Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

5 de octubre de 2004

Indicaciones:

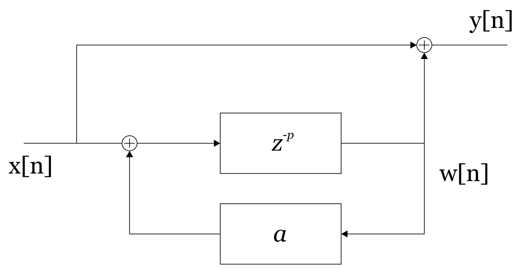
- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

Enunciar y demostrar el teorema del muestreo.

Problema 1 [15 pts.]

Considere el sistema SLIT causal de la figura, donde el parámetro p es un entero positivo y a es un real.



(a) Plantear las ecuaciones en recurrencia que representan al sistema.

(b) Probar que la respuesta en frecuencia del sistema es:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1 + (1-a)e^{-jp\theta}}{1 - ae^{-jp\theta}}$$

De ahora en más, se considera $p = 1$.

(c) Hallar y dibujar la respuesta al impulso del sistema.

(d) ¿Cómo se puede determinar si el sistema es estable? Hallar la condición que debe cumplir a para que el sistema sea estable.

Suponiendo que $x[n]$ e $y[n]$ son procesos estacionarios:

(e) Hallar el valor medio de la salida en función del valor medio de la entrada.

(f) Hallar $R_{xy}[m] = E\{x[n]y[n+m]\}$, correlación entre la entrada y la salida, en función de la autocorrelación de la entrada y de la respuesta al impulso del sistema.

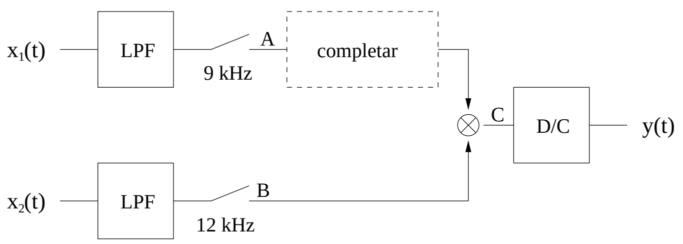
Se desea analizar cómo se comporta el sistema cuando la entrada $x[n]$ es ruido blanco gaussiano de potencia σ_x^2 y media nula.

(g) Hallar la potencia de la salida $y[n]$.

(h) Hallar la autocorrelación de la salida $y[n]$ en función de la respuesta al impulso del sistema.

Problema 2 [15 pts.]

Considere el sistema de la figura, que sirve para multiplicar señales de tiempo continuo usando un sistema de tiempo discreto.



(a) ¿Cuáles son los máximos anchos de banda admisibles en las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para no tener solapamiento al muestrear? Bosquejar los espectros en los puntos A y B indicados en la figura cuando

$$X_1(f) = \Pi\left(\frac{f}{3\text{ kHz}}\right) \quad \text{y} \quad X_2(f) = \Pi\left(\frac{f}{4\text{ kHz}}\right)$$

(b) Diseñar un sistema de conversión de frecuencias para incluir en el rectángulo punteado del diagrama, de forma de igualar las frecuencias de muestreo.

(c) Bosquejar el espectro en todos los puntos del sistema diseñado cuando x_1 y x_2 son las indicadas en la parte (a).

(d) Encontrar y bosquejar el espectro en el punto C indicado en la figura cuando x_1 y x_2 son las indicadas en la parte (a).

(e) ¿Qué condiciones deben cumplir W_1 y W_2, anchos de banda de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ respectivamente, para que $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$?

Solución

Pregunta

Ver teórico.

Problema 1

(a) Las ecuaciones en recurrencia que representan al sistema son:

$$y[n] = x[n] + w[n]$$
$$w[n] = x[n-p] + aw[n-p]$$

(b) Transformando las ecuaciones en recurrencia:

$$Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta}) + W(e^{j\theta})$$
$$W(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})e^{-jp\theta} + aW(e^{j\theta})e^{-jp\theta}$$
$$W(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})\frac{e^{-jp\theta}}{1 - ae^{-jp\theta}}$$

$$Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta}) + X(e^{j\theta})\frac{e^{-jp\theta}}{1 - ae^{-jp\theta}}$$

Entonces:

$$H(e^{j\theta}) = 1 + \frac{e^{-jp\theta}}{1 - ae^{-jp\theta}}$$
$$H(e^{j\theta}) = \frac{1 + (1-a)e^{-jp\theta}}{1 - ae^{-jp\theta}}$$

(c) Observando la primera ecuación en recurrencia, $y[n] = x[n] + w[n]$, podemos descomponer al filtro en la suma de dos partes: una con salida $x[n]$ y respuesta al impulso $\delta[n]$ y la que corresponde a $w[n]$ y que debemos encontrar su respuesta al impulso.
Como el sistema es causal, sabemos que $w[n] = 0$ para $n < 0$ cuando la entrada es el impulso. El resto de la respuesta la encontramos aplicando directamente la ecuación en recurrencia de $w[n]$:

$$w[n] = x[n-1] + aw[n-1].$$

$$w[0] = x[-1] + aw[-1] = 0 + 0 = 0$$
$$w[1] = x[0] + aw[0] = 1 + 0 = 1$$
$$w[2] = x[1] + aw[1] = 0 + a \cdot 1 = a$$
$$w[3] = x[2] + aw[2] = 0 + a \cdot a = a^2$$
$$w[4] = x[3] + aw[3] = 0 + a \cdot a^2 = a^3$$

Por inducción podemos demostrar que de aquí en más la respuesta es a^{n-1}, y el resultado completo es $w[n] = a^{n-1}u[n-1]$ cuando la entrada es el impulso.
Entonces, la respuesta al impulso del sistema completo es:

$$h[n] = \delta[n] + a^{n-1}u[n-1]$$

(d) Como el sistema es SLIT, y utilizando la condición necesaria y suficiente de estabilidad, alcanza con ver si la respuesta al impulso es absolutamente sumable.
Para que el sistema sea estable se debe cumplir:

$$1 + \sum_{i=1}^{+\infty} |a^{i-1}| < \infty.$$

Como es una serie geomética, para que esta sumatoria converja, se debe cumplir: $|a| < 1$.

(e)

$$E\{y[n]\} = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right\}$$

por linealidad de la esperanza:

$$E\{y[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\{x[k]\}h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m_x h[n-k]$$

$$E\{y[n]\} = m_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] = m_x(1 + \frac{1}{1-a}) = m_x \frac{2-a}{1-a}$$

(f)

$$R_{xy}[m] = E\{x[n]y[n+m]\} = E\left\{ x[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n+m-k]h[k] \right\}$$

Operando y aplicando linealidead de la esperanza:

$$R_{xy}[m] = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n+m-k]h[k] \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\{x[n]x[n+m-k]\}h[k]$$

$$R_{xy}[m] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_x[m-k]h[k] = R_x[m] * h[m]$$

(g) La potencia de la salida la podemos calcular integrando la densidad espectral de potencia:

$$E\{y^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta})|^2 \sigma_x^2 d\theta = \sigma_x^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

Aplicando Parseval:

$$E\{y^2[n]\} = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|^2 = \sigma_x^2 \left(1 + \frac{1}{1-a^2}\right) = \sigma_x^2 \frac{2-a^2}{1-a^2}$$

(h) Aplicando la deficinión de autocorrelación a la salida:

$$R_y[m] = E\{y[n]y[n+m]\} = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[n+m-l]h[l] \right\}$$

Operando y aplicando linealidad de la esperanza:

$$R_y[m] = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[n-k]x[n+m-l]h[k]h[l] \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} E\{x[n-k]x[n+m-l]\}h[k]h[l]$$

$$R_y[m] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} E\{x[n-k]x[n+m-l]\}h[k]h[l] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_x[m+k-l]h[k]h[l]$$

Como $R_x[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$

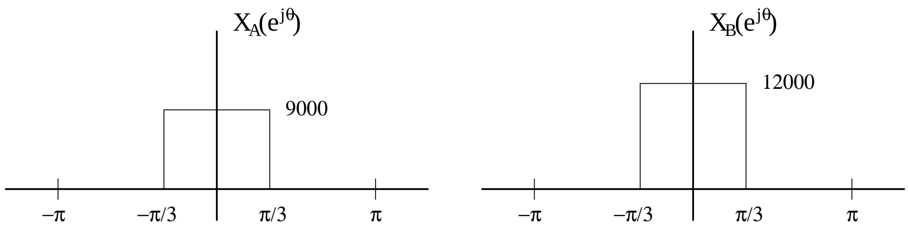
$$R_y[m] = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]h[m+k]$$

Problema 2

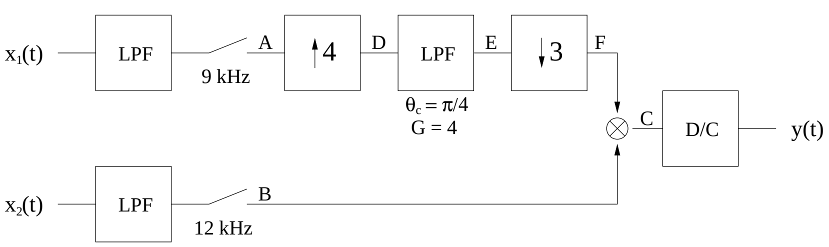
(a) Por teorema de muestreo podemos asegurar que no hay solapamiento si las señales a muestrear tiene un ancho de banda menor o igual a la mitad de la frecuencia de muestreo. En este caso implica que

$$W_1 \leq 4.5 \text{ kHz} \qquad W_2 \leq 6 \text{ kHz}.$$

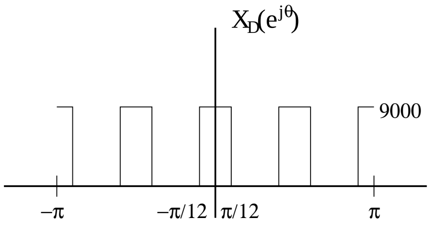
Los espectros pedidos son:

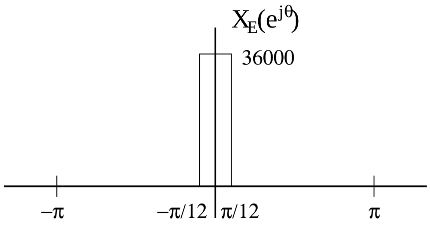


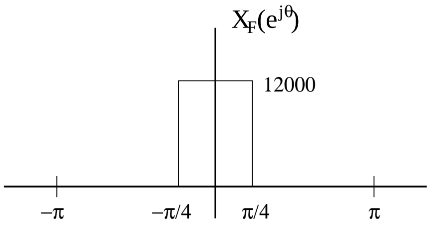
(b) El sistema completo es:



(c) Llamamos a los tres puntos intermedios del sistema D, E y F, y están indicados en la figura anterior. Los espectros son los siguientes:







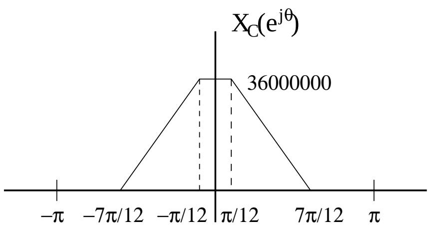
(d) La señal en C verifica

$$x_C[n] = x_F[n] \cdot x_B[n]$$

por lo tanto

$$X_C(e^{j\theta}) = X_F(e^{j\theta}) * X_B(e^{j\theta})$$

donde la convolución es circular. El resultado es



(e) Si no hay solapamiento o perdida de información en ninguna parte del sistema tendremos el resultado deseado. Los filtros evitan solapamiento en el muestreo, pero podría haber perdida de información si el ancho de banda de las señales es mayor que la frecuencia de corte de los filtros. Debemos imponer las condiciones encontradas en (a).

En la conversión de frecuencia no hay problemas.

El otro punto de riesgo es al multiplicar las señales. Como los espectros se convolucionan entre sí, el ancho de banda final será la suma de ambos, $W_1 + W_2$.

Si la frecuencia de muestreo final no es superior al doble de esto tendremos solapamiento y perderemos información.
La condiciones completas son:

$$W_1 \leq 4.5 \text{ kHz}, \qquad W_2 \leq 6 \text{ kHz} \quad \text{y} \quad W_1 + W_2 \leq 6 \text{ kHz}.$$