4.5 La ecuación del calor en un intervalo

En esta sección nos ocuparemos de estudiar las soluciones de la ecuación

$$u_t = u_{xx},$$

conocida como *ecuación del calor*. Esta ecuación es un modelo para la evolu ción de la temperatura debida al fenómeno de conducción del calor. La varia ble x representa la posición en el espacio, t el tiempo y $u(x,t)$ la temperatura del medio en el punto x y el instante t. Cuando la distribución de temperatu ras es esencialmente unidimensional (por ejemplo, cuando puede despreciarse la variación de temperatura en todas las direcciones menos en una, o en una barra delgada en la que algunas dimensiones del problema pueden no tomarse en cuenta) la variable x es un número real. En lo que sigue nos limitaremos a considerar este caso. Los detalles acerca de una derivación de la ecuación del calor pueden verse en el apéndice, sección B.2, página xxiii. Para investigar el comportamiento de las soluciones de esta ecuación utilizaremos el método de *separación de variables*. Este método nos llevará a introducir las series trigonométricas, o *series de Fourier*, que serán el tema central del capítulo 5.

4.5.1 Problemas de valores iniciales y de contorno para la ecuación del calor en un intervalo

Nos ocuparemos ahora de la resolución del siguiente problema de valores ini ciales y de contorno, al que llamaremos *problema de Cauchy Dirichlet para la ecuación del calor* : hallar una función continua

$$u : [0,L] \times [0,+\infty) \to \mathbf{R},$$

que sea de clase C^2 en el interior $(0,L)\times(0,+\infty)$ de su dominio, y que satisfaga

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,L], \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \in [0,\infty). \end{cases} \tag{4.70}$$

Supondremos que u_0 es continua y que se satisface la condición de compatibi lidad

$$u_0(0) = u_0(L) = 0$$

entre los datos iniciales y de contorno. Más adelante incluiremos alguna gene ralización para incluir datos de contorno no triviales.

Para tener una notación un poco más cómoda llamaremos Ω al conjunto abierto

$$(0,L) \times (0,+\infty).$$

Su clausura es

$$\bar{\Omega} = [0,L] \times [0,+\infty)$$

y su frontera es

$$\partial\Omega = \{(0,t); t \geq 0\} \cup \{(L,t); t \geq 0\} \cup \{(x,0); 0 \leq x \leq L\}.$$

Observación 4.5.1. REGULARIDAD, CONDICIONES INICIALES
Especificar la regularidad que debe tener la función u forma parte del plan teamiento del problema.

En el caso de la ecuación del calor es necesario que existan las derivadas parciales u_t y u_{xx} en Ω para que la igualdad $u_t = u_{xx}$ tenga sentido. Algo análogo ocurre para la ecuación de ondas, que contiene las derivadas u_{tt} y u_{xx} en su formulación. Pero también se puede dar a estas igualdades un sentido débil que no requiere tanta regularidad. Sobre esta segunda posibilidad ver la sección dedicada a las soluciones débiles de la ecuación de Burgers, sección 4.1.4, página 292, o la noción de derivada débil que se introduce en la definición 5.1, página 375.

La exigencia de continuidad de u hasta el tiempo $t = 0$ es una manera de vincular la condición inicial con el comportamiento posterior de la solución. Si nos limitáramos a pedir $u(x,0) = u_0(x)$, sin imponer la continuidad de u, entonces u podría tomar en $t > 0$ valores que no tienen nada que ver con el dato inicial. Sin embargo, también es posible considerar soluciones menos regulares e imponer de una manera diferente que se satisfaga la condición inicial. Esto da lugar a un problema diferente que también tiene sentido considerar. Ver, al respecto, el ejercicio 5.23, página 387.

Por último, digamos que aunque hace falta exigir cierta regularidad para poder dar una noción de solución que tenga sentido, lo más deseable es colocar los menores requisitos de regularidad posibles al formular el problema, pero demostrar luego que los soluciones son aún más regulares. Por ejemplo, vere mos que las soluciones de la ecuación del calor son en realidad de clase C^∞ en Ω. Pero para otras ecuaciones, entre ellas la de ondas, existen límites para la regularidad que pueden alcanzar las soluciones y puede ocurrir que no haya más regularidad que la que impone la noción de solución que se esté manejan do. O incluso que haya que formular el problema de alguna forma que exija menos regularidad para poder asegurar la existencia de soluciones. ♣

En el apéndice B.2, página xxiii, se muestra como surge el problema de Cauchy Dirichlet para la ecuación del calor al considerar la evolución de la temperatura de una barra delgada de longitud L, aislada del exterior salvo en los extremos que se mantienen a temperatura constante e igual a 0. Observe mos que la frontera del conjunto Ω tiene una parte lateral, que corresponde a los extremos de la barra en $x = 0$ y $x = L$, sobre los que hemos fijado la condición $u \equiv 0$, y la parte contenida en $\{t = 0\}$, en la que prescribimos la condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$ que representa el perfil inicial de temperatu ras en la barra. La elección de la frontera de Ω para fijar los datos de contorno, y del tipo de datos escogidos, surge entonces de considerar la situación física que pretendemos modelar. Veamos ahora que es lo que nos dice lo que hemos aprendido sobre las ecuaciones de segundo orden. En primer lugar, no es difícil verificar que las curvas características nos son de muy poca ayuda en esta situación. En realidad, el problema que hemos planteado es característico, porque hemos fijado el dato inicial u_0 sobre un intervalo contenido en $\{t = 0\}$, y las curvas $t =$ cte. son características para la ecuación del calor. En segundo lugar, a pesar de que se trata de una ecuación de orden 2, sólo hemos dado datos para u sobre el contorno, sin hacer mención a los valores de u_x. Sin embargo, la interpretación física de lo que estamos haciendo sugiere que el problema planteado tiene sentido. Veremos además que este problema tiene existencia y unicidad de soluciones, por lo que quedaría sobredeterminado si pretendiéramos fijar los valores de u_x en los extremos de la barra, además de los de u. Por lo tanto, tendremos que buscar otros métodos para estudiarlo, que serán necesariamente diferentes de los que usamos para resolver la ecuación de ondas.

4.5.2 El método de separación de variables para la ecuación del calor en una barra

Comenzaremos por buscar soluciones particulares que podamos calcular más o menos directamente. Veremos que al hacerlo el problema se reduce a resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. A pesar de que buscar algunas soluciones particulares parece algo muy modesto cuando queremos resolver un problema general veremos que este enfoque es particularmente fructífero en este caso. Vale la pena mencionar además que en general es útil disponer de soluciones particulares por varias razones:

1. siempre es conveniente disponer de ejemplos para ilustrar una teoría.
2. En muchos casos es posible conjeturar propiedades generales de las soluciones a partir de algunos ejemplos bien escogidos.
3. En muchos procesos de difusión las soluciones explícitas (o casi explícitas) describen el comportamiento de clases muy grandes de soluciones, en particular comportamientos asintóticos, comportamiento cerca de singularidades, etc.
4. Las ecuaciones parabólicas y elípticas tienen propiedades de comparación que pueden explotarse recurriendo a soluciones explícitas conocidas (un ejemplo de estos principios de comparación aparecerá en la sección 4.6, dedicada al principio del máximo para la ecuación del calor).
5. Si estamos interesados en la resolución numérica de las ecuaciones, los ejemplos explícitos pueden utilizarse para estudiar la eficacia de los algoritmos.

Dado que la mayor dificultad viene de que aparecen las dos variables x y t en la ecuación comenzaremos por intentar eludirla *separando las variables*, es decir, buscando soluciones de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad x \in [0,L], \quad t \in [0,\infty). \tag{4.71}$$

Al calcular las derivadas que aparecen en la ecuación del calor obtenemos

$$u_t(x,t) = X(x)T'(t), \quad u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t), \tag{4.72}$$

donde las funciones X y T están derivadas respecto a x y t respectivamente. Al sustituir en la ecuación concluimos que debe verificarse

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t), \quad x \in (0,L),\ t \in (0,\infty). \tag{4.73}$$

Dividiendo entre $u = XT$ obtenemos

$$T'(t)/T(t) = X''(x)/X(x), \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,\infty). \tag{4.74}$$

Como el término de la derecha en (4.74) sólo depende de x y el de la izquier da de t, y ambas variables son independientes, entonces ambos lados de la igualdad tienen que ser iguales a una constante λ. En resumen, para obtener soluciones no triviales de la forma (4.71) buscaremos funciones $X(x)$ y $T(t)$ que satisfagan

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0,L), \tag{4.75}$$

$$T'(t) = \lambda T(t), \quad t \in (0,+\infty). \tag{4.76}$$

Al resolver (4.75) obtenemos

$$X(x) = \begin{cases} ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{\ \sqrt{\lambda}x}, & \text{si } \lambda > 0, \\ a + bx, & \text{si } \lambda = 0, \\ a\cos\sqrt{\ \lambda}x + b\sin\sqrt{\ \lambda}x, & \text{si } \lambda < 0, \end{cases} \tag{4.77}$$

donde a y b son dos constantes arbitarias que habrá que determinar a partir de condiciones adicionales sobre X. Los cálculos para T son un poquito más fáciles todavía y conducen a

$$T(t) = ae^{\lambda t}, \tag{4.78}$$

con a una constante arbitaria. Pasemos ahora a imponer las condiciones de contorno sobre u. La condición

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

implica

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Es evidente que si permitimos que $X(0) \neq 0$ o $X(L) \neq 0$ entonces la función T deberá anularse idénticamente, lo que conduce a la solución trivial $u \equiv 0$. Obviamente, ésta es una solución del problema de Cauchy con dato nulo, pero no nos da ninguna información interesante. Así que ya tenemos

$$X(0) = X(L) = 0 \tag{4.79}$$

como condiciones de borde para X. Al intentar imponerlas en (4.78) encontra mos que la única manera de obtener soluciones distintas de la trivial es tomar soluciones sinusoidales y

$$\lambda = \quad (k\pi/L)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.80}$$

porque todas las demás posibilidades conducen necesariamente a $a = b = 0$ y, por consiguiente, a la solución trivial $u \equiv 0$. Al usar estos valores de λ en (4.78) y escribir $u(x,t) = X(x)T(t)$ obtenemos las soluciones

$$u(x,t) = b\, e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \tag{4.81}$$

donde b es una constante arbitraria y k un número natural cualquiera. Por este procedimiento hemos construido una familia de soluciones explícitas (notemos que para cada $k \in \mathbf{N}$ hay soluciones de este tipo) pero está claro que no tenemos casi libertad para elegir el dato inicial u_0, ya que la fórmula (4.81) implica

$$u_0(x) = u(x,0) = b \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right). \tag{4.82}$$

Ejercicio 4.39. * Verificar que la funcion (4.81) es una solución del problema de Cauchy Dirichlet para la ecuación del calor con dato inicial (4.82) y dato de contorno nulo.

En la figura 4.10 representamos la solución especial (4.81) de la ecuación del calor que se obtiene escogiendo $L = \pi$, $k = 1$ y $b = 1$.

Ejercicio 4.40. * Mostrar que al buscar soluciones con variables separadas para el problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,L], \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in [0,\infty), \end{cases} \tag{4.83}$$

se obtiene la siguiente familia:

$$u(x,t) = a\, e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \tag{4.84}$$

donde $k = 0, 1, \dots$ y a es una constante cualquiera. Mostrar que éstas toman como dato inicial

$$u_0(x) = u(x,0) = a \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right). \tag{4.85}$$

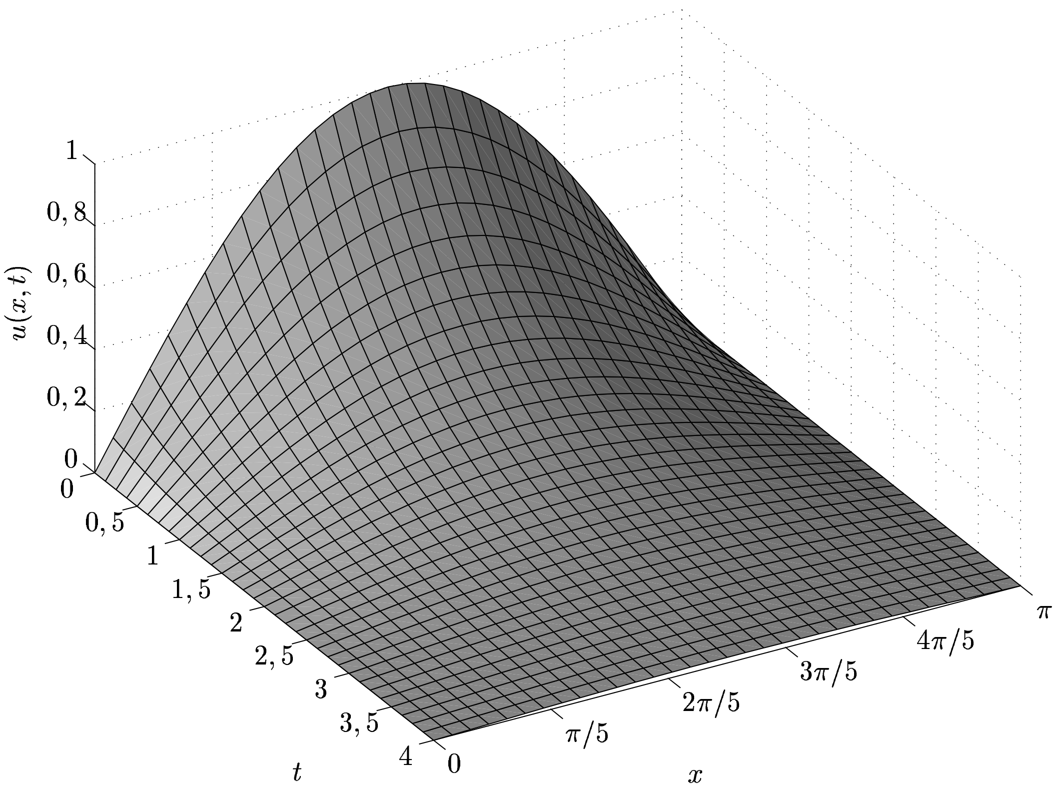

Figura 4.10: la solución con dato inicial $u(x,0) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$

El problema de contorno para la ecuación del calor que aparece en el ejercicio anterior, en el que se fija el valor de u_x en vez del de u sobre la frontera lateral, es conocido como *Problema de Cauchy Neumann* (ver la página xxv en la sección B.2 del apéndice).

Observación 4.5.2. Las soluciones (4.81) decaen exponencialmente con el tiempo. Esta es una información interesante sobre el comportamiento de las soluciones.

Ejercicio 4.41. * ¿Cómo decaen las soluciones (4.84)? Discutir según los valores de los parámetros k y L. ♠

Hasta ahora sólo hemos sido capaces de resolver el problema de Cauchy Dirichlet para los datos iniciales (4.82) que tienen una forma muy particular. Sin embargo, como el problema es lineal podemos recurrir al principio de superposición que enunciamos en la observación 4.3.3 para incluir como datos las combinaciones lineales de funciones de la forma (4.82). En la proposición que aparece a continuación presentamos una nueva aplicación de este principio, esta vez tomando en cuenta los datos iniciales y de contorno (comparar con la proposición 4.2).

Proposición 4.7. *Sean u y $\bar{u}$ dos soluciones del problema de Cauchy Dirichlet para la ecuación del calor en Ω, con datos iniciales u_0 y $\bar{u}_0$ respectivamente, y datos de contorno Θ_i y $\bar{\Theta}_i$, $i = 1, 2$. Entonces $w = u + \bar{u}$ es una solución de la ecuación del calor en Ω, con dato inicial*

$$w(x,0) = u_0(x) + \bar{u}_0(x), \quad x \in [0, L],$$

y datos de contorno

$$\begin{aligned} w(0,t) &= \Theta_1(t) + \bar{\Theta}_1(t), \quad t \geq 0, \\ w(L,t) &= \Theta_2(t) + \bar{\Theta}_2(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

PRUEBA. Una aplicación directa de la proposición 4.2 muestra que w satisface la ecuación del calor $w_t = w_{xx}$ en Ω. Para las condiciones inicial y de contorno tenemos

$$\begin{aligned} w(x,0) &= u(x,0) + \bar{u}(x,0) = u_0(x) + \bar{u}_0(x), \quad x \in [0, L], \\ w(0,t) &= u(0,t) + \bar{u}(0,t) = \Theta_1(t) + \bar{\Theta}_1(t), \quad t \geq 0, \\ w(L,t) &= u(L,t) + \bar{u}(L,t) = \Theta_2(t) + \bar{\Theta}_2(t), \quad t \geq 0. \quad \diamondsuit \end{aligned}$$

Ejercicio 4.42. * Enunciar y probar un principio de superposición de soluciones para el problema de Cauchy Neumann.

Es claro que podemos extender el cálculo de las soluciones del problema de Cauchy Dirichlet para la ecuación del calor para datos iniciales que sean una combinación lineal de funciones sinusoidales, y dato de contorno nulo, utilizando el principio de superposición que acabamos de probar. En efecto, si

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \tag{4.86}$$

entonces el principio de superposición asegura que

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} b_k e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \tag{4.87}$$

es una solución del problema con dato inicial (4.86).

Observación 4.5.3. En realidad la fórmula (4.87) es *la solución* del problema, pero para poder hacer esta afirmación necesitamos probar un resultado de unicidad, que enunciaremos y demostraremos recién en la sección 4.6. ♠

Ejercicio 4.43. * Hallar una solución del problema de Cauchy Neumann con dato inicial

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \tag{4.88}$$

y dato de contorno nulo.

Todavía nos falta bastante para tener una solución completa de nuestro problema. Hasta ahora sólo podemos resolverlo para datos de la forma (4.86), que constituye una clase bastante pobre. Por ejemplo, la funcion

$$u_0(x) = x(L \quad x), \quad x \in [0, L],$$

no puede expresarse de esta manera.

Ejercicio 4.44. ** Mostrar que $u_0(x) = x(L - x)$ no puede escribirse como una combinacion lineal finita de senos en el intervalo $[0, L]$ (en el capítulo 5 presentaremos un conjunto de resultados que permitirán resolver este ejercicio con poco esfuerzo, pero puede ser útil intentar hacerlo antes de seguir avanzando).

Para usar este método en situaciones más generales vamos a utilizar *series de senos o de cosenos* como datos iniciales para la ecuación del calor, en vez de las sumas finitas (4.86) o (4.88). Pasemos ahora a considerar datos iniciales en forma de series trigonométricas para la ecuación del calor. Vamos a comenzar por tratar el problema formalmente, sin detenernos a considerar las cuestiones de convergencia de las series que aparecen en las fórmulas para los datos iniciales $u_0(x)$ y para las soluciones $u(x, t)$. Si el dato inicial para el problema de Cauchy Dirichlet es

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L], \tag{4.89}$$

la solución del problema debería ser

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\quad \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0. \tag{4.90}$$

De la misma manera, al usar este procedimiento para tratar el problema de Cauchy Neumman con dato lateral nulo obtenemos, formalmente, la solución

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{\quad \frac{k\pi}{L}^2 t} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0. \tag{4.91}$$

para datos iniciales de la forma

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L] \tag{4.92}$$

Ejercicio 4.45. * Derivar formalmente las series (4.90) y (4.91) para verificar que satisfacen la ecuación del calor en Ω. Mostrar también, razonando formalmente, que satisfacen las condiciones de contorno de los problemas de Cauchy Dirichlet y Neumann Dirichlet, con datos iniciales (4.89) y (4.92) respectivamente.

Aunque hemos encontrado las fórmulas (4.90) y (4.91) para las soluciones de los problemas de Cauchy Dirichlet y Neumann Dirichlet notemos que este intento de resolver la ecuación del calor utilizando separación de variables y el "principio de superposición para sumas infinitas" abre la puerta a un nuevo e interesante conjunto de problemas, algunos de los cuales se recogen en la próxima observación.

Observación 4.5.4. Notemos que hemos conseguido, a cambio de nuestra pregunta original referente a una ecuación en derivadas parciales, un montón de preguntas nuevas (aparentemente tan complicadas, o aún más, como las que ya teníamos):

1. ¿Qué significan las series en (4.90) y (4.91)? Recordemos que una su cesión de funciones, en este caso una serie, puede converger a algo o no hacerlo. Más aún, puede converger en algun sentido (convergencia pun tual) y no en otro (convergencia uniforme). Ya nos ocuparemos además de utilizar algún otro sentido de convergencia (como la convergencia res pecto a la norma $\|\cdot\|_2$) para poder enriquecer nuestra visión del mundo.

2. Nuestra intención era resolver la ecuación del calor con un dato inicial u_0, pero ¿cuáles son las funciones u_0 que pueden escribirse como serie de senos?, ¿cómo se obtienen los coeficientes a_k de la serie a partir de u_0?

3. Si los a_k, o los b_k, son conocidos, ¿podemos calcular u_0 o determinar algunas de sus propiedades usando (4.89) o (4.92)?

4. ¿Qué propiedades de la función $u(x,t)$ pueden deducirse a partir de la serie (4.90) o (4.91)? ♠

Vale la pena dedicar un esfuerzo sistemático a contestar todas estas pre guntas, porque las series de senos y cosenos, también conocidas como *series trigonométricas* o *series de Fourier* tienen gran variedad de aplicaciones y constituyen una parte del amplio mundo del análisis armónico. Por esta razón dedicaremos el capítulo 5 a este tema. De momento haremos algo más limi tado. Nos contentaremos con resolver la ecuación del calor para una clase de datos (4.89) y (4.92) para los que podremos contestar las preguntas que acaba mos de plantear en los numerales 1 y 4 de la observación 4.5.4. Pospondremos la consideración de datos más generales hasta desarrollar la teoría de las series trigonométricas en el capítulo 5.

4.5.3 Datos iniciales con coeficientes sumables

En esta sección consideraremos datos iniciales en forma de una serie de senos como (4.89) para el problema de Cauchy Dirichlet para la ecuación del ca lor, suponiendo que la serie formada por los coeficientes b_k es absolutamente convergente. Es decir, introduciremos la hipótesis de sumabilidad

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty. \tag{4.93}$$

Esta hipótesis es bastante natural, porque el criterio de la mayorante de Weierstrass (teorema 2.2, página 179) permite asegurar que cuando se satisface (4.93) la serie (4.89) converge uniformemente y u_0 es una función continua de x. Además, u_0 es impar y periódica con período $2L$ (ver el ejercicio 2.16, página 186).

Vale la pena mencionar que la novedad en (4.90) respecto a (4.89) son las exponenciales que multiplican a los coeficientes b_k y que dependen de t. Estos factores son todos menores que 1, decaen muy rápido a medida que t crece y para cualquier valor de t positivo y fijo decrecen más que exponencialmente cuando $k \to \infty$. Todas estas propiedades indican que las exponenciales "ayudan" a la convergencia de la serie. Veremos que, cuando la hipótesis de sumabilidad (4.93) se satisface, este hecho implica que la fórmula (4.90) define una solución de la ecuación del calor con dato inicial u_0 dado por (4.89). Ese es el contenido de nuestra próxima proposición.

Proposición 4.8. *Consideremos una sucesión de números reales*

$$b_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

que satisface la condición (4.93)*, y consideremos la función u_0 definida sobre el intervalo $[0, L]$ por la fórmula*

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \quad x \in [0, L].$$

Entonces

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \quad (x,t) \in \bar{\Omega}, \tag{4.94}$$

es una solución del problema de de Cauchy Dirichlet para la ecuación del calor en $\Omega = (0, L) \times (0, \infty)$ con dato inicial u_0.

Prueba: La prueba consiste esencialmente en utilizar repetidas veces el criterio de la mayorante de Weierstrass, y los resultados sobre convergencia uniforme y continuidad y convergencia uniforme y derivación que vimos en el capítulo 2.

En primer lugar, observemos que el término general de la serie (4.94) puede mayorarse haciendo

$$\left| b_k e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \right| \leq |b_k|, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}. \tag{4.95}$$

Como cada término de la serie es una función continua de x y t y la serie $\sum_k |b_k|$ converge, el criterio de la mayorante de Weierstrass y el teorema de convergencia uniforme y continuidad (2.3) implican que $u(x,t)$ es una función continua en todo $\bar{\Omega}$. En particular, como la convergencia uniforme de la serie implica su convergencia puntual, podemos evaluar $u(x,t)$ en $t = 0$ y obtenemos precisamente la serie (4.89) que define al dato inicial u_0. También podemos usar la convergencia puntual de la serie para evaluar $u(x,t)$ en los puntos (x,t) con $x = 0$ y $x = L$. Resulta evidente entonces que se satisface

$$u(L,t) = u(0,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Para completar la prueba de la proposición tenemos que mostrar que se satisface la ecuación del calor en Ω. Para ello calcularemos las derivadas parciales u_t y u_{xx} de u. Si nos limitamos a calcular formalmente, sin prestar atención a las cuestiones de convergencia, las fórmulas que obtenemos indican que la ecuación del calor se satisface (éste es el contenido del ejercicio 4.45). Vamos a mostrar ahora que u_t y u_{xx} pueden calcularse derivando la serie (4.94) término a término.

La derivada parcial respecto a t del término general de la serie (4.94) es

$$b_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \tag{4.96}$$

Nuestro objetivo es mostrar que la serie de término general (4.96) converge uniformemente para poder aplicar los resultados sobre convergencia uniforme y derivación que encontramos en la sección 2.2. En particular, utilizaremos los resultados del ejercicio 2.25. Si buscamos una estimación de (4.96) que valga en todo Ω debemos contentarnos con acotar por

$$\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 |b_k|.$$

Esta estimación no es muy útil para nuestro propósito, porque de la sumabi lidad de la serie de los $|b_k|$ no podemos inferir $\sum k^2|b_k| < \infty$. Para subsanar este problema notemos que el cálculo de las derivadas u_t y u_{xx} es un problema local. Por lo tanto, una vez fijado un punto $(x_0, t_0) \in \Omega$, como $t_0 > 0$, podemos trabajar en un entorno de (x_0, t_0) que esté lejos de $\{t = 0\}$. Por ejemplo, si elegimos un número δ positivo pero menor que t_0, podemos intentar hacer el cálculo de las derivadas de u en el abierto $t > \delta$. En este subconjunto de Ω estimamos (4.96) haciendo

$$\left| b_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right| \leq |b_k| \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \delta}, \tag{4.97}$$

que es válida siempre que $t \geq \delta$. Como la serie $\sum |b_k|$ es convergente la sucesión b_k tiende a 0. Esto implica que está acotada y existe entonces un número positivo B, tal que

$$|b_k| \leq B, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

En resumen, podemos estimar (4.96) en $(0, L) \times (\delta, \infty)$ por la sucesión numérica

$$B \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \delta}. \tag{4.98}$$

El rápido decaimiento de las exponenciales asegura que la serie de término general (4.98) es convergente, por lo tanto la serie de funciones cuyo término general es (4.96) converge uniformemente en $[0, L] \times [\delta, +\infty)$. El teorema de convergencia uniforme y derivación, en la versión para funciones de varias variables que aparece en el ejercicio 2.25 de la sección 2.2, asegura entonces que

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \quad (x,t) \in (0, L) \times (\delta, \infty). \tag{4.99}$$

Como δ es un número positivo arbitrario —en particular podemos escogerlo tan próximo a 0 como queramos— la igualdad (4.99) es cierta en todo Ω.

Con los mismos argumentos es posible mostrar que

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi}{L} e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right), && (x,t) \in \Omega, \\ u_{xx}(x,t) &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), && (x,t) \in \Omega. \end{aligned} \tag{4.100}$$

La segunda ecuación en (4.100), junto con la expresión (4.99) para u_t, muestran que la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ se satisface en todo Ω, con lo que hemos completado la prueba de la proposición. $\diamondsuit$

Ejercicio 4.46. * Calcular la solución de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ en la región $(0, L) \times (0, +\infty)$ del plano (x, t), con condiciones de contorno nulas y datos iniciales:

1. $u_0(x) = \sin(\pi x / L)$.
2. $u_0(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in [0, L/2], \\ L - x, & \text{si} \quad x \in [L/2, L], \end{cases}$ (ver la figura 4.11 en la página 333).

   Sugerencia: la función u_0 admite el desarrollo en serie de senos

   $$u_0(x) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+1)^2} \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{L} x\right), \quad x \in [0, L].$$

3. Tomar $L = 1$ y considerar

   $$u_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{\ k} \sin(k\pi x), \quad x \in [0, 1].$$

Ejercicio 4.47. * Adaptar todo lo que hemos hecho para tratar el problema de Cauchy Dirichlet y desarrollar un método para estudiar la ecuación del calor en un intervalo $[0, L]$ con condiciones de borde $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ (problema de Cauchy Neumann). Hallar condiciones sobre el dato u_0 que nos permitan resolver el problema con este método.

Observación 4.5.5. REGULARIDAD DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DEL CALOR.
El procedimiento que usamos en la demostración de la proposición 4.8 para calcular las derivadas u_t, u_x y u_{xx} puede iterarse para calcular derivadas de cualquier orden de u en la región Ω del plano (x, t). En efecto, cada vez que calculamos derivadas respecto a t o a x aparecen factores como k^2 o k en el término general de la serie (4.94) y siempre podemos controlarlos en conjuntos de la forma $t \geq \delta$, utilizando el rápido decaimiento de las exponencia les $e^{\ (k\pi/L)^2 t}$ cuando $k \to \infty$. Esto muestra que las soluciones del problema de Cauchy Dirichlet (o del problema de Cauchy Neumann, ver el ejercicio 4.47) para la ecuación del calor que obtuvimos por el método de separación de variables son funciones de clase C^∞ en Ω, incluso si el dato inicial es mucho menos regular. Mostraremos luego que la solución del problema de Cauchy Dirichlet es única una vez que se ha fijado el dato inicial u_0, por lo que podemos asegurar que las soluciones de este problema son de clase C^∞ en Ω, al menos para la clase de datos iniciales con la que estamos trabajando (en realidad el resultado es cierto para cualquier dato u_0). Éste es un efecto regularizante notable de la ecuación del calor. Tal cosa no ocurre para la ecuación de ondas. Por ejemplo, una solución en forma de onda viajera $f(x + ct)$ se desplaza por el espacio sin deformarse. En particular, no se va "suavizando" a medida que el tiempo avanza. ♠

Observación 4.5.6. IRREVERSIBILIDAD DEL FLUJO DE CALOR.
El efecto regularizante que tiene la ecuación del calor está asociado con que el problema de resolver la ecuación del calor retrocediendo en el tiempo en general no tiene solución. Por ejemplo, si $u_0(x)$ es una función continua cualquiera en general es falso que pueda obtenerse como una solución de la ecuación del calor, con dato fijado en un tiempo $t_0 < 0$, en el instante $t = 0$. Si u_0 no es de clase C^∞ esto es una consecuencia directa de la observación anterior. Este comportamiento es bien distinto del que tiene la ecuación de ondas, que era invariante bajo la inversión de tiempos $t \mapsto \ t$ y para la cual podíamos determinar todo el "pasado" de cualquier configuración. ♠

Notemos que la fórmula (4.94) no sólo nos ha servido para probar un re sultado de existencia de soluciones del problema de Cauchy Dirichlet (4.70), sino que además nos permitió encontrar una interesante propiedad de regula ridad de las soluciones. Veremos ahora que puede también deducirse de esa expresión el decaimiento de las soluciones cuando $t \to \infty$.

Observación 4.5.7. DECAIMIENTO DE LAS SOLUCIONES.
Probaremos que la solución $u(x,t)$ que hemos calculado para la ecuación del calor decae exponencialmente cuando $t \to \infty$. Para ello todo lo que precisamos son las siguientes estimaciones sencillas y la sumabilidad del valor absoluto de los coeficientes b_k:

$$|u(x,t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| e^{\ \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| e^{\ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} = e^{\ \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|. \tag{4.101}$$

Ejercicio 4.48. * Estudiar el comportamiento de las soluciones del problema de Cauchy Neumann con dato lateral $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$, cuando $t \to \infty$. ♠

Ejercicio 4.49. **

1. Un caso particular de soluciones de la ecuación del calor son las que corres ponden a situaciones en las que el perfil de temperaturas no se modifica con el tiempo, lo que equivale a decir que $u(x,t)$ no depende de t y $u_t = 0$, a las que llamaremos *soluciones estacionarias* del problema. Dados dos números reales cualesquiera A y B, hallar una solución estacionaria

$$u(x,t) = u_1(x)$$

de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ en Ω, que satisfaga las condiciones

$$u(0,t) = A, \quad u(L,t) = B.$$

2. Hallar la solución $u(x,t)$ de la ecuación del calor en $(0,1) \times (0,+\infty)$, con con diciones de borde

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1,$$

y dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad x \in [0,1/2], \\ 1, & \text{si} \quad x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Sugerencia: utilizar el principio de superposición de soluciones.

3. Hallar una estimacion de $|u(x,t) - u_1(x)|$ y mostrar que $u(x,t) \to u_1(x)$ cuando el tiempo t tiende a infinito.

En la figura 4.11 representamos la solución del problema de Cauchy Diri chlet para la ecuación del calor con el dato inicial "triangular" que aparece en la parte 2 del ejercicio 4.46 (hemos tomado $L = \pi$). Se puede apreciar el decaimiento de la solución. También el efecto regularizador que tiene la ecuación del calor, ya que el "pico" que el dato inicial tiene en $x = \pi/2$ desaparece instantáneamente.

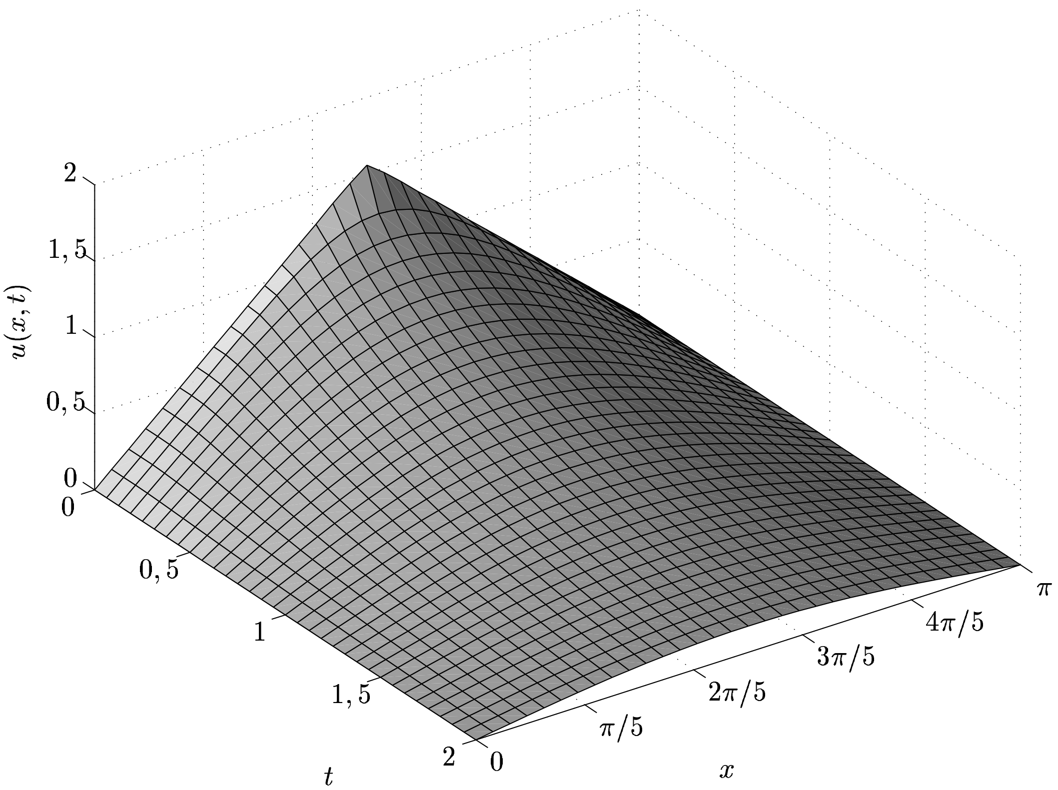

Figura 4.11: la solución con dato inicial "triangular" en $0 \leq x \leq \pi$

4.5.4 Otras aplicaciones del método de separación de variables

El método de separación de variables, que conduce a resolver la ecuación del calor por medio de la representación de sus soluciones como series de senos o cosenos, no se agota con la ecuación del calor y permite construir soluciones de otras ecuaciones lineales. Comenzaremos aplicándolo a la ecuación de ondas. Volveremos sobre este tipo de problemas en el capítulo 5, cuando discutamos algunas aplicaciones de las series de Fourier. La siguiente observación puede resultar útil a la hora de calcular en las aplicaciones de este método.

Observación 4.5.8. Al buscar soluciones $u(x,t)$ por el método de separación de variables, para una ecuación diferencial en derivadas parciales en las que el término que contiene la derivada de segundo orden respecto a x es una constante por u_{xx} (tal como ocurre con las ecuaciones del calor, de ondas, de Laplace, y con las ecuaciones de los ejercicios 4.59 y 4.60) y la condición lateral sobre u en $x = 0$ y $x = L$ es nula, suele ser conveniente escribir desde