theta}{\pi/3}\right)$$

Entonces

$$h[n] = \frac{1}{\pi}\cos(n\pi/2)sinc(n\pi/6)$$

(b)

$$\hat{h}[n] = \begin{cases} h[n-15], & 0 \leq n \leq 30 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c) Para que el sitema sea causal y estable, ambos polos deben estar dentro del círculo unidad. El filtro debe comportarse como un pasabanda centrado en la frecuencia $\pi/2$, entonces los polos deben estar en el eje imaginario. Entonces $0 < r < 1$ y $\theta_0 = \pi/2$.

(d)

$$H(e^{j0}) = \frac{1}{|1-ir||1+ir|} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}\sqrt{1+r^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}$$

$$H(e^{j\pi/2}) = \frac{1}{|i-ir||i+ir|} = \frac{1}{(1+r)(1-r)} \approx \frac{1}{2(1-r)}$$

$$H(e^{j\pi}) = \frac{1}{|-1-ir||-1+ir|} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\sqrt{1+\alpha^2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}$$

(e) El valor máximo lo toma en $H(e^{j\pi/2})$ y el mínimo en $H(e^{j0})$. Tomando las aproximaciones de la parte anterior tenemos que:

$$\frac{|H(e^{j\pi/2})|}{|H(e^{j0})|} = \frac{1/2(1-r)}{1/2} = \frac{1}{1-r} = 100$$

Entonces $\alpha = 0,99$.

Problema 3

(a) La señal $x[n]$ es una exponencial compleja multiplicada por la señal $p[n]$ que vale 1 entre 0 y $2N-1$. $P(z) = (1-z^{2N})/(1-z)$, por lo tanto:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1-e^{j(\theta_0-\theta)2N}}{1-e^{j(\theta_0-\theta)}}$$

(b) La DFT de x[n] son 2N muestras equiespaciadas de su respuesta frecuencial:

$$X[k] = X(e^{j\frac{2\pi}{2N}k}) = \frac{1-e^{j(\theta_0-\frac{2\pi}{2N}k)2N}}{1-e^{j(\theta_0-\frac{2\pi}{2N}k)}}$$

Hay un factor $2\pi k$ en una exponencial que se puede eliminar:

$$X[k] = \frac{1-e^{j\theta_0 2N}}{1-e^{j(\theta_0-\frac{2\pi}{2N}k)}}$$

(c) Planteando explícitemente la transformada de $\hat{X}[k]$ tenemos:

$$\hat{X}[k] = \sum_0^{N-1}(\hat{x}[n])W_N^{kn} = \sum_0^{N-1}(x[n]+x[n+N])W_N^{kn} = \sum_0^{N-1}(e^{j\theta_o n}+e^{j\theta_o(n+N)})W_N^{kn}$$

$$\hat{X}[k] = (1+e^{j\theta_o N})\sum_0^{N-1}e^{j\theta_o n}W_N^{kn} = \frac{1-e^{j\theta_0 2N}}{1-e^{j(\theta_0-\frac{2\pi}{N}k)}}$$