Curso: Teoría, Algoritmos y Aplicaciones de Gestión Logística.

Modelos de Inventarios, Parte 1: Modelos de tamaño económico de lote

Departamento de Investigación Operativa
Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

dictado semestre 2 - 2020

Contenido:

1. Introducción

2. Modelo de tamaño económico de lote clásico

3. Modelo con horizonte de tiempo finito

4. Modelos con restricciones en los períodos de reaprovisionamiento

Introducción

- Costos de compra (fijos + variables) versus costos de inventario
- Lot sizing = determinación de tamaño de lote (de compra)

Modelo de tamaño económico de lote clásico (o lote económico de producción)

- Modelo clasico, introducido por Harris (1915)

- Elementos: almacén o minorista, que debe atender una demanda constante para un único ítem, y coloca órdenes (pedidos) para recibir ese ítem de otro punto de la red de distribución (suponiendo disponibilidad infinita).

Modelo de tamaño económico de lote clásico - Hipótesis

- Demanda constante, tasa D ítems/unidad tiempo.
- Órdenes idénticas, de tamaño Q ítems/pedido.
- Costo fijo K $\$$/orden por cada orden colocada.
- Costos de inventario lineales, h $\$$/ítem.
- Tiempo de entrega cero, $L = 0$.
- Inventario inicial cero, $I_0 = 0$.
- Horizonte de planificación t infinito.
- Variable de decisión: tamaño del lote Q (tiempo de reorden T).

Modelo de tamaño económico de lote clásico - Objetivo

- Encontrar la política de pedidos (tamaño de lote) óptima, minimizando el costo total de compra y de inventarios por unidad de tiempo, sin rupturas de inventario

- Forma de la función “nivel de inventario”, $I(t)$ - dientes de sierra.

- Propiedad de inventario cero (zero-inventory ordering property). Consecuencia: $Q = DT$.

- Modelo de optimización; formulación, resolución y cálculo del tamaño de lote óptimo (EOQ - economic order quantity) Q^*.

- Hipótesis sencillas de relajar: Inventario inicial; tiempo de entrega.

Modelo de tamaño económico de lote - horizonte finito

- Demanda constante, tasa D ítems/unidad tiempo.
- Costo fijo K \$/orden por cada orden colocada.
- Costos de inventario lineales, h \$/ítem.
- Tiempo de entrega cero, $L = 0$.
- Inventario inicial cero, $I_0 = 0$.
- Hipótesis diferentes: horizonte de planificación t finito conocido; órdenes eventualmente de tamaños distintos.
- Variables de decisión: cantidad de pedidos m, momentos T_i en que se realizan los pedidos, $0 \leq i \leq m-1$, tamaños de los pedidos Q_i.

Análisis

- Notación adicional: T_m tiempo entre el último período y t. Entonces, $\sum_{i=1}^{m} T_i = t$.
- Forma de la función de inventario para una política $\mathcal{P}$ arbitraria.
- Propiedad de inventario cero en este problema. Consecuencia: en toda política óptima, $Q_i = DT_i$.
- Costo total de inventario, condicional a la realización de m pedidos: $\sum T_i DT_i/2 = D/2 \sum T_i^2$.
- Formulación de problema condicional de minimización de costos de inventario: $\min \sum T_i^2$, s.a. $\sum T_i = t$, $T_i \geq 0 \ 1 \leq i \leq m$. Solución: $T_i = t/m$.

- Costo total de P (por unidad de tiempo): $Km/t + hDt/(2m)$; sea $\alpha = t\sqrt{(hD)/(2K)}$; por convexidad de la función, el valor óptimo $m*$ será $floor(\alpha)$ o $ceiling(\alpha)$.

Modelo de tamaño económico de lote - horizonte infinito - Políticas "potencia de dos"

- Problema con el modelo de tamaño económico de lote: T puede ser cualquier número real, poco práctico para implementación.

- Alternativa - buscar políticas donde T sea una potencia de dos de un período de planificación básico T_B, es decir $T = T_B 2^k$, con $k \in N$ (hipótesis - el período de planificación básico es pequeño en relación al período óptimo de reorden, $T_B < T^*$).

- Preguntas: cómo encontrar la mejor política de esta familia, minimizando el costo de inventario? Qué tan lejos del óptimo está la performance de la mejor política de esta familia?

- Costo de una política general $KD/Q + hQ/2 = K/T + hTD/2 = f(T)$. Notación $g = hD/2$, $f(T) = K/T + gT$

- Tiempo óptimo de reorden: $T^* = \sqrt{K/g}$, costo $f(T^*) = 2\sqrt{Kg}$.
- Dado que f es convexa, el k óptimo es el menor k que verifica $f(T_B 2^k) \leq f(T_B 2^{k+1})$.
- por lo tanto, que $K/(T_B 2^k) + gT_B 2^k \leq K/(T_B 2^{k+1}) + gT_B 2^{k+1}$
- entonces, k es el menor entero tal que $\sqrt{K/(2g)} = 1/\sqrt{2}T^* \leq T_B 2^k = T$.
- También se cumplirá que $T = T_B 2^k \leq \sqrt{2K/g} = \sqrt{2}T^*$.
- Por lo tanto, el período óptimo de reorden estará en $[1/\sqrt{2}T^*, \sqrt{2}T^*]$.
- Es posible verificar que $f(1/\sqrt{2}T^*) = f(\sqrt{2}T^*) = 1/2(1/\sqrt{2} + \sqrt{2})f(T^*)$,
- por ser f convexa, $f(T)/f(T*) \leq 1/2(1/\sqrt{2} + \sqrt{2}) \approx 1.06$.