Muestreo y Procesamiento Digital
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

12 de diciembre de 2003

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [15 pts.]

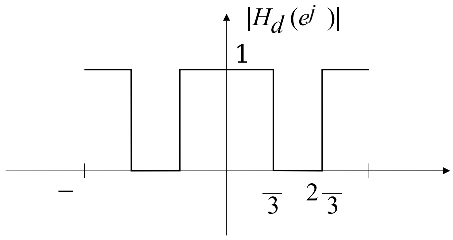
(a) Dar el modelo para errores en operaciones cuando la representación es con punto fijo y redondeo.

(b) Justificar el modelo y explicar en que condiciones es válido.

(c) Explicar por qué hay errores en las sumas en representación en punto flotante.

Problema 1 [25 pts.]

Se desea diseñar un filtro FIR suprime banda cuya respuesta en frecuencia (en módulo) se da en la figura siguiente



y cuya fase es $\angle\, H_d(e^{j\theta}) = 0$.
Como método de aproximación se utilizará el método de diseño de FIR por ventanas. Se utilizará una ventana rectangular de tamaño 9.

(a) Calcular la respuesta al impulso $h_d[n]$ cuyo espectro es el deseado, $H_d(e^{j\theta})$.

Sea $h_1[n]$ la respuesta del filtro de 9 coeficientes causal con respuesta frecuencial $H_1(e^{j\theta})$.

(b) Calcular los 9 coeficientes del filtro $h_1[n]$.

(c) Calcular el error cuadrático medio de la aproximación,

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|H_1(e^{j\theta}) - e^{-4j\theta}H_d(e^{j\theta})\right|^2 d\theta$$

Comparar con $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\theta})|^2 d\theta$.

(d) Dar el diagrama de bloques del filtro implementado en forma canónica.

(e) Las operaciones se realizan en punto fijo con redondeo, con 16 bits de parte fraccionaria. Calcular la potencia de ruido a la salida de este filtro debido a errores introducidos en las operaciones.

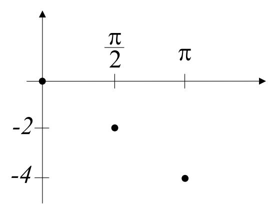
Problema 2 [20 pts.]

(a) Sea un filtro FIR de respuesta al impulso $h[n]$, nula para $n < 0$ y $n \geq N$, y con DTFT $H(e^{j\theta})$. Demostrar que

$$H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = H[k]$$

para $0 \leq k < N$ donde $H[k]$ es la DFT de $h[n]$ con $0 \leq n < N$.

(b) Diseñar un filtro FIR de 3 retardos con *coeficientes reales* cuya respuesta frecuencial pase por los 3 puntos indicados en la figura. Encontrar $h[n]$.



(c) Calcular la respuesta frecuencial obtenida.

(d) Plantear el modelo de errores en operaciones si se utiliza representación de punto flotante. Encontrar las componentes de señal y ruido en la salida.

Solución

Pregunta

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) Ver teórico.

Problema 1

(a) Para $n \neq 0$

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{2}{3}\pi} e^{jn\theta}d\theta + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} e^{jn\theta}d\theta + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} e^{jn\theta}d\theta\right] =$$

$$\frac{1}{n\pi}\left[\sin(n\pi) + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right]$$

Para $n = 0$,

$$h_d[0] = \frac{2}{3}$$

Otra forma de hacerlo es escribir $H_d(e^{j\theta}) = H_p(e^{j\theta}) + H_p(e^{j(\theta-\pi)})$, donde H_p es un pasabajos ideal de frecuencia de corte $\pi/3$. Entonces,

$$h_d[n] = h_p[n](1 + e^{jn\pi}).$$

Todo esto se puede resumir en

$$h_d[n] = \frac{1}{3}\text{sinc}(n/3)\,(1 + (-1)^n)$$

valida para todo n.

(b) Los coeficientes de $h_1[n]$ son iguales a $h_d[n-4]$ para $n = 0, \cdots, 8$.

$$h_1[n] = [-0.1378, 0, 0.2756, 0, \frac{2}{3}, 0, 0.2756, 0, -0.1378]$$

(c)

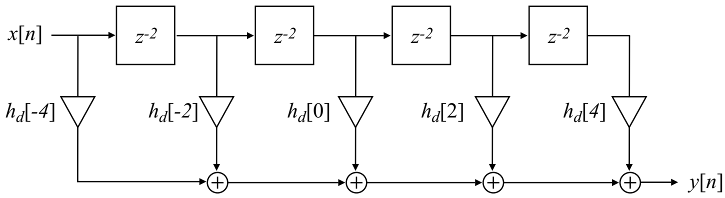
$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_1(e^{j\theta}) - e^{-4j\theta}H_d(e^{j\theta})\right|^2 d\theta = \sum_n |h_1[n] - h_d[n-4]|^2 =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} h_d[n-4]^2 + \sum_{n=9}^{\infty} h_d[n-4]^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n-4]^2 - \sum_{n=0}^{8} h_d[n-4]^2 =$$

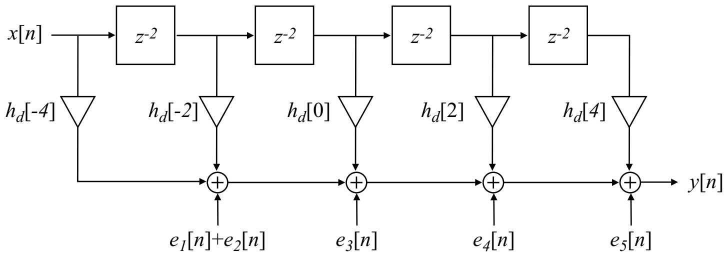
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H_d(e^{j\theta})|^2 d\theta - \sum_{n=-4}^{4} h_d[n]^2 = \left(\frac{2}{3} - 0.634\right) = 0.0327$$

$$\frac{E}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H_d(e^{j\theta})|^2 d\theta} \approx 0.05 = 5\,\%$$

(d)



(e) Si aplicamos el modelo de errores en punto fijo obtenemos el siguiente esquema:



donde $e_1[n]$, $e_2[n]$, $e_3[n]$, $e_4[n]$, $e_5[n]$, son procesos blancos, independientes, de media nula y potencia σ^2. La componente de ruido es

$$r[n] = e_1[n] + e_2[n] + e_3[n] + e_4[n] + e_5[n]$$

que tiene potencia

$$N = E\Big\{(e_1[n] + e_2[n] + e_3[n] + e_4[n] + e_5[n])^2\Big\}.$$

Como son términos independiente y de media nula esto es

$$N = E\{e_1^2[n]\} + E\{e_2^2[n]\} + E\{e_3^2[n]\} + E\{e_4^2[n]\} + E\{e_5^2[n]\}$$
$$N = 5\sigma^2$$

Problema 2

(a)

$$H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = H(e^{j\theta})\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jn\theta}\Bigg|_{\theta=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = H[k]$$

(b) Como el filtro es de coeficientes reales su espectro es simétrico, por lo tanto $H(e^{j\pi/2}) = -2$. Sea $H[k] = -2\delta[k-1] - 4\delta[k-2] - 2\delta[k-3]$. Si imponemos que $H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = H[k]$ para $0 \leq k < N$ obtenemos lo que queremos. Entonces, alcanza con elegir $h[n] = \mathrm{DFT}^{-1}\big\{H[k]\big\}$. Por lo tanto,

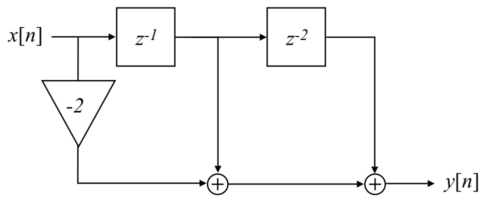
$$h[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} H[k]e^{j\frac{2\pi}{4}nk} = -\frac{2}{4}\left(e^{j\frac{\pi}{2}n} + 2e^{j\pi n} + e^{j\frac{3\pi}{2}n}\right).$$

$h[0] = \frac{-2-4-2}{4} = -2$
$h[1] = \frac{-2e^{j\frac{\pi}{2}} - 4e^{j\pi} - 2e^{j\frac{3\pi}{2}}}{4} = 1$
$h[2] = \frac{-2e^{j\pi} - 4e^{j2\pi} - 2e^{j3\pi}}{4} = 0$
$h[3] = \frac{-2e^{j\frac{3\pi}{2}} - 4e^{j3\pi} - 2e^{j\frac{9\pi}{2}}}{4} = 1$

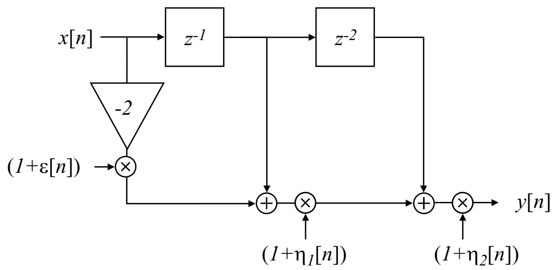
(c)

$$H(e^{j\theta}) = -2 + (e^{-j\theta} + e^{-j3\theta}) = 2e^{-2j\theta}\cos(\theta) - 2$$

(d) El filtro que tenemos es,



aplicando el modelo de error con punto flotante queda:



La salida es

$$y[n] = (1+\eta_2[n])\left[x[n-3] + (1+\eta_1[n])\Big(x[n-1] - 2(1+\epsilon[n])x[n]\Big)\right],$$

que se puede ordenar de la siguiente forma:

$$y[n] = \underbrace{s[n]}_{\text{señal}} + \underbrace{r[n]}_{\text{ruido}}$$

donde

$$s[n] = -2x[n] + x[n-1] + x[n-3]$$

$$r[n] = -2x[n]\Big[(1+\epsilon[n])(1+\eta_1[n])(1+\eta_2[n]) - 1\Big] +$$

$$+x[n-1]\Big[(1+\eta_1[n])(1+\eta_2[n]) - 1\Big] + x[n-3]\eta_2[n]$$