Física 3 - Curso 2011-2
Solución del primer parcial

Instituto de Física - Facultad de Ingeniería

28 de septiembre de 2011

Problema 1

(a) Cada elemento infinitesimal de la varilla de longitud dy', ubicado por las coordenadas $(0, y')$, produce una contribución al potencial en el punto (x, y) dada por

$$dV(x,y) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dy'}{\sqrt{x^2 + (y' - y)^2}}$$

La variable y' toma valores en el intervalo $[-L/2, L/2]$. El potencial total en (x, y) se halla por superposición (integración) del potencial producido por cada elemento,

$$\begin{aligned} V(x,y) = & \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy'}{\sqrt{x^2 + (y' - y)^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L/2-y}^{L/2-y} \frac{du}{\sqrt{x^2 + u^2}} \\ = & \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left(\frac{L/2 - y + \sqrt{x^2 + (L/2 - y)^2}}{-L/2 - y + \sqrt{x^2 + (-L/2 - y)^2}} \right) \end{aligned}$$

donde se usó el cambio de variable $u = y' - y$, y el resultado de la sugerencia para la integral.

(b) Las varillas superior e inferior producen el mismo valor de potencial en el punto O. Utilizando el resultado anterior, con $x = y = L/2$, tenemos que este potencial vale:

$$V_{sup} = V_{inf} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left(\frac{L/2}{(\sqrt{5/4} - 1)L} \right) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left(2 \left(\sqrt{5/4} - 1 \right) \right).$$

Análogamente, el potencial producido por la varilla de la izquierda vale, usando $x = L$ e $y = 0$,

$$V_{izq} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{L\left(\sqrt{5/4}+1/2\right)}{L\left(\sqrt{5/4}-1/2\right)}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{5/4}+1/2}{\sqrt{5/4}-1/2}\right).$$

El potencial total en el punto O es la suma de los anteriores,

$$V_O = V_{sup} + V_{inf} + V_{izq}.$$

(c) La partícula experimenta una fuerza hacia la derecha, por la simetría de la situación. La velocidad final estará dirigida hacia la derecha. A una distancia muy alejada de las varillas, toda la energía potencial se habrá transformado en cinética, de manera que la velocidad final cumple

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV_O.$$

Por lo tanto,

$$v = \sqrt{\frac{2qV_O}{m}}.$$

Problema 2

(a) (i) Para tiempos largos el circuito habrá alcanzado un estado estacionario en el que la corriente cera nula, la diferencia de potencial en R será nula, y la diferencia de potencial del sistema de condensadores será igual a la de la fuente. Como los condensadores son idénticos, se deduce que $V_1 = V_2 = V/2 = 60V$.

(ii) La energía final acumulada en los capacitores es

$$U_C = \frac{1}{2}C_1{V_1}^2 + \frac{1}{2}C_2{V_2}^2 = 10\mu F \times (60V)^2 = 36mJ$$

La capacitancia equivalente del sistema es (condensadores en serie):

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2} = 5\mu F.$$

Las cargas en C_{eq}, C_1 y C_2 son iguales, y valen $Q = C_{eq}V = 600\mu C$.

La energía entregada por la fuente al cargar los condensadores es

$$U_F = QV = C_{eq}V^2 = 5\mu F \times (120V)^2 = 72mJ$$

usando la carga del condensador equivalente (condensadores en serie). La energía disipada por la resistencia es

$$E_R = U_F - U_C = 36mJ.$$

(b) (i) La nueva capacitancia de C_1 con el dieléctrico es $C' = k_e C = 40\mu C$, y la capacitancia equivalente es ahora

$$C'_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2} = 8\mu F.$$

En el estado final, la carga del condensador equivalente es $Q' = C'_{eq}V = 8\mu F \times 120V = 960\mu C$, la misma que la de cada condensador. Entonces,

$$V_1 = \frac{Q'}{C_1} = \frac{960\mu C}{40\mu F} = 24V$$

$$V_2 = \frac{Q'}{C_1} = \frac{960\mu C}{10\mu F} = 96V$$

(ii) La energía final acumulada en C_1 y C_2 es ahora

$$U'_C = \frac{1}{2}C_1{V_1}^2 + \frac{1}{2}C_2{V_2}^2 = \frac{1}{2}\left[40\mu F \times (24V)^2 + 10\mu F \times (96V)^2\right] = 57,6mJ,$$

lo cual implica que la energía acumulada aumento en $U'_C - U_C = 21,6mJ$.

La energía aportada por la fuente para aumentar la carga desde Q hasta Q' vale

$$U'_F - U_F = (Q' - Q)V = (960\mu C - 600\mu C) \times 120V = 43,2mJ.$$

La energía disipada por la resistencia en el proceso es

$$E'_R = (U'_F - U_F) - (U'_C - U_C) = 21,6mJ.$$

Problema 3

(a) Para que la fuerza magnética sea hacia arriba, la corriente debe circular en sentido antihorario en el dibujo. Esto se consigue conectando la terminal positiva de la fuente en el riel de la derecha.

(b) La resistencia total en el circuito es

$$R(x) = \frac{\rho}{A}(2x + d)$$

y la corriente vale $i(x) = \Delta V / R(x)$.

(c) Tomando en cuenta la dirección del campo y el sentido de la corriente, la fuerza magnética sobre la barra horizontal es hacia arriba y vale

$$F(x) = i(x)Bd = \frac{\Delta VABd}{\rho(2x+d)}$$

(d) En la posición de equilibrio, la fuerza magnética equilibra el peso, con lo cual

$$mg = F(x_{eq}) = \frac{\Delta VABd}{\rho(2x_{eq}+d)} \leftrightarrow x_{eq} = \frac{\Delta VABd}{2\rho mg} - \frac{d}{2}$$

(e) Habiendo determinado x_{eq}, se puede hallar B como

$$B = \frac{(2x_{eq}+d)\rho mg}{\Delta VAd}$$

Sabiendo que la variable x está confinada al intervalo $[0, L]$, los valores de campo B que pueden ser medidos con el dispositivo están comprendidos entre $B_{min} = \frac{\rho mg}{\Delta VA}$ y $B_{max} = \frac{(2L+d)\rho mg}{\Delta VAd}$.

(f) Para un caso general en que el vector $\vec{B}$ forma un ángulo θ con la dirección de la barra móvil, la fuerza magnética vale

$$F(x) = i(x)Bd\text{sen}\theta.$$

En particular, cuando $\theta = 0$, se tendrá $F(x) = 0$ para todos los valores de x. En otras palabras, cuando el dispositivo está girado de manera tal que la barra cae libremente por acción del peso, la barra señala la dirección de $\vec{B}$. Luego, girando el dispositivo unos 90 grados, se puede determinar el sentido del vector al conectar la fuente ΔV, tomando en cuenta el resultado de la parte (a).