Curso: Teoría, Algoritmos y Aplicaciones de Gestión Logística.

Modelos de Inventarios, Parte 2

Departamento de Investigación Operativa
Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

dictado semestre 2 - 2022

Contenido:

1. Modelo de tamaño económico de lote con demandas variables - modelo de Wagner-Whitin

2. Modelo con restricciones de capacidad

3. Modelos multi-producto

4. Modelos con fijación de precios

Modelo de tamaño económico de lote con demandas variables - modelo de Wagner-Whitin

- Modelos anteriores - la demanda era conocida y constante
- Nueva hipótesis - la demanda es conocida en un horizonte de planificación fijo, pero varía período a período (se discretiza el tiempo en períodos de largo idéntico)
- Objetivo: identificar políticas óptimas de inventario para el caso de un único producto, y heurísticas para casos de múltiples productos. (Sección 8.1 del libro de referencia)

Modelo de Wagner-Whitin

- Hipótesis: se debe planificar una secuencia de lotes de pedidos (o lotes de producción) en un horizonte de planificación de T períodos unitarios.
- En cada período, hay una única decisión a tomar: el tamaño del pedido o del lote de producción.
- Demanda en el período t conocida, d_t ítems.
- Al ordenar un producto, se incurre un costo c \$por unidad de producto, y un costo fijo K \$(es decir, si se coloca un pedido de y unidades, el costo es $cy + K\delta(y)$, con $\delta(y) = 1$ si $y > 0$, y 0 si no.
- Costos de inventario lineales, h \$/(ítem.unidad de tiempo).
- Inventario inicial cero, $I_0 = 0$.

- Tiempo de entrega cero, $L = 0$.

- Horizonte de planificación T conocido y discretizado (i.e, $0 \leq t \leq T$, con t y T enteros).

- Las órdenes y la demanda se realizan (ocurren) al comienzo de cada período. El costo de inventario se aplica a la cantidad disponible al final del período.

- Variables de decisión: tamaño del lote a ordenar en cada período, $y_t \geq 0$, tamaño del inventario al final de cada período, $I_t \geq 0$.

- Objetivo: cuanto ordenar en cada período para atender la demanda (sin admitir ruptura de inventario o entregas retrasadas, "backlogging"), y minimizar los costos totales (suma de costos de pedidos y costos de inventario).

- Modelo estudiado inicialmente por Wagner y Whitin en 1958 - toma el nombre de estos autores.

Formulación de programación matemática

$$
\begin{aligned}
\text{Problema WW:} \min \quad & \sum_{t=1}^{T} K\delta(y_t) + cy_t + hI_t && (1)\\
\text{s.a.} \quad & I_t = I_{t-1} + y_t - d_t, t = 1, \ldots, T && (2)\\
& I_0 = 0; && (3)\\
& I_t, y_t \geq 0, t = 1, \ldots, T. && (4)
\end{aligned}
$$

- Restricciones (2) son de balance de inventario y la (3) es el inventario inicial.

- Notar que $I_t = \sum_{i=1}^{t}(y_i - d_i)$, por lo que podrían eliminarse estas variables.

- Asimismo, en cualquier solución óptima $\sum_{t=1}^{T} y_t = \sum_{t=1}^{T} d_t$, por lo que puede omitirse el segundo término de la función objetivo.

Análisis

- Teorema: cualquier política óptima cumple la propiedad de "inventario cero", es decir, es una política tal que $y_t I_{t-1} = 0$ para $t = 1, \ldots, T$.

- Demostración: por absurdo (suponer una política óptima que no cumple la propiedad, construir otra política derivada que es de menor costo).

- Corolario: En una política óptima, todos los pedidos tienen tamaño igual a la suma de las demandas por una cantidad entera de períodos subsiguientes.

Algoritmo de W-W para resolver el modelo

- Construcción auxiliar: red acíclica, nodos $V = \{1, \ldots, T+1\}$, arcos (i, j) para todo $j > i$, de largo $l_{ij} =$ costo asociado con realizar un pedido en i para satisfacer la demanda hasta el período $j - 1$.

$$l_{ij} = K + h \sum_{k=i}^{j-1} (k - i) d_k.$$

- El largo del camino más corto del nodo 1 al nodo $T + 1$ es el costo mínimo de resolver las demandas de 1 a T.

- La política óptima (pensada como los momentos de re-orden) está dada por los nodos que pertenecen a ese camino, y las cantidades pedidas se calculan fácilmente a partir de las aristas del camino.

- Algoritmos de búsqueda de camino más corto: complejidad computacional $O(T^2)$.

- Generalizaciones sencillas: costos fijos y unitarios de compra y costos de inventario dependientes de período, c_t, K_t, h_t.

Modelos con restricciones de capacidad (Sección 8.2 libro referencia)

$$\text{Problema WW-C:} \min \quad \sum_{t=1}^{T} K\delta(y_t) + cy_t + hI_t \tag{5}$$

$$\text{s.a.} \quad I_t = I_{t-1} + y_t - d_t, t = 1, \ldots, T \tag{6}$$

$$I_0 = 0; \tag{7}$$

$$I_t, y_t \geq 0, t = 1, \ldots, T. \tag{8}$$

$$y_t \leq C_t, t = 1, \ldots, T. \tag{9}$$

- Los valores C_t en las restricciones (9) son las cantidades máximas que pueden ser compradas (o producidas) en cada período.

- Esta modificación alcanza para que el problema sea NP-completo.

- Métodos de solución: exactos para problemas de tamaño pequeño, o con restricciones adicionales; heurísticas o metaheurísticas para el caso general.

- Enfoque de Florian y Klein (1971) da un procedimiento eficiente cuando $C_t = C$ para todo t.

- Estudio de $\mathcal{P} = \{y \in R^T : y$ satisface las restricciones de WW-C$\}$ - las soluciones óptimas estarán en los puntos extremos de este poliedro (por ser la f.objetivo cóncava y el problema una minimización).

- Propiedad de descomposición del inventario: si se fija un valor $I_k = 0$, y $\sum_{j=k+1}^{i} C_j \geq \sum_{j=k+1}^{i} d_j$ para todo $i = k+1, \ldots, T$, entonces se puede encontrar una solución óptima global resolviendo independientemente los primeros k períodos y los últimos $T - k$.

- Sea t tal que $I_t = 0$, se denota punto de regeneración. Sea

$S_{ij} = \{(y_{i+1}, \ldots, y_j) | I_i = I_j = 0, I_k > 0$ para $i < k < j\}$- secuencia de producción.

- Secuencias restringidas por capacidad: aquellas tales que todos los y son o 0 o C, excepto como máximo en un período.

- Propiedad: toda solución óptima está formada por la concatenación de secuencias restringidas por capacidad.

- Cuando $C_t = C$, la secuencia de producción óptima se puede encontrar resolviendo $T(T+1)/2 + 1$ problemas de camino más corto de complejidad individual $O(T^2)$; complejidad total $O(T^4)$. ($T(T+1)/2$ problemas corresponden a los costos de secuencias restringidas por capacidad entre pares de nodos i y j; el último corresponde al costo total, similar al usado por W-W).

Modelos multi-producto (Sección 8.3 libro referencia)

- Hipótesis: existen n productos distintos a ordenar. Problema sin capacidades, horizonte de planificación T períodos unitarios (discretizado).

- En cada período, la decisión a tomar es el tamaño del pedido o del lote de producción para cada producto i.

- Variables de decisión: tamaño del lote a ordenar en cada período, $y_{it} \geq 0$, tamaño del inventario al final de cada período, $I_{it} \geq 0$.

- Demanda en el período t conocida, d_{it} ítems.

- Al ordenar un producto, se incurre un costo c_i \$ por unidad de producto, y un costo fijo K_i \$ (es decir, si se coloca un pedido de y_{it} unidades, el costo es $cy_{it} + K_i\delta(y_{it})$ \$, con $\delta(y_{it}) = 1$ si $y_{it} > 0$, y 0 si no.

- Costos de inventario lineales, h_i $\$/($ítem . unidad de tiempo).

- Inventario inicial cero, $I_{i0} = 0$.

- Tiempo de entrega cero, $L = 0$.

- Horizonte de planificación T conocido y discretizado (i.e, $0 \leq t \leq T$, con t y T naturales positivos).

- Las órdenes y la demanda se realizan (ocurren) al comienzo de cada período. El costo de inventario se aplica a la cantidad disponible al final del período.

- Objetivo: cuanto ordenar en cada período para atender la demanda (sin admitir ruptura de inventario o entregas retrasadas, "backlogging"), y minimizar los costos totales (suma de costos de pedidos y costos de inventario).

Formulación de programación matemática

Problema WW-mp: $\min \quad \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} K_i \delta(y_{it}) + h_i I_{it}$ (10)

s.a. $I_{it} = I_{i,t-1} + y_{it} - d_{it}, t = 1, \ldots, T, i = 1, \ldots, n$ (11)

$I_{i0} = 0, i = 1, \ldots, n;$ (12)

$I_{it}, y_{it} \geq 0, t = 1, \ldots, T, i = 1, \ldots, n.$ (13)

- Este problema se descompone en n problemas de único producto, que se resuelven independientemente usando W-W.

- Versión más realista - suponer un costo conjunto de ordenar, K_0, que se aplica cuando se hace una orden en un período (involucre uno o más productos).

Formulación con costo único de pedido

Problema WW-mp': $\min \quad \sum_{t=1}^{T} \left[K_0 \delta(\sum_{i=1}^{n} y_{it}) + \sum_{i=1}^{n} (K_i \delta(y_{it}) + h_i I_{it}) \right]$ (14)

s.a. $I_{it} = I_{i,t-1} + y_{it} - d_{it}, t = 1, \ldots, T, i = 1, \ldots, n$ (15)

$I_{i0} = 0, i = 1, \ldots, n;$ (16)

$I_{it}, y_{it} \geq 0, t = 1, \ldots, T, i = 1, \ldots, n.$ (17)

- Este problema pertenece a la clase NP-completo (difícil de resolver para instancias medianas o grandes).

- Diversas heurísticas publicadas al respecto. Veremos la propuesta por Joneja (1990).

Heurística de “cubrimiento de costos” de Joneja

- Método procede período por período, avanzando en el tiempo. En el instante t, se considera definida la política de órdenes de los períodos anteriores; y se decide si ordenar o no en t, y en caso afirmativo, el tamaño de orden.

- Sea t_i el último período en que se ordenó el ítem i; sea H_{it} los costos totales de inventario del item i desde la última vez que se ordenó, suponiendo que no se va ordenar el ítem i en el período t. Entonces

$$H_{it} = h_i \sum_{j=t_i+1}^{t} (j - t_i) d_{ij}.$$

- Observación: en el modelo más simple de inventario, EOQ, la solución óptima Q^* se da cuando los costos por unidad de tiempo incurridos al ordenar (KD/Q^*) son iguales a los costos por unidad de tiempo de almacenamiento $(hQ^*/2)$.

- Esta es la base intuitiva de la heurística de Joneja, que buscar reproducir una propiedad similar en este caso, ordenando en los períodos en los que los costos de almacenamiento alcanzan y superan los costos de ordenar. En particular, si no se tiene en cuenta el costo de orden conjunto, H_0, la decisión de comprar o no el ítem i dependería de si $H_{it} > K_i$.

- Sin embargo, es necesario tener también en cuenta el costo de setup conjunto. Para esto, Joneja tiene en cuenta los valores $\max(H_{it} - K_i, 0)$ para todos los ítems i en el período t.

- Al tener en cuenta H_0, la heurística de Joneja propone la siguiente Regla: "en el período t, ordenar los ítems i tales que $H_{it} > K_i$, siempre que $\sum_{i=1}^{n} \max(H_{it} - K_i, 0) \geq K_0$".

- La regla no es suficiente para cubrir todos los casos de interés.

- Ejemplo: 2 productos, $h_1 = h_2 = 1$. Sea m arbitrario, $d_{1t} = 0$ para $t < m$, $d_{1,m)} = (K_0 + K_1)/(m-1)$, $d_{1,m+1} = 0$, $d_{2t} = 0$ para $t \leq m$, $d_{2,m+1} = (K_0 + K_2)/(m)$.

- Regla 1 implica que se pedirá el ítem 1 en el momento m, pero no se pedirá el ítem 2, que se pedirá recién en el momento $m+1$. Si ambos ítems se pidieran en el momento m, se paga un costo extra de $h_2 d_{2,m+1} = (K_0 + K_2)/m$ en inventario, pero se ahorra K_0 en costos de pedido; para m grande, podemos estar lejos del óptimo.

- Se agrega una segunda regla. En cada momento t, se tiene en cuenta t_0, el último momento en que se hizo alguna orden conjunta, y supongamos que el ítem i no fue ordenado en ese momento (porque $H_{it_0} < K_i$). Se define $S_{it} = h_i(t_0 - t_i) \sum_{j=t_0}^{t} d_{ij}$ el costo adicional de inventarios que se incurre en el intervalo (t_i, t_0) al haber ordenado la cantidad necesaria para cubrir la demanda del ítem i en el intervalo (t_0, t) en el momento t_i (en lugar de ordenarlo más tarde, en t_0). Regla 2: Si $S_{it} \geq K_i$, entonces ordenar también i en el período t_0. (regla de "pull-back").

- Heurística de complejidad $O(nT)$; experimentos computacionales muestran que esta heurística, y algunas variantes, tienen soluciones muy cercanas al óptimo (ver la referencia Joneja (1990) por más detalles).

Referencias y material complementario

- Joneja, Dev (1990), The Joint Replenishment Problem: New Heuristics and Worst Case Performance Bounds. Operations Research Vol. 38, No. 4, pp. 711-723
`https://www-jstor-org.proxy.timbo.org.uy/stable/171090`
(último acceso 2020-08-17),

- Robinson, E.P., Narayanan A., Gao, L. -L. (2007). Effective Heuristics for the Dynamic Demand Joint Replenishment Problem. The Journal of the Operational Research Society, Vol. 58, No. 6, pp.808-815.
`https://www-jstor-org.proxy.timbo.org.uy/stable/4622765`
(último acceso 2020-08-17).

(es preciso hacer login en Timbó antes de acceder a los links).