Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

8 de octubre de 2005

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [12 pts.]

(a) Dar una condición necesaria y suficiente de estabilidad BIBO para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

(b) Demostrar que la condición es necesaria.

(c) Demostrar que la condición es suficiente.

(d) Aplicar al estudio de estabilidad del filtro cuya respuesta al impulso es:

$$h[n] = \mathrm{sinc}(n/2) \ \ \forall n$$

Problema 1 [14 pts.]

Se consideran los filtros $A(e^{j\theta})$ y $B(e^{j\theta})$ causales, dados por sus ecuaciones en diferencias:

- $A(e^{j\theta})$: $y[n] = \alpha x[n] + \beta x[n-1] + \alpha x[n-2]$
- $B(e^{j\theta})$: $y[n] = \mu y[n-1] + \lambda x[n]$

Para cada uno de los filtros:

(a) Calcular la respuesta al impulso.

(b) Estudiar estabilidad en función de los parámetros (α, β, μ y λ).

(c) Calcular la respuesta frecuencial.

(d) Determinar los parámetros de los filtros (α, β, μ y λ) para que la respuesta frecuencial sea 1 a frecuencia $\theta = 0$ ($H(e^{j0}) = 1$) y el módulo cuadrado de la respuesta frecuencial sea 0.5 a frecuencia $\theta = \pi/2$. El filtro deberá tener una respuesta en frecuencia que no debe anularse nunca.

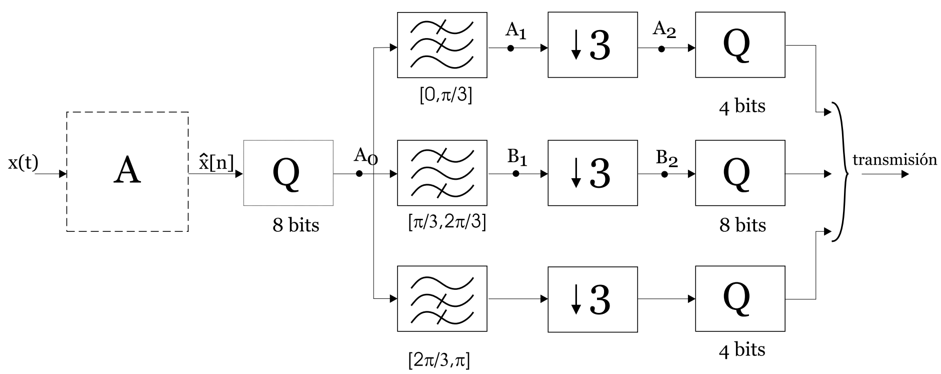
(e) En estas condiciones, graficar módulo y fase de los filtros determinados.

Ahora asumiremos que $x[n]$ es un proceso IID, con densidad de probabilidad uniforme entre ± 1.

(f) Calcular la potencia a la salida de los filtros A y B cuando la entrada, en cada caso, es $x[n]$.

Problema 2 [14 pts.]

MP3 es el estándar más difundido de compresión de audio. Éste realiza una codificación basada en propiedades psicoacústicas de la percepción del sonido. Una de estas propiedades, explotada por MP3, se basa en que la sensibilidad del oído humano varía para distintas frecuencias. El sistema de la figura es un esquema simplificado de cómo MP3 utiliza esta propiedad. Así logra reducir la cantidad de datos, eliminando detalles perceptualmente irrelevantes.



Interesa que el sistema trabaje con las componentes de señal de 0 a 15000 Hz. Se asumirá que la entrada está acotada entre -1 y 1. El sistema utiliza muestras de 8 bits a la entrada. A modo de ejemplo trabajaremos con un proceso $x(t)$ con densidad espectral de potencia $\frac{1}{30000}\Lambda(f/15000)$.

(a) Diseñar el bloque A para que el sistema funcione a la menor frecuencia de muestreo posible.

(b) Dibujar el espectro de la señal en los puntos que se indica. A_0, A_1, A_2, B_1, B_2.

(c) Dar el modelo para el ruido de cuantización indicando claramente las hipótesis bajo las cuales es válido.

(d) Calcular la potencia del ruido y la relación señal a ruido en el punto A_0.

(e) Dibujar el diagrama de un sistema que permita decodificar la señal de audio.

La percepción de la calidad del sonido no se degrada reduciendo a la mitad la cantidad de bits utilizados para las bandas de frecuencias altas y bajas.

(f) Calcular la potencia del ruido en cada banda y la SNR total para la señal decodificada.

(g) Calcular la tasa de bits a la salida del codificador. Comparar con la tasa de bits a la entrada del codificador (A_0).

Solución

Pregunta

(c) Ver teórico.

(d)

$$|h[n]| = |\mathrm{sinc}(n/2)| = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & n \text{ impar} \\ 1 & n = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{sinc}(n/2)| = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} + 1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} + 1$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} + 1 \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} = \infty$$

El filtro es inestable.

Problema 1

(a)

$$a[n] = \alpha\delta[n] + \beta\delta[n-1] + \alpha[n-2]$$

$$b[n] = \lambda u[n]\mu^n$$

(b) El filtro A es un FIR, y por lo tanto estable.
El filtro B sólo es estable si $\sum_{n=0} |\mu|^n$ converge. Esto se cumple si $|\mu| < 1$.

(c)

$$A(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}(2\alpha\cos\theta + \beta)$$

$$B(e^{j\theta}) = \frac{\lambda}{1 - \mu e^{-j\theta}}$$

(d) Sustituyendo $e^{j\theta} = 1$ en las respuestas frecuenciales, e igualándolas a 1, resulta:

$$\alpha = (1-\beta)/2$$

$$\lambda = 1 - \mu$$

Los filtros quedan ahora:

$$A(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}((1-\beta)\cos\theta + \beta)$$

$$B(e^{j\theta}) = \frac{1-\mu}{1 - \mu e^{-j\theta}}$$

$$|A(e^{j\theta})|^2 = ((1-\beta)\cos\theta + \beta)^2$$

$$|B(e^{j\theta})|^2 = \frac{(1-\mu)^2}{|1 - \mu e^{j\theta}|^2}$$

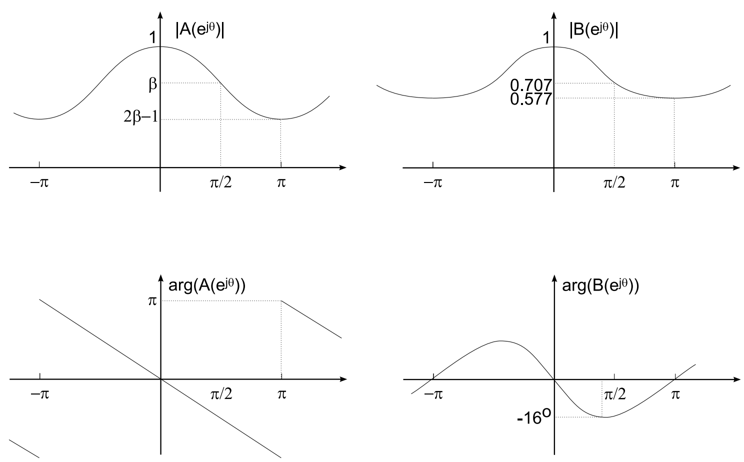
A frecuencia $\theta = \pi/2$, $e^{j\theta} = j$. Sustituyendo:

$$|A(e^{j\pi/2})|^2 = \beta^2 = 1/2$$

$$|B(e^{j\pi/2})|^2 = \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu^2} = 1/2$$

β tiene 2 soluciones posibles: $1/\sqrt(2)$ y $-1/\sqrt(2)$. El caso con $\beta = -1/\sqrt(2)$ presenta un cambio de signo en el término $((1-\beta)\cos\theta + \beta)$, lo que se traduce en una discontinuidad en la fase. Por lo tanto, el valor aceptable es $\beta = 1/\sqrt(2)$.
μ se obtiene resolviendo $\mu^2 - 4\mu + 1 = 0$. Esto da 2 soluciones: 3.73205 y 0.26795. La primera resulta en un filtro inestable, por lo tanto la única solución válida es $\mu = 0.26795$.

(e) Para el filtro A, la fase es siempre $-\theta$ (periodizado 2π), más eventuales saltos de valor π donde se vuelva negativo el factor $((1-\beta)\cos\theta + \beta)$. El módulo tiene forma de coseno, valiendo 1 en $\theta = 0$, y $|2\beta - 1|$ cuando $\theta = \pi$.
El filtro B también tiene pendiente 0 en frecuencias 0 y π. El módulo vale 1 en frecuencia 0 y $(1-\mu)/(1+\mu)$ en π. El caso límite, cuando $\mu \to 1^-$, resulta en un filtro que selecciona únicamente la frecuencia 0. La fase de este filtro



(f) $x[n]$ tiene media 0 y potencia $\sigma_x^2 = 1/3$. Su densidad espectral es constante: $G_x(e^{j\theta}) = 1/3$.
Aplicando $\sigma_y^2 = 1/2\pi \int G_x |H|^2 d\theta$, y la propiedad de Parseval, obtenemos:

$$\sigma_y^2 = 1/3 \sum |h[n]|^2$$

.
Para los filtros del problema, vale:

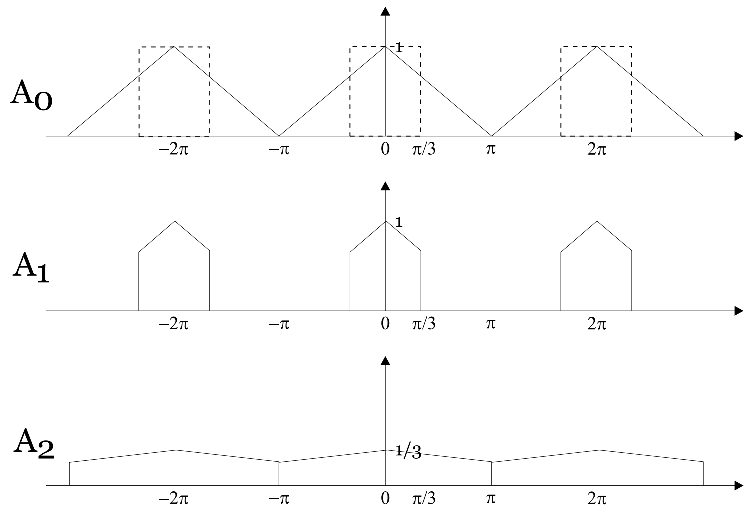
$$\sigma_A^2 = 1/3(5/4 - 1/\sqrt(2)) = 0.18096$$

$$\sigma_B^2 = 1/3(1-\mu)^2/(1-\mu^2) = 0.19245$$

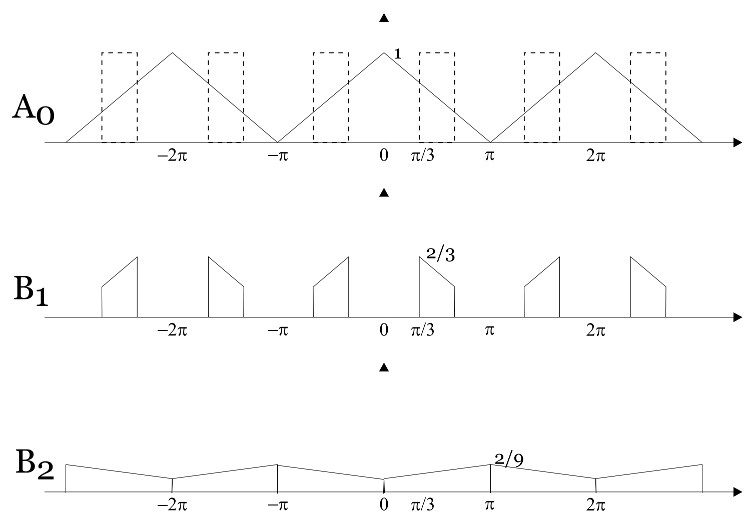
Problema 2

(a) El bloque A consiste en un filtro pasabajos con frecuencia de corte 15000 Hz seguido de un muestreador a una frecuencia de 30 kHz.

(b) Para la banda de bajas frecuencias:



Para la banda de frecuencias medias:



(c) Ver teórico.

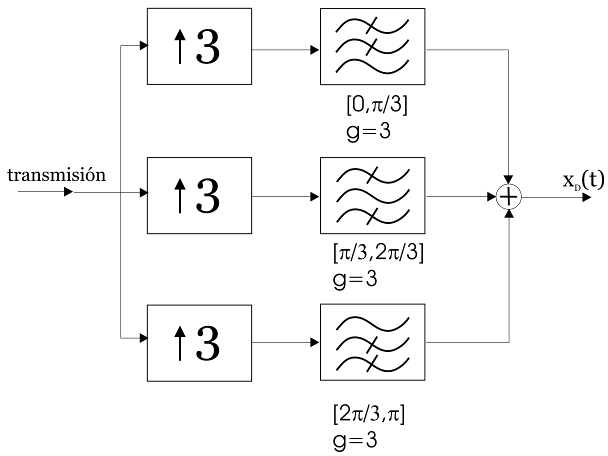
(d) El ruido de cuantización en el punto A_0 tiene una potencia :

$$\sigma_e^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} x^2 dx = \frac{\Delta^2}{12}$$

con $\Delta = 2^{-8}$, se tiene:

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-14}}{2^2 3} = \frac{2^{-14}}{3}$$

(e)



(f) La potencia de ruido será distinta en cada banda debido a que se está utilizando cuantizadores con distinta cantidad de bits. Tendremos dos fuentes de ruido para cada banda, el ruido de cuantización introducido en la cuantización de la adquisición y el ruido introducido en la recuantización antes de la transmisión.
El ruido de adquisición introducido en la entrada, como vimos, tiene características de ruido blanco. Estas características se pierden al ser filtrado por el pasabajos, pasabanda y pasaaltos. Sin embargo, luego de la decimación, la densidad espectral de potencia de este ruido vuelve a ser constante, por lo tanto en las tres bandas esta fuente de ruido vuelve a tener características de ruido blanco. Esta fuente de ruido tiene, en cada banda, un tercio de la potencia del ruido original.
Para el ruido de recuantización en cada banda, asumiremos que estamos bajo las hipótesis habituales para el ruido de cuantización, y por lo tanto consideraremos que también tiene características de ruido blanco e independiente de la señal y las demás fuentes de ruido. La potencia de estas fuentes de ruido es $\sigma_{e_i} = \frac{\Delta_i^2}{12}$ Con $\Delta_1 = \Delta_3 = 2^{-4}$ y $\Delta_2 = 2^{-8}$.
La potencia total del ruido en cada banda será entonces:

$$\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = \frac{1}{3}\frac{2^{-2\times 8}}{12} + \frac{2^{-2\times 4}}{12}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{3}\frac{2^{-2\times 8}}{12} + \frac{2^{-2\times 8}}{12}$$

La potencia de ruido en la detección será la suma de las potencias de los ruidos introducidos en cada banda. $\sigma_{total}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$

(g) La tasa de bits a la entrada del codificador es de 240 kbits/s, mientras que a la salida del mismo es 160 kbits/s. Notar que esta compresión no reduce la calidad percibida a pesar de que la SNR es menor.