Curso: Teoría, Algoritmos y Aplicaciones de Gestión Logística.

Modelos de Inventarios, Parte 3

Departamento de Investigación Operativa
Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

dictado semestre 2 - 2022

Contenido: (cap. 8 libro referencia)

1. Modelo de tamaño económico de lote con demandas variables - modelo de Wagner-Whitin

2. Modelo con restricciones de capacidad

3. Modelos multi-producto
   (vistos clase pasada)

4. Modelos con fijación de precios

Modelo de Wagner-Whitin (repaso)

- Hipótesis: se debe planificar una secuencia de lotes de pedidos (o lotes de producción) en un horizonte de planificación de T períodos unitarios.

- En cada período, hay una única decisión a tomar: el tamaño del pedido o del lote de producción.

- Demanda en el período t conocida, d_t ítems.

- Al ordenar un producto, se incurre un costo c \$por unidad de producto, y un costo fijo K \$(es decir, si se coloca un pedido de y unidades, el costo es $cy + K\delta(y)$, con $\delta(y) = 1$ si $y > 0$, y 0 si no.

- Costos de inventario lineales, h \$/(ítem.unidad de tiempo).

- Inventario inicial cero, $I_0 = 0$.

- Tiempo de entrega cero, $L = 0$.

- Horizonte de planificación T conocido y discretizado (i.e, $0 \leq t \leq T$, con t y T enteros).

- Las órdenes y la demanda se realizan (ocurren) al comienzo de cada período. El costo de inventario se aplica a la cantidad disponible al final del período.

- Variables de decisión: tamaño del lote a ordenar en cada período, $y_t \geq 0$, tamaño del inventario al final de cada período, $I_t \geq 0$.

- Objetivo: cuanto ordenar en cada período para atender la demanda (sin admitir ruptura de inventario o entregas retrasadas, "backlogging"), y minimizar los costos totales (suma de costos de pedidos y costos de inventario).

Formulación de programación matemática

$$\text{Problema WW:} \min \quad \sum_{t=1}^{T} K\delta(y_t) + cy_t + hI_t \tag{1}$$

$$\text{s.a.} \quad I_t = I_{t-1} + y_t - d_t, t = 1, \ldots, T \tag{2}$$

$$I_0 = 0; \tag{3}$$

$$I_t, y_t \geq 0, t = 1, \ldots, T. \tag{4}$$

Algoritmo de W-W para resolver el modelo

- Construcción auxiliar: red acíclica, nodos $V = \{1, \ldots, T+1\}$, arcos (i, j) para todo $j > i$, de largo $l_{ij} =$ costo asociado con realizar un pedido en i para satisfacer la demanda hasta el período $j - 1$.

$$l_{ij} = K + h \sum_{k=i}^{j-1} (k - i) d_k.$$

- El largo del camino más corto del nodo 1 al nodo $T + 1$ es el costo mínimo de resolver las demandas de 1 a T.

- La política óptima (pensada como los momentos de re-orden) está dada por los nodos que pertenecen a ese camino, y las cantidades pedidas se calculan fácilmente a partir de las aristas del camino.

Modelos con determinación de precios (pricing)

- Supongamos que extendemos el problema W-W, permitiendo que en cada período se fije (v. de decisión) un precio p_t, y que la demanda en cada período sea una función (continua) del precio, $d_t(p_t)$. El objetivo es encontrar la secuencia de cantidades a comprar y_t y precios a fijar p_t para maximizar el beneficio en el horizonte de planificación de T períodos.

Modelos con determinación de precios (pricing)

- Formulación:

$$\max \quad \sum_{t=1}^{T} p_t d_t(p_t) - C(d_1(p_1), d_2(p_2), \ldots, d_T(p_T)) \tag{5}$$

$$\text{s.a.} \quad p_t \in [p_l, p_u], t = 1, \ldots, T. \tag{6}$$

  donde $C(d_1(p_1), d_2(p_2), \ldots, d_T(p_T))$ es el costo mínimo de inventario y de aprovisionamiento sobre el horizonte para un plan de precios $\vec{p}$, es decir la función objetivo del problema W-W cuando los valores $(d_1, d_2, \ldots, d_T)$ son sustituidos por $(d_1(p_1), d_2(p_2), \ldots, d_T(p_T))$. Notar que en este caso se debe tener en cuenta los costos variables de compra.

- Para desarrollar un algoritmo eficiente, hay que tener en cuenta que cualquier política óptima de reaprovisionamiento cumplirá la propiedad de inventario cero.

- En particular, si i y j son dos períodos consecutivos de reaprovisionamiento en un plan óptimo, la propiedad de inventario cero implica que la demanda en el período t, $i < t < j$, será cubierta únicamente por el pedido realizado en el período i, y por lo tanto el costo marginal unitario de satisfacer la demanda del período t está dada por $c + (t - i)h$. Por lo tanto, el precio óptimo para el período t en ese intervalo puede ser derivado, independientemente de los otros precios, resolviendo el problema

$$v_{it} = \max \quad p_t d_t(p_t) - (c + (t - i)h) d_t(p_t) \tag{7}$$

$$\text{s.a.} \quad p_t \in [p_l, p_u], t = 1, \ldots, T. \tag{8}$$

  donde la función objetivo es el beneficio del período t, teniendo en cuenta el costo marginal de satisfacer la demanda en el período.

- Es posible adaptar el algoritmo de W-W para este caso. Se construye el mismo grafo acíclico, pero los pesos l_{ij} están dados por

$$l_{ij} = K - \sum_{t=i}^{j-1} v_{it}$$

que corresponde al opuesto del máximo beneficio obtenido al satisfacer las demandas desde i hasta $j-1$ con una única orden en el período i. Con esta modificación, el largo del camino más corto de 1 a $T+1$ es el valor óptimo del problema global (y del camino se puede reconstruir la política).

- El costo computacional de esta estrategia consiste en resolver T^2 problemas de optimización de una única variable, y un camino más corto(de $O(T^2)$).

Inventarios y precios con demanda estocástica

- En la actualidad, se busca modelar en más detalle la interacción entre demanda y precio.
- La demanda es una variable aleatoria, pero depende del precio fijado.
- Veremos el modelo más simple, de un único producto y un único período.

Modelos de demanda

- Basados en Economía : modelo de comportamiento de un consumidor con toma racional de decisiones.

- Sea $[\underline{p}, \bar{p}]$ las cotas para el precio posible de un producto.

- Propiedades (hipótesis) usuales sobre la demanda $D(p)$ (determinística):
  - $D(p)$ es continua en p.
  - $D(p)$ es estrictamente decreciente en p, y por lo tanto existe inversa $D^{-1}(d)$.
  - $D(p) \in [0, \infty]$.
  - el rédito (o ingresos), $R(d) = D^{-1}(d)d$, es cóncavo en d (retornos decrecientes).

- Demanda estocástica, denotada $D(p, \epsilon)$, función de precio p y ruido aleatorio ϵ.

- Hipótesis: $D(p, \epsilon) = \alpha D(p) + \beta$, con $D(p)$ satisfaciendo propiedades anteriores, y $\epsilon = (\alpha, \beta)$, α v.a. no negativa, $E(\alpha) = 1$, β v.a. arbitraria con $E(\beta) = 0$.

- Hipótesis implícita: demandas no negativas (implica algunas restricciones en α y β).

- Casos especiales: función de demanda aditiva, $D(p, \epsilon) = D(p) + \beta$; función de demanda multiplicativa, $D(p, \epsilon) = \alpha D(p)$.

Modelo estocástico de un único período

- Vendedor (neutral a riesgo) tiene que decidir nivel de inventario y precio de venta de un único producto. Demanda estocástica, dependiente del precio de venta (suponiendo cumple las hipótesis vistas antes). Se debe ordenar el producto y fijar el precio antes de que se efectivice la demanda.

- Parámetros: costo de reposición c (demanda insatisfecha se cubre con un pedido de emergencia); $h(x)$ costo de inventario para x positivo, y costo de reposición de emergencia para x negativo.

- Beneficio para un precio p y stock y (v. de decisión):

$$v(y, p) = E(pD(p, \epsilon)) - cy - E(h(y - D(p, \epsilon))).$$

- Beneficio para una demanda esperada d y stock y (v. de decisión), cuando hay correspondencia biunívoca entre p y d:

$$\phi(y,d) = R(d) - cy - E(h(y - \alpha d - \beta)).$$

- Objetivo del vendedor

$$\begin{aligned} \max \quad & \phi(y,d) && (9) \\ \text{s.a.} \quad & y \geq 0, d \in [\underline{d}, \bar{d}]. && (10) \end{aligned}$$

Donde $\underline{d} = D^{-1}(\bar{p})$ y $\bar{d} = D^{-1}(\underline{p})$ son las cotas de demanda

- $\phi(y,d)$ es cóncavo en ambas variables, y por lo tanto es posible resolver (numéricamente) de manera eficiente el problema.

- Propiedad: si el rédito $R(d)$ es estrictamente cóncavo en la demanda esperada d, el precio óptimo de venta en el caso de demanda aditiva es idéntico al caso de demanda determinística; y es siempre menor o igual que el precio óptimo de venta para el caso de demanda multiplicativa.

- Intuición: varianza de la demanda del caso aditivo es independiente del precio de venta; varianza de la demanda del caso multiplicativo decrece con el precio de venta (entonces el vendedor tenderá a aumentar el precio para disminuir la variabilidad).