Curso: Teoría, Algoritmos y Aplicaciones de Gestión Logística.

Modelos simples de Ruteo de Vehículos, Parte 1: TSP y VRP

Departamento de Investigación Operativa
Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

dictado semestre 2 - 2022

Introducción

- Ruteo de vehículos: dado un conjunto de puntos de entrega (o recolección), y un conjunto de vehículos disponibles, decidir cómo organizar los recorridos de los vehículos para cubrir todos los puntos.

- Diversas variantes: único o múltiples vehículos, con y sin capacidad; demandas iguales o distintas; ventanas de tiempo (duras o blandas); problemas mixtos de entrega y recolección, etc.

Modelo básico - Travelling Salesman Problem (TSP) (sección 4.3 libro)

- Modelo clasico.
- Objetivo: dado un grafo $G = (V, E)$, donde las aristas (i, j) tienen costos d_{ij}, encontrar un ciclo que recorra exactamente una vez todos los elementos de V, al menor costo posible.
- Problema NP-completo.

Formulación de Programación Matemática

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_{ij} = 1, \forall i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{n} x_{ij} = 1, \forall j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i \in M, j \in V - M} x_{ij} \geq 1, \forall M \subset V, \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \forall i = 1, \ldots, n, \forall j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Donde x_{ij} es la v.binaria que vale 1 si luego del nodo i se va al nodo j, y 0 en otro caso. La cantidad de restricciones es exponencial.

Lecturas adicionales sobre otras formulaciones alternativas:

- Gábor Pataki (2003). Teaching Integer Programing using the Travelling Salesman Problem. SIAM Review vol 45, no. 1, pp. 116-123, available at `http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S00361445023685`

- Orman, A. J. and Williams, H. Paul (2004). A survey of different integer programming formulations of the travelling salesman problem. Operational Research working papers, LSEOR 04.67. Department of Operational Research, London School of Economics and Political Science, London, UK. `http://eprints.lse.ac.uk/9349/1/WP67_A_Survey_of_DifferentFormulationsoftheTSPJuly20051LSEROVERSION.pdf`

- Letchford, A. N. and Lodi, A. (2011). Mathematical Programming Approaches to the Traveling Salesman Problem. Wiley Encyclopedia of

Operations Research and Management Science. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.533.414 - cliquear en "Cached´´

Heurísticas

- Nearest-Insertion Heuristic.
- Heurística de Christofides.
- Heurísticas de búsqueda local.

Heurísticas de inserción

- Nearest Neighbour Insertion
- Nearest Insertion
  1. Elegir un nodo arbitrario n, construir un ciclo C conformado por n
  2. Encontrar el nodo que no pertenece a C más cercano a un nodo de C, sea k.
  3. Encontrar una arista (i, j) de C tal que $d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$ es mínimo
  4. construir un nuevo ciclo C sustituyendo (i, j) por $(i, k), (k, j)$
  5. Si C no contiene todos los nodos de V, volver al paso 2.
  6. Terminar, C es una solución de largo L^{NI}
- Propiedad: para todo TSP que satisface la desigualdad triangular, $L^{NI} \leq 2L^*$.

Heurística de Christofides (1976)

- Definiciones: ciclo euleriano: ciclo que recorre todas las aristas de un grafo, exactamente una vez; grafo euleriano: grafo que tiene un ciclo euleriano; propiedad: un grafo conexo es euleriano sí y sólo sí el grado de todos sus nodos es par; propiedad: dado cualquier grafo con dos o más vértices, el número de vértices de grado impar es par.

- Heurística: generar un Arbol de cubrimiento de costo mínimo; aumentarlo con un matching de costo mínimo entre los nodos de grado impar; encontrar un ciclo euleriano; reducirlo utilizando desigualdad triangular.

- Propiedad: para todo TSP que satisface la desigualdad triangular, $L^C \leq 3/2L^*$.

Heurísticas de búsqueda local

- Sea $i_1, i_2, ..., i_{u_1}, i_{u_2}, \ldots, i_{v_1}, i_{v_2}, \ldots, i_n$ una solución del TSP (dada por la secuencia de nodos).
- Soluciones vecinas: las que modifican solo parte del orden de la secuencia.
- Diversas vecindades: 2-exchange, 3-exchange, etc.
- Métodos de búsqueda local: 2-opt, k-opt, otros.
- Metaheurísticas.

Problema de ruteo de vehículo con capacidades y demandas heterógeneas

- Capacidad de cada vehículo Q, número de vehículos no acotado; grafo $G = (V, E)$, demanda en cada nodo $i \in V$ igual a w_i, distancias entre nodos d_{ij}.

- Objetivo: encontrar el conjunto de rutas, partiendo del nodo especial (depósito) 0, que atiende todas las demandas al menor costo de ruteo posible.

Métodos

- Heurísticas constructivas
- Route-first-cluster-second
- Cluster-first-route-second
- Otros métodos

Heurísticas constructivas -método de Clarke y Wright (1964)

1. Solución inicial: cada cliente es atendido por un vehículo distinto.

2. Calcular el ahorro, $s_{ij} = d_{0i} + d_{0j} - d_{ij}$ para todo i y j

3. Ordenar los ahorros en orden no creciente

4. Encontrar el primer arco factible (i, j) en la lista de ahorros, tal que

   (a) i y j estén en rutas distintas
   (b) i y j sean respectivamente el último y el primer elemento de sus rutas
   (c) la suma de las demandas de las rutas no supere Q

5. Agregar el arco (i, j) a la solución actual, y borrar los arcos $(0, i)$ y $(j, 0)$

6. Repetir paso 4 hasta no encontrar más arcos factibles.

Otras heurísticas

- Heurísticas Route-first-cluster-second
- Construyen primero un TSP, luego agrupan los clientes para respetar la capacidad Q.
- Problema - tienen mala performance de peor caso.
- Heurísticas Cluster-first-route-second
- Agrupan primero los clientes respetando la capacidad Q, luego construyen primero un TSP en cada grupo.
- Mejor performance
- Búsquedas locales, metaheurísticas.