Muestreo y Procesamiento Digital
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

20 de octubre de 2003

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

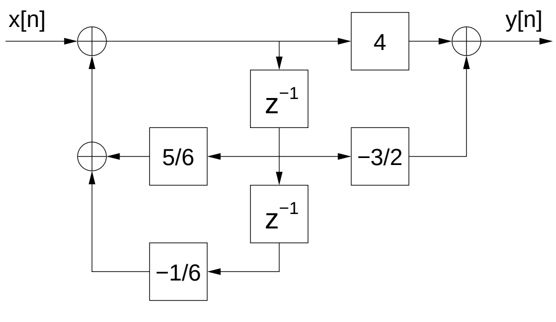
(a) Dar una condición necesaria y suficiente de estabilidad de filtros digitales, en función de su respuesta al impulso.

(b) Demostrar que la condición es necesaria.

(c) Demostrar que la condición es suficiente.

Problema 1 [15 pts.]

Se considera el filtro digital de la figura (los bloques z^{-1} son retardos de una muestra):



(a) Encontrar ecuaciones en diferencias que caractericen completamente al sistema.

(b) Calcular la respuesta frecuencial del filtro.

(c) Calcular la respuesta al impulso del filtro.

(d) Estudiar la estabilidad de este sistema.

(e) Al filtro ingresa una secuencia de valores independientes, todos distribuidos uniformemente entre ± 1. Calcular la potencia de la señal de salida $y[n]$.

Problema 2 [15 pts.]

En este problema se estudiará el efecto de usar un muestrador defectuoso que pone a cero una de cada 3 muestras.

(a) Sea $x_c(t)$ una señal de ancho de banda $1/2T$ y $x_1[n] = x_c(nT)$. Encontrar el espectro de $x_1[n]$ en función de $X_c(f)$, espectro de $x_c(t)$. Bosquejar módulo y fase en el caso $X_c(f) = \Lambda(2Tf)$.

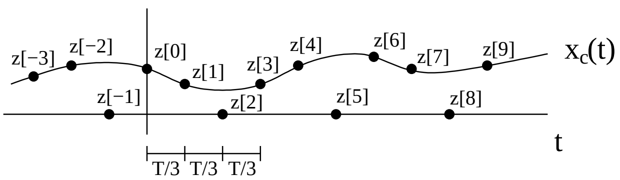
(b) Sea $x_2[n] = x_c(nT + T/3)$. Encontrar el espectro de $x_2[n]$. Bosquejar módulo y fase en el caso $X_c(f) = \Lambda(2Tf)$.

(c) Sea $w[n]$ una secuencia con espectro $W(e^{j\theta})$. Encontrar, en función de $W(e^{j\theta})$, el espectro de $\hat{w}[n]$ definida por

$$\mathrm{w[n]} \longrightarrow \boxed{\uparrow 3} \longrightarrow \hat{\mathrm{w}}\mathrm{[n]} \qquad \text{o sea} \qquad \hat{w}[n] = \begin{cases} w[i] & n = 3i \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

(d) Encontrar el espectro de $\hat{x}_1[n]$ y $\hat{x}_2[n]$, resultado de aplicar la operación de la parte anterior a $x_1[n]$ y $x_2[n]$ respectivamente. Bosquejar módulo y fase en el caso que $X_c(f) = \Lambda(2Tf)$.

(e) Sea $z[n]$ el resultado de muestrar $x_c(t)$ a frecuencia $3/T$ pero utilizando un muestrador defectuoso, de forma que una de cada 3 muestras son cero como lo indica la siguiente figura.



Encontrar el espectro de $z[n]$. Bosquejar módulo y fase en el caso que $X_c(f) = \Lambda(2Tf)$.
Sugerencia: verificar que $z[n] = \hat{x}_1[n] + \hat{x}_2[n-1]$.

(f) ¿Se puede recuperar $x_c(t)$ de $z[n]$ de alguna forma? Justificar.

Solución

Problema 1

(a) Llamando $w[n]$ a la señal que ingresa al tren de retardos, queda:

$$y[n] = 4w[n] - \frac{3}{2}w[n-1]$$

$$x[n] = w[n] - \frac{5}{6}w[n-1] + \frac{1}{6}w[n-2]$$

(b) Tomando transformadas de Fourier de las 2 ecuaciones anteriores, y sabiendo que $H(e^{j\theta}) = Y(e^{j\theta})/X(e^{j\theta})$, se obtiene:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{4 - \frac{3}{2}e^{-j\theta}}{1 - \frac{5}{6}e^{-j\theta} + \frac{1}{6}e^{-j2\theta}}$$

(c) La respuesta frecuencial se puede descomponer en 2 fracciones simples de la siguiente manera:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\theta}} + \frac{3}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}}$$

La respuesta al impulso se deduce directamente:

$$h[n] = u[n]\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3u[n]\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(d) El sistema es estable, ya que $|h[n]|$ es sumable (son dos geométricas con módulo del factor menor que 1).

(e) La señal de entrada tiene valor medio 0, potencia[1] $\sigma_x^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{3}$. Por ser independientes, la autocorrelación es $R_x[n] = \frac{1}{3}\delta[n]$. Su densidad espectral será entonces $G_x(e^{j\theta}) = \frac{1}{3}$.
La potencia a la salida será $\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} G_y((e^{j\theta})d\theta$, donde $G_y((e^{j\theta}) = |H|^2 G_x$.
Por lo tanto queda $\sigma_y^2 = \frac{1}{3}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |H(e^{j\theta})|^2 d\theta$.
Por Parseval, $\sigma_y^2 = \frac{1}{3}\sum_n |h[n]|^2$.

$$|h[n]|^2 = u[n]((1/9)^n + 9(1/4)^n + 6(1/6)^n)$$

Calculando las 3 series geométricas resultantes, queda:

$$\sigma_y^2 = 6.775$$

[1] También se puede calcular $\sigma_x^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 F(dx)$, donde F es la distribución de probabilidades, con densidad $\frac{1}{2}\Pi(x/2)$.

Problema 2

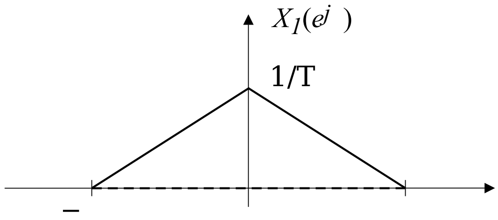
(a) Del curso sabemos que al muestrear una señal con frecuencia $1/T$, el espectro que obtenemos es

$$X_1(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{\theta - k2\pi}{2\pi T}\right).$$

Es conveniente usar la siguiente notación más compacata,

$$X_1(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}X_c\left(\frac{\theta}{2\pi T}\right) \qquad |\theta| \leq \pi$$

donde está implícito que $X_1(e^{j\theta})$ es periódica de período 2π y que no hay solapamiento.



(b) Conviene escribir $x_2[n]$ como

$$x_2[n] = x_c'(nT) \qquad \text{donde} \qquad x_c'(t) = x_c(t + T/3)$$

y aplicando lo mismo que antes obtenemos

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c'\left(\frac{\theta - k2\pi}{2\pi T}\right).$$

De las propiedades básicas de la transformada de Fourier se obtiene que

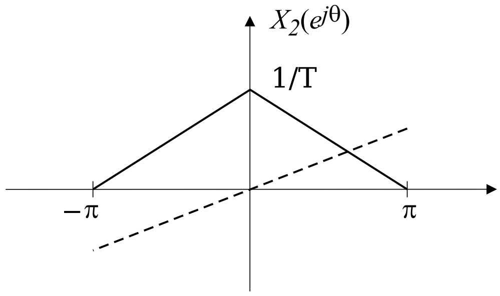
$$X_c'(f) = X_c(f)e^{j2\pi fT/3}.$$

El resultado final es

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)e^{j\frac{\theta - k2\pi}{3}}.$$

En la notación compacta,

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}X_c\left(\frac{\theta}{2\pi T}\right)e^{j\theta/3} \qquad |\theta| \leq \pi.$$



(c)

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = \sum_k \hat{w}[k]e^{-jk\theta}$$

Los únicos terminos no nulos son aquellos en que k es multiplo de 3. Por lo tanto podemos escribir,

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = \sum_i \hat{w}[3i]e^{-j3i\theta}$$

y aplicando la definición de $\hat{w}[n]$ obtenemos

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = \sum_i w[i]e^{-j3i\theta}.$$

Esta última expresión es identica a la la definición de $W(e^{j\theta})$ pero evaluada en 3θ. Por lo tanto,

$$\hat{W}(e^{j\theta}) = W(e^{j3\theta}).$$

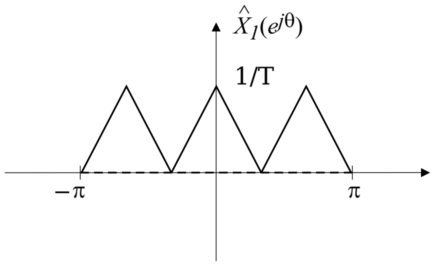
No debemos olvidar que $W(e^{j\theta})$ es periódica de período 2π. En un período de $\hat{W}(e^{j\theta})$ tendremos entonces 3 períodos de $W(e^{j\theta})$.

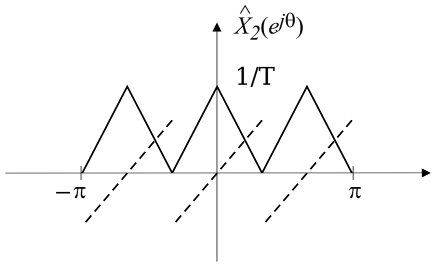
(d) Aplicando lo anterior,

$$\hat{X}_1(e^{j\theta}) = X_1(e^{j3\theta}) \qquad \hat{X}_2(e^{j\theta}) = X_2(e^{j3\theta}).$$

$$\hat{X}_1(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{3\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)$$

$$X_2(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{3\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)e^{j\left(\theta - \frac{2}{3}\pi k\right)}.$$





(e) Revisando cuidadosamente las expresiones obtenemos

$$\hat{x}_1[n] + \hat{x}_2[n-1] = \begin{cases} x_c(iT) & n = 3i \\ x_c(iT + T/3) & n = 3i+1 \\ 0 & n = 3i+2 \end{cases}$$

que corresponde con

$$\hat{x}_1[n] + \hat{x}_2[n-1] = \begin{cases} x_c(nT/3) & n = 3i \\ x_c(nT/3) & n = 3i+1 \\ 0 & n = 3i+2 \end{cases}$$

que es un muestreo de $x_c(t)$ a frecuencia $3/T$ donde las muestras $n = 3i + 2$ con i entero están forzadas a cero, y esto es lo que queremos analizar.

Para encontrar el espectro final resta ver que el espectro de $\hat{x}_2[n-1]$ es $\hat{X}_2(e^{j\theta})e^{-j\theta}$, que se obtiene de las propiedades de la DTFT. Finalmente, aplicando la linealidad de DTFT

$$Z(e^{j\theta}) = \hat{X}_1(e^{j\theta}) + \hat{X}_2(e^{j\theta})e^{-j\theta}.$$

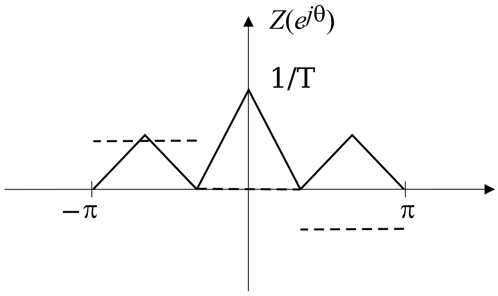
Sustituyendo todo obtenemos,

$$Z(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{3\theta - k2\pi}{2\pi T}\right)(1 + e^{-j\frac{2}{3}\pi k}).$$

En el período principal es

$$Z(e^{j\theta}) = X_c\left(\frac{3\theta + 2\pi}{2\pi T}\right)\frac{(1 + e^{j2\pi/3})}{T} + \frac{2}{T}X_c\left(\frac{3\theta}{2\pi T}\right) + X_c\left(\frac{3\theta - 2\pi}{2\pi T}\right)\frac{(1 + e^{-j2\pi/3})}{T}$$

$$|\theta| \leq \pi.$$



(f) Sí. Usando un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte $\pi/3$ obtenemos la secuencia que resultaría de un muestreo sin errores, a menos de una constante. Como la señal original cumple el teorema del muestreo se puede recuperar usando un reconstructor ideal.

Por otro lado, es claro que debe ser posible pues $x_1[n]$ y $x_2[n]$ cumplen cada una el teorema de muestreo y por lo tanto la señal se podría reconstruir a partir de cualquiera de ellas individualmente.