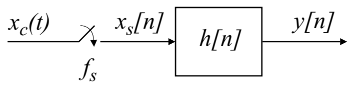
# Multiple Personality Disorder

1 de Noviembre de 2002

*Este es un conjunto de 3 ejercicios tomados de los parciales de MPD de años anteriores; no constituye un parcial en su globalidad. El objetivo es que tengan ejemplos de ejercicios de evaluación y puedan autoevaluarse contra un nivel.*

## Ejercicio 1

Sean $x_s[n]$ una secuencia obtenida a partir de las muestras de un proceso estocástico real, estacionario de tiempo continuo $x_c(t)$, muestreado con una frecuencia $f_s = 1/T_s$.




1. [2 pts.] Hallar una expresión para la autocorrelación de $x_s$, $R_{x_s}[n]$, en función de la autocorrelación de $x_c(t)$, $R_{x_c}(\tau)$

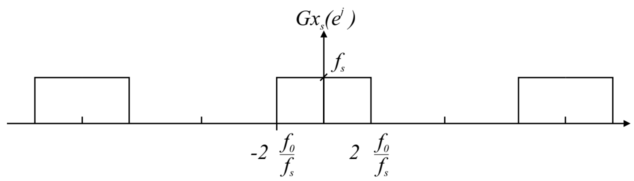
   *Solución:*

   $$R_{x_s}[n] = E\{x_s[m]x_s[m+n]\} = E\{x_c(mT_s)x_c((m+n)T_s)\}$$

   $$R_{x_s}[n] = R_{x_c}(nT_s)$$

2. [4 pts.] Sea $G_{x_c}(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$ la densidad espectral de $x_c(t)$. Hallar todas las posibles frecuencias de muestreo de forma que no haya solapamiento en la densidad espectral de $x_s[n]$, $G_{x_s}(e^{j\theta})$. Bosquejar $G_{x_s}(e^{j\theta})$ indicando las características (altura, frecuencia particulares, etc.)

   *Solución:* $R_{x_c}(\tau)$ es una señal de banda acotada en $f_o$ ($w_o = 2\pi f_o$). Según el teorema de muestreo, para no tener solapamiento debemos utilizar una frecuencia de muestreo $f_s \geq 2f_o$.



3. [4 pts.] Hallar $R_{x_s}[n]$, en las condiciones de la parte 2.

   *Solución:* $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s \Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ donde $\theta_o = 2\pi \frac{f_o}{f_s}$

$$R_{x_s}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_{x_s}(e^{j\theta})e^{jn\theta}d\theta = \frac{f_s}{2\pi}\int_{-\theta_o}^{\theta_o} e^{jn\theta}d\theta$$

$$= \frac{f_s}{2\pi}\left.\frac{e^{jn\theta}}{jn}\right|_{-\theta_o}^{\theta_o} = f_s\frac{e^{jn\theta_o} - e^{-jn\theta_o}}{j2\pi n} = f_s\frac{sen(\theta_o n)}{\pi n}$$

Las muestras $x_s[n]$ son filtradas con un filtro discreto de respuesta frecuencial $H(e^{j\theta})$.

4. [1 pts.] Dar una expresión (sin demostrar) para la densidad espectral de la salida del filtro, $y[n]$, $G_y(e^{j\theta})$.

   *Solución:* $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta})$

5. [4 pts.] Hallar la autocorrelación de la señal de salida, $R_y[n]$, de los siguientes filtros en función de los parámetros del problema.

   *a*) definido por la ecuación de recurrencia: $y[n] = x_s[n] - a\, x_s[n-1]$

   *Solución:*

   $R_y[n] = E\{y[m]y[m+n]\} = E\{(x_s[m]-ax_s[m-1])(x_s[m+n]-ax_s[m+n-1])\} =$

   $E\{x_s[m]x_s[m+n]\}-aE\{x_s[m-1]x_s[m+n]\}-aE\{x_s[m]x_s[m+n-1]\}+a^2E\{x_s[m-1]x_s[m+n-1]\}$

$$= (1+a^2)R_{x_s}[n] - a(R_{x_s}[n+1] + R_{x_s}[n-1])$$

$$R_y[n] = (1+a^2)f_s\frac{sen(\theta_o n)}{\pi n} - a\, f_s\left(\frac{sen(\theta_o(n+1))}{\pi(n+1)} + \frac{sen(\theta_o(n-1))}{\pi(n-1)}\right)$$

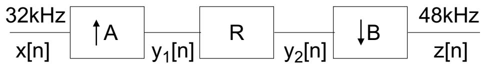
   *b*) de transferencia $H(e^{j\theta}) = \Pi\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)$, con $\theta_0 f_s = \omega_0$.

   *Solución:* $G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s\Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_o}\right)$ con lo que $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 G_{x_s}(e^{j\theta}) = f_s\Pi\left(\frac{\theta}{\theta_o}\right)$ y tiene la misma forma que la densidad espectral de potencia con que trabajamos en la parte 3. Si repetimos la cuentas obtenemos:

$$R_y[n] = f_s\frac{sen\left(\frac{\theta_o}{2}n\right)}{\pi n}$$

# Ejercicio 2

La señal $x[n]$ que tiene densidad espectral de potencia $G_x(\theta) = \Lambda(\frac{\theta}{\pi})$, debe ingresar a otro sistema de tiempo discreto que trabaja a frecuencia $f_s' = 48$kHz. Para ello, se propone el siguiente sistema para alterar la frecuencia de muestreo:



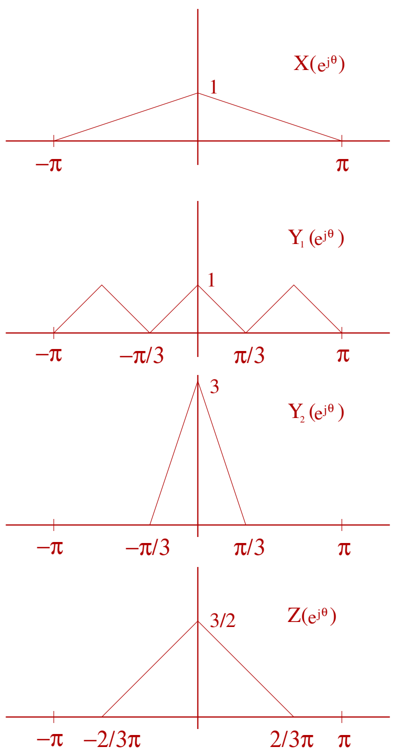

El bloque $\boxed{\uparrow\mathrm{A}}$ es un expansor (entre dos muestras consecutivas de la entrada, agrega $A-1$ muestras nulas), $R$ es un filtro digital, y $\boxed{\downarrow\mathrm{B}}$ es un compresor (devuelve una de cada B muestras).

1. [4 pts.] Evaluar los parámetros $A$ y $B$ e indicar las características deseadas del filtro $R$.

   *Solución:* Los $A$ y $B$ menores que podemos usar son 3 y 2, respectivamente, ya que
$$\frac{f_s'}{f_s} = \frac{A}{B} = \frac{48\text{kHz}}{32\text{kHz}} = \frac{3}{2}$$
   El filtro $R$ es igual a la composición de dos filtros: $H_1$ necesario para interpolar las muestras luego del expansor y $H_2$ para prevenir solapamiento en el compresor.
$$H_1(e^{j\theta}) = 3 \cdot \Pi\left(\frac{\theta}{2/3 \cdot \pi}\right) \qquad H_2(e^{j\theta}) = \Pi\left(\frac{\theta}{\pi}\right)$$
   por lo que
$$R(e^{j\theta}) = H_1(e^{j\theta}) \cdot H_2(e^{j\theta}) = 3\Pi\left(\frac{\theta}{2/3 \cdot \pi}\right)$$

2. [4 pts.] Graficar el espectro en todos los puntos ($y$, $y_1$, $y_2$, $z$).

   *Solución:*



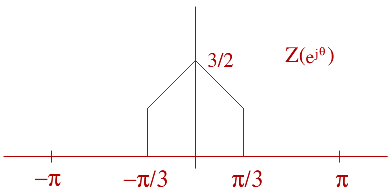
3. [2 pts.] Dar la respuesta al impulso del filtro $R$.

*Solución:* En la parte 1 encontramos la respuesta frecuencial del filtro $R$, la respuesta al impulso se encuentra antitransformando:

$$r[n] = \frac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{\pi n}$$

4. [2 pts.] ¿Se podría utilizar el bloque compresor antes del bloque expansor?

*Solución:* Si usáramos el compresor antes del expansor, y filtros adecuados antes del compresor y despues del expansor, obtendríamos




que es correcto en el rango de frecuencias de $-\pi/3$ a $\pi/3$ pero no hay forma de lograr una solución para todo $\theta$ con los bloques en este orden.

# Ejercicio 3

Sea $x_c(t)$ un proceso estocástico en tiempo continuo, estacionario en sentido amplio. Este proceso se muestrea a una tasa $T$ para obtener el proceso estocástico discreto $x[n] = x_c(nT)$.

1. [2 pts.] Probar que el proceso discreto es *Estacionario en Sentido Amplio*.

*Solución:* Hay que probar que $E\{x[n]\}$ y $E\{x[n]x[n+m]\}$ son independientes de $n$. Pero

$$E\{x[n]\} = E\{x_c(nT)\} = m_{x_c}$$
$$E\{x[n]x[n+m]\} = E\{x_c(nT)x_c((n+m)T)\} = R_{x_c}(mT)$$

independientes de $n$ por ser $x_c$ estacionario en sentido amplio.

2. [3 pts.] Si $h_d[n]$ es un **SLIT** estable y $x[n]$ es su entrada, probar que la salida es *Estacionaria en Sentido Amplio*.
Expresar la autocorrelación del proceso de salida en función de la autocorrelación del proceso de entrada y de $h_d[n]$.

*Solución:*

$$E\{y[n]\} = E\left\{\sum_k h_d[k]x[n-k]\right\} = \sum_k h_d[k]E\{x[n-k]\} = m_x \sum_k h_d[k]$$

$$E\{y[n]y[n+m]\} = E\left\{\sum_k h_d[k]x[n-k]\sum_j h_d[j]x[n+m-j]\right\} =$$

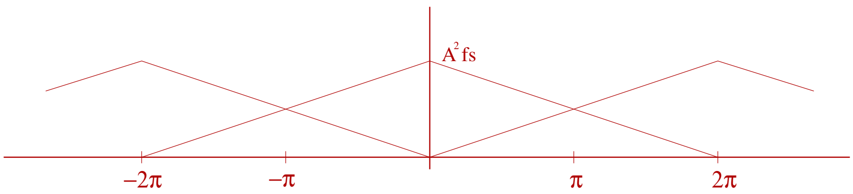
$$= \sum_k\sum_j h_d[k]h_d[j]E\{x[n-k]x[n+m-j]\} = \sum_k\sum_j h_d[k]h_d[j]R_x[m+k-j]$$

Ambas expresiones son independientes de $n$, lo que muestra que la salida $y[n]$ es estacionaria en sentido amplio. La autocorrelación en la salida es

$$R_y[m] = \sum_k\sum_j h_d[k]h_d[j]R_x[m+k-j]$$

3. [2 pts.] Si $G_{x_c}(f) = A^2\,\Lambda(f/f_0)$, hallar el mínimo $T$ para el cual el proceso discreto $x[n]$ es *blanco*. Hallar su **potencia** $P_x$.

   *Solución:* La frecuencia de muestreo mínima para que el proceso discreto $x[n]$ sea blanco es aquella en que hay solapamiento de tal forma que la densidad espectral de pontencia de $x$ es




   Para esto $f_s = f_o$, por lo que

$$T_{\text{min}} = \frac{1}{f_o}$$

   La densidad espectral de potencia y potencia resultante es

$$G_x(e^{j\theta}) = A^2 f_o \qquad\qquad P_x = A^2 f_o$$

De ahora en más el filtro $h_d[n]$ tiene respuesta frecuencial dada por $H_d(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}\left(1 - a\,e^{-j\theta}\right)^{-1}$ donde $0 < a < 1$.

4. [3 pts.] Si $y[n]$ es la respuesta de este filtro a la entrada $x[n]$, para $T$ *en las condiciones de la parte anterior*; hallar explícitamente la **potencia** $P_y$ del proceso de salida $y[n]$.

   *Solución:* En estas condiciones $G_x(e^{j\theta}) = A^2 f_o$ y por lo tanto

$$P_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\theta})|^2 A^2 f_o\,d\theta = A^2 f_o \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

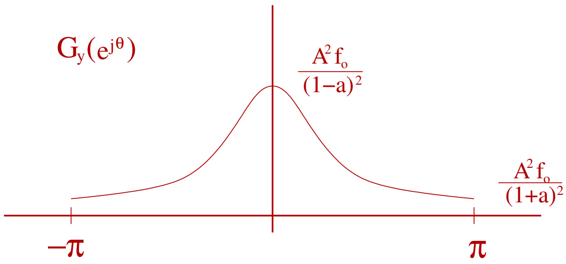
   Se puede ver facilmente que $h_d[n] = a^{n-1}u[n-1]$ y utilizando el teorema de Parseval podemos escribir

$$P_y = A^2 f_o \sum_k \left|a^{k-1}u[k-1]\right|^2 = \frac{A^2 f_o}{1-a^2}$$

5. [2 pts.] Bosqueje la *Densidad Espectral de Potencia*, $G_y(e^{j\theta})$ del proceso $y[n]$.

*Solución:*

$$G_y(e^{j\theta}) = |H_d(e^{j\theta})|^2 G_x(e^{j\theta}) = \frac{A^2 f_o}{|1 - ae^{-j\theta}|^2}$$




6. [3 pts.] Hallar explícitamente $R_y[n]$ la *autocorrelación* del proceso $y[n]$, a partir de los resultados de la parte 2.

*Solución:* Por el resultado de la parte 2,

$$R_y[m] = \sum_k \sum_j h_d[k]h_d[j]R_x[m+k-j] = A^2 f_o \sum_k \sum_j h_d[k]h_d[j]\delta[m+k-j]$$

$$R_y[m] = A^2 f_o \sum_k h_d[k]h_d[m+k]$$

Miramos ahora cuando $m \geq 0$, el otro lado es simétrico.

$$R_y[m] = A^2 f_o \sum_{k=0}^{+\infty} a^k a^{k+m} = \frac{A^2 f_o}{1-a^2} a^m \quad m \geq 0$$

La expresión completa es

$$R_y[m] = \frac{A^2 f_o}{1-a^2} a^{|m|}$$