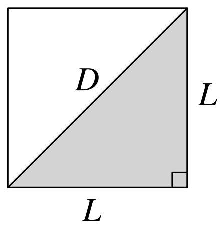
APROXIMACIONES RACIONALES DE $\sqrt{2}$

CÁLCULO 1 – FING/UDELAR

Uno de los resultados matemáticos más importantes de la antigüedad griega (escuela pitagórica, siglo VI a. C.) es que la diagonal D de un cuadrado y su lado L son *inconmensurables*, en el sentido que la razón D/L no se puede expresar como fracción de dos números enteros. Es decir, con notaciones modernas:



$$D/L \;=\; \sqrt{2} \;\notin\; \mathbb{Q}\,.$$

El objetivo de este artículo es aproximar el número irracional $\sqrt{2}$ por números racionales, con el fin de producir los dígitos *exactos* de $\sqrt{2}$ en base 10.

1. El método

1.1. Observación inicial. El método se basa en la observación que

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \;=\; \frac{1(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} \;=\; \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} \;=\; \frac{1-\sqrt{2}}{-1} \;=\; \sqrt{2}-1\,,$$

de tal modo que:

$$\sqrt{2} \;=\; 1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\,\cdot \tag{1.1}$$

Así, la igualdad anterior muestra que $\sqrt{2}$ es solución de la ecuación

$$x \;=\; 1+\frac{1}{1+x}\,\cdot \tag{1.2}$$

que sólo involucra operaciones (1, +, /) definidas sobre los números racionales. De hecho:

Lema 1. — *El número real $\sqrt{2}$ es la única solución positiva de la ecuación* (1.2).

Demostración. Es claro (según la observación anterior) que $\sqrt{2}$ es solución de (1.2), y es una solución positiva. Ahora, supongamos que x sea una solución positiva de (1.2), es decir:

$$x-1 \;=\; \frac{1}{1+x}\,\cdot$$

Multiplicando los dos lados por $1+x$, obtenemos que $(x-1)(1+x)=1$, es decir: $x^2-1=1$. Esto implica que $x^2=2$, luego: $x=\sqrt{2}$ (pues $x>0$ por hipótesis). □

Dicho de otro modo, $\sqrt{2}$ es el único *punto fijo* de la función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ definida por:

$$f(x) \;:=\; 1+\frac{1}{1+x} \qquad (x\in\mathbb{R}^+) \tag{1.3}$$

(Se recuerda que un punto fijo de $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ es un número $x\in\mathbb{R}^+$ tal que $f(x)=x$.)

Observación 2 (Punto fijo y fracción continua)**.** — Un juego interesante con la ecuación (1.1) consiste en remplazar en el denominador del lado derecho el número $\sqrt{2}$ por... el lado derecho sí mismo. Iterando múltiples veces el proceso, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1+\frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1+\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} \\
&= 1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}} \\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}
\end{aligned}$$

El interés de este juego —no tan infantil como parece— es que en el límite, se obtiene una fracción infinita, llamada *fracción continua*, que no refiere más al número $\sqrt{2}$. (No definiremos aquí el sentido de tal fracción continua; sólo nos interesa la intuición subyacente.) El mismo juego formal se puede jugar con la ecuación de punto fijo $\sqrt{2} = f(\sqrt{2})$, lo que nos da:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= f(\sqrt{2}) = f(f(\sqrt{2})) = f(f(f(\sqrt{2}))) = \cdots \\
&= f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(\cdots)))))))))))))))
\end{aligned}$$

De nuevo, se obtiene una expresión infinita —puramente formal— que no refiere más a $\sqrt{2}$. (Recordemos que la definición (1.3) de la función f sólo utiliza 1, +, /.) Intuitivamente, se puede ver el número irracional $\sqrt{2}$ como el resultado de una iteración infinita de la función f... a partir de nada. Esta intuición es la base del método que vamos a presentar.

1.2. Definición de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como no se puede partir de nada, vamos a construir nuestra sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$ iterando la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ a partir de una primera aproximación racional —por ejemplo: $u_0 = 1$. Formalmente, la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es definida por recurrencia sobre $n \in \mathbb{N}$ por las ecuaciones:

$$u_0 := 1 \qquad \text{y} \qquad u_{n+1} := f(u_n) = 1 + \frac{1}{1+u_n} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.4}$$

El interés de la definición anterior es que, por construcción:

Proposición 3. — *$u_n \in \mathbb{Q}^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La propiedad se demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

- Caso de base. Tenemos que $u_0 = 1 \in \mathbb{Q}^+$.
- Paso de inducción. Supongamos que $u_n \in \mathbb{Q}^+$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces, tenemos que $u_{n+1} = f(u_n) = 1 + 1/(1+u_n) \in \mathbb{Q}^+$. □

Los primeros términos de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dados por:

$$\begin{array}{rcllcl}
u_0 & = & 1 & & < & \sqrt{2} \\
u_1 & = & 3/2 & = 1,5 & > & \sqrt{2} \\
u_2 & = & 7/5 & = 1,4 & < & \sqrt{2} \\
u_3 & = & 17/12 & = 1,4166666666\cdots & > & \sqrt{2} \\
u_4 & = & 41/29 & = 1,4137931034\cdots & < & \sqrt{2} \\
u_5 & = & 99/70 & = 1,4142857142\cdots & > & \sqrt{2} \\
u_6 & = & 239/169 & = 1,4142011834\cdots & < & \sqrt{2} \\
u_7 & = & 577/408 & = 1,4142156862\cdots & > & \sqrt{2} \\
u_8 & = & 1393/985 & = 1,4142131979\cdots & < & \sqrt{2} \\
u_9 & = & 3363/2378 & = 1,4142136248\cdots & > & \sqrt{2} \\
u_{10} & = & 8119/5741 & = 1,4142135516\cdots & < & \sqrt{2} \\
u_{11} & = & 19601/13860 & = 1,4142135642\cdots & > & \sqrt{2}
\end{array}$$

Observando estos 12 primeros términos, *parece* que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- alterna entre aproximaciones inferiores de $\sqrt{2}$ (para los términos de índice par) y aproximaciones superiores de $\sqrt{2}$ (para los términos de índice impar);
- converge hacia $\sqrt{2}$ ($\approx 1,4142135624$) cuando $n \to \infty$.

Por supuesto, esta observación sobre una cantidad finita de términos de la sucesión no constituye prueba ni de la propiedad de alternancia ni de la propiedad de convergencia.

Observación 4. — Para posicionar cada uno de los términos $u_0, u_1, \dots, u_{11}$ respecto a $\sqrt{2}$, se recuerda que para todo racional $r = p/q \in \mathbb{Q}^+$ (con $p, q \in \mathbb{N}^*$), tenemos que:

- $r = p/q < \sqrt{2}$ si y sólo si $p^2 < 2q^2$;
- $r = p/q > \sqrt{2}$ si y sólo si $p^2 > 2q^2$.

Por ejemplo, en el caso del término $u_3 = 17/12$, tenemos que $p = 17$ y $q = 12$. Se observa que p^2 $(=17^2 = 289) > 2q^2(= 2 \cdot 12^2 = 288)$, de tal modo que $u_3 > \sqrt{2}$.

2. Estudio de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2.1. Estudio de la función $f(x) = 1 + 1/(1 + x)$. La sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es definida iterando la función $f(x) = 1 + 1/(1 + x)$ ($f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$) a partir del valor inicial $u_0 = 1$, y en lo siguiente, veremos que la propiedades de f determinan el comportamiento de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Comencemos por establecer las propiedades básicas de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$:

Proposición 5 (Propiedades de la función f)**.**

(1) *La función f es decreciente: si $x < y$ ($\in \mathbb{R}^+$), entonces $f(x) > f(y)$.*
(2) *Para todo $x \in \mathbb{R}^+$: $1 < f(x) < 2$.*
(3) $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ *y* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Demostración. (1) Supongamos que $x < y$ (con $x, y \in \mathbb{R}^+$). Tenemos que $1+x < 1+y$, entonces $1/(1 + x) > 1/(1 + y)$, entonces $1 + 1/(1 + x) > 1 + 1/(1 + y)$, es decir: $f(x) > f(y)$.

(2) Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $x > 0$, entonces $1 + x > 1$, entonces $0 < 1/(1 + x) < 1$, luego $1 < 1 + 1/(1 + x) < 2$, es decir: $1 < f(x) < 2$.

(3) Tenemos que $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \dfrac{1}{1+x}\right) = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1+x}\right) = 1 + 0 = 1.$ □

2.2. Propiedades de alternancia de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función decreciente y $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (punto fijo), es fácil ver que:

Lema 6. — *Para todo $x \in \mathbb{R}^+$:*

(1) *Si $x < \sqrt{2}$, entonces $f(x) > \sqrt{2}$.*
(2) *Si $x > \sqrt{2}$, entonces $f(x) < \sqrt{2}$.*

Demostración. En efecto, como f es decreciente y $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$:
(1) Si $x < \sqrt{2}$, entonces $f(x) > f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
(2) Si $x > \sqrt{2}$, entonces $f(x) < f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. □

Esta propiedad implica que:

Proposición 7 (Alternancia)**.** — *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:*

$$\begin{cases} u_n < \sqrt{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ u_n > \sqrt{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Demostración. La propiedad se demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

- Caso de base. El entero 0 (= 2 × 0) es par y $u_0 = 1 < \sqrt{2}$.
- Paso de inducción. Supongamos que la propiedad se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$. Se distinguen los dos siguientes casos:
  - O bien n es par. En este caso, tenemos que $u_n < \sqrt{2}$ (por hipótesis de inducción). Entonces $u_{n+1} = f(u_n) > \sqrt{2}$ (por el lema anterior), el índice $n + 1$ siendo impar.
  - O bien n es impar. En este caso, tenemos que $u_n > \sqrt{2}$ (por hipótesis de inducción). Entonces $u_{n+1} = f(u_n) < \sqrt{2}$ (por el lema anterior), el índice $n + 1$ siendo par. □

2.3. Descomposición de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La Prop. 7 establece que los términos de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alternan entre aproximaciones inferiores de $\sqrt{2}$ y aproximaciones superiores.

En tal situación, es natural descomponer dicha sucesión en dos subsucesiones: una subsucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que agrupa los términos de índice par (aproximaciones inferiores), y otra subsucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que agrupa los términos de índice impar (aproximaciones superiores). Formalmente, las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son definidas por:

$$a_n := u_{2n} \qquad \text{y} \qquad b_n := u_{2n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.1}$$

Por la Prop. 7, tenemos que:

$$a_n < \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad b_n > \sqrt{2} \qquad (\text{para todo } n \in \mathbb{N}) \tag{2.2}$$

Además, se verifica fácilmente que:

Proposición 8. — *Las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son caracterizadas por las ecuaciones:*

$$a_0 = 1 \qquad a_{n+1} = f(f(a_n)) \tag{2.3}$$

$$b_0 = 3/2 \qquad b_{n+1} = f(f(b_n)) \tag{2.4}$$

Demostración. En efecto, se observa que:
(2.3) $a_0 = u_0 = 1$ y $a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(a_n))$.
(2.4) $b_0 = u_1 = 3/2$ y $b_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(b_n))$. □

De nuevo, el decrecimiento de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ implica que:

Proposición 9 (Variaciones de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$)**.**

(1) *La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente: $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
(2) *La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente: $b_n > b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. (1) Se demuestra que $a_n < a_{n+1}$ por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

- Caso de base. Tenemos que $a_0 = u_0 = 1$ y $a_1 = u_2 = 7/5$; es decir: $a_0 < a_1$.
- Paso de inducción. Supongamos que $a_n < a_{n+1}$. Como f es decreciente, tenemos que $f(a_n) > f(a_{n+1})$, entonces $f(f(a_n)) < f(f(a_{n+1}))$, es decir $a_{n+1} < a_{n+2}$ por (2.3).

(2) Se demuestra que $b_n > b_{n+1}$ por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

- Caso de base. Tenemos que $b_0 = u_1 = 3/2$ y $b_1 = u_3 = 17/12$; es decir: $b_0 > b_1$.
- Paso de inducción. Supongamos que $b_n > b_{n+1}$. Como f es decreciente, tenemos que $f(b_n) < f(b_{n+1})$, entonces $f(f(b_n)) > f(f(b_{n+1}))$, es decir $b_{n+1} > b_{n+2}$ por (2.4). □

Así, descompusimos la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en dos subsucesiones:

- una sucesión creciente $(a_n = u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ de aproximaciones inferiores de $\sqrt{2}$;
- una sucesión decreciente $(b_n = u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de aproximaciones superiores de $\sqrt{2}$.

Se puede resumir la situación en el siguiente diagrama:

$$
\boxed{\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 = a_0 & < & a_1 & < & a_2 & < \cdots < & a_n & < & a_{n+1} & < \cdots \sqrt{2} \cdots < & b_{n+1} & < & b_n & < \cdots < & b_2 & < & b_1 & < & b_0 = 1,5 \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
u_0 & & u_2 & & u_4 & & u_{2n} & & u_{2n+2} & & u_{2n+3} & & u_{2n+1} & & u_5 & & u_3 & & u_1
\end{array}}
$$

En particular, las observaciones anteriores implican que:

- La sucesión creciente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y acotada superiormente por $\sqrt{2}$ tiene un límite:

$$a_\infty := \lim_{n\to\infty} a_n \leq \sqrt{2}\,. \tag{2.5}$$

- La sucesión decreciente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y acotada inferiormente por $\sqrt{2}$ tiene un límite:

$$b_\infty := \lim_{n\to\infty} b_n \geq \sqrt{2} \tag{2.6}$$

¡Cuidado! Por el momento, sólo demostramos las desigualdades $a_\infty \leq \sqrt{2} \leq b_\infty$, y podría ocurrir que dichas desigualdades sean estrictas: $a_\infty < \sqrt{2} < b_\infty$ (en caso de mala suerte).

Por suerte, tenemos que $a_\infty = b_\infty = \sqrt{2}$, y para comprobarlo, se necesita estudiar la convergencia de la sucesión inicial $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.4. Convergencia de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La convergencia de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hacia el límite deseado es consecuencia de los dos siguientes resultados:

Lema 10. — *Para todo $n \in \mathbb{N}$:* $u_n \in [1, 2)$.

Demostración. Para $n = 0$, tenemos que $u_n = u_0 = 1 \in [1, 2)$. Y cuando $n \geq 1$, tenemos que $u_n = f(u_{n-1}) \in (1, 2) \subseteq [1, 2)$ por la Prop. 5 (2). □

Proposición 11. — *Para todos $x, y \geq 1$:* $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$.

Demostración. Para todos $x, y \geq 1$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= \left(1 + \frac{1}{1+x}\right) - \left(1 + \frac{1}{1+y}\right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \\
&= \frac{1(1+y) - 1(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}
\end{aligned}
$$

Se observa que en la fracción anterior, el denominador $(1+x)(1+y)$ es positivo. Además, como $x, y \geq 1$ (por hipótesis), tenemos que $(1+x)(1+y) \geq 2 \times 2 = 4$, entonces:

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|y-x|}{(1+x)(1+y)} \leq \frac{|y-x|}{4} = \frac{1}{4}|x-y|\,.$$ □

Combinando las dos propiedades anteriores, obtenemos que:

Proposición 12 (Velocidad de convergencia). — *Para todo $n \in \mathbb{N}$:*

(1) $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4}|u_n - \sqrt{2}|$

(2) $|u_n - \sqrt{2}| \leq 1/4^n$.

Demostración. (1) Como $u_n \geq 1$ (por el Lema 10) y $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, tenemos por la Prop. 11 que:

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|f(u_n) - f(\sqrt{2})\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|.$$

(2) La propiedad se demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

- Caso de base. Tenemos que $|u_0 - \sqrt{2}| = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 \leq 1 = 1/4^0$.
- Paso de inducción. Supongamos que $|u_n - \sqrt{2}| \leq 1/4^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Según el ítem (1) y la hipótesis de inducción (HI), tenemos que:

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right| \overset{\text{(HI)}}{\leq} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}. \qquad \square$$

Del ítem (2) de la proposición anterior, se deduce inmediatamente que:

Corolario 13 (Convergencia). — *La sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $\sqrt{2}$:* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Esto implica en particular que:

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} u_{2n} = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad b_\infty = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \sqrt{2}.$$

Observación 14. — De hecho, la Proposición 12 nos da mucha más información que el resultado de convergencia (Corolario 13) que el permite demostrar, en la medida en que nos da igualmente la *velocidad de convergencia*. En efecto, el ítem (1) nos dice que en cada iteración, se obtiene un término 4 veces más cercano del límite $\sqrt{2}$ que el término anterior. Como $4^2 = 16 > 10$, este resultado también nos dice que en 2 iteraciones, se divide la distancia al límite por más de 10, de tal modo que se gana (aproximadamente) un dígito más de precisión.

2.5. Resumen del método.

El método que seguimos se puede resumir así:

1. Por un cálculo sencillo, vimos que $\sqrt{2}$ es punto fijo de una función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sencilla, que tiene la propiedad de transformar los números racionales en números racionales.
2. Iterando dicha función (a partir de cierta aproximación racional inicial), definimos una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de aproximaciones racionales del punto fijo $\sqrt{2}$.
3. Demostramos que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es decreciente, lo que implica que:
   (a) Los términos de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alternan entre aproximaciones inferiores y superiores del punto fijo $\sqrt{2}$. Además:
   (b) Los términos de índice par forman una subsucesión $(a_n = u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ creciente.
   (c) Los términos de índice impar forman una subsucesión $(b_n = u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente.
4. Al final, mostramos que la función f satisface la propiedad

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$$

   (alrededor de $\sqrt{2}$), lo que implica la convergencia de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hacia el punto fijo $\sqrt{2}$. Además, vimos que el factor $1/4$ en la desigualdad anterior nos da una velocidad de convergencia de tipo $|u_n - \sqrt{2}| < 1/4^n$.

El método anterior es un método muy general que se puede adaptar para calcular aproximaciones racionales de muchos otros números. (Ejercicio: adaptar el método para calcular aproximaciones racionales de $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ y más generalmente: de $\sqrt{p}$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$.)

3.1. Observación. En lo anterior, estudiamos la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (y demostramos su convergencia) con las herramientas usuales del Análisis en $\mathbb{R}$, pero nunca usamos explícitamente la propiedad que todos los términos u_n son números racionales.

Ahora, se trata de explotar esta propiedad para obtener más información sobre la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para ello, se observa lo siguiente:

Observación 15. — *Para todo racional $p/q \in \mathbb{Q}^+$, tenemos que:*

$$f(p/q) \;=\; \frac{p+2q}{p+q}\,. \tag{3.1}$$

Demostración. En efecto, tenemos que:

$$f(p/q) \;=\; 1+\frac{1}{1+p/q} \;=\; 1+\frac{1}{(p+q)/q} \;=\; 1+\frac{q}{p+q} \;=\; \frac{(p+q)+q}{p+q} \;=\; \frac{p+2q}{p+q}\,. \qquad \square$$

Observación 16. — *Si $p/q \in \mathbb{Q}^+$ (con $p,q \in \mathbb{N}^*$) es una fracción irreducible, entonces la fracción $(p+2q)/(p+q)$ (que define el racional $f(p/q)$) también es irreducible.*

Demostración. Razonando por contraposición[1], supongamos que la fracción $(p+2q)/(p+q)$ sea reducible. Es decir: supongamos que existe un entero $d \geq 2$ que divide a la vez $p+2q$ y $p+q$. Entonces, el entero $d \geq 2$ divide la diferencia $(p+2q)-(p+q) = q$, y como d divide $p+q$, se deduce que d divide la diferencia $(p+q)-q = p$ igualmente. Luego, el entero $d \geq 2$ divide p y q a la vez, lo que demuestra que la fracción p/q es reducible. $\square$

3.2. Definición de las sucesiones $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Las dos observaciones anteriores nos permiten escribir los términos de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la forma $u_n = p_n/q_n$, donde $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son las sucesiones de enteros naturales definidas por la ecuaciones:

$$p_0 \;=\; q_0 \;:=1 \qquad p_{n+1} \;:=\; p_n+2q_n \qquad q_{n+1} \;:=\; p_n+q_n \qquad (n\in\mathbb{N}) \tag{3.2}$$

Aquí, se observa que las dos sucesiones $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sucesión de los numeradores) y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sucesión de los denominadores) son definidas por una recurrencia mutua, en el sentido que p_{n+1} y q_{n+1} dependen a la vez de p_n y q_n. Por supuesto, es claro por construcción que:

Proposición 17. — *Para todo $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = p_n/q_n \quad$ (fracción irreducible).*

Demostración. La propiedad se demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

- Caso de base. Tenemos que $u_0 = 1 = 1/1 = p_0/q_0$ (fracción irreducible).
- Paso de inducción. Supongamos que $u_n = p_n/q_n$, y que p_n/q_n es irreducible. Según la Obs. 15 y la definición de las sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que:

  $$u_{n+1} \;=\; f(u_n) \;\overset{\text{(HI)}}{=}\; f(p_n/q_n) \;=\; (p_n+2q_n)/(p_n+q_n) \;=\; p_{n+1}/q_{n+1}\,,$$

  la fracción $p_{n+1}/q_{n+1} = (p_n+2q_n)/(p_n+q_n)$ siendo irreducible por la Obs. 16. $\square$

Los primeros términos de las sucesiones $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dados en la siguiente tabla:

---

[1]En lógica, el principio de contraposición dice que las dos implicaciones $\phi \Rightarrow \psi$ («ϕ implica ψ») y $\neg\psi \Rightarrow \neg\phi$ («no ψ implica no ϕ») son equivalentes. Así, para mostrar que «p/q reducible $\Rightarrow$ $(p+2q)/(p+q)$ irreducible» ($\phi \Rightarrow \psi$), se puede suponer que «$(p+2q)/(p+q)$ es reducible» ($\neg\psi$) y demostrar que «p/q es reducible» ($\neg\phi$).

n	p_n	q_n	$u_n = p_n/q_n$
0	1	1	1
1	3	2	1,5
2	7	5	1,4
3	17	12	1,4166666666...
4	41	29	1,4137931034...
5	99	70	1,4142857142...
6	239	169	1,4142011834...
7	577	408	1,4142156862...
8	1393	985	1,4142131979...
9	3363	2378	1,4142136248...
10	8119	5741	1,4142135516...
11	19601	13860	1,4142135642...

3.3. Volviendo a la convergencia. Es fácil ver que:

Proposición 18. — *Para todo $n \in \mathbb{N}$:* $\quad p_n \geq q_n \geq 2^n$.

Demostración. La propiedad se demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

- Caso de base. Tenemos que $1 = p_0 = q_0 = 2^0$ (caso de igualdad).
- Paso de inducción. Supongamos que $p_n \geq q_n \geq 2^n$ (HI) para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{array}{lrcl} & p_{n+1} &=& p_n + 2q_n \;\geq\; p_n + q_n \;=\; q_{n+1} \\ \text{y} & q_{n+1} &=& p_n + q_n \overset{\text{(HI)}}{\geq} q_n + q_n \;=\; 2q_n \overset{\text{(HI)}}{\geq} 2(2^n) \;=\; 2^{n+1}\,. \end{array}$$ □

El resultado anterior implica en particular que $u_n = p_n/q_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (lo que ya demostramos en el Lema 10 p. 5). Además, las desigualdades $p_n, q_n \geq 2^n$ implican que:

Corolario 19. — $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$.

En otro lado, se observa que:

$$u_n^2 - (\sqrt{2})^2 \;=\; \frac{p_n^2}{q_n^2} - 2 \;=\; \frac{p_n^2 - 2q_n^2}{q_n^2}\,.$$

Intuitivamente, se puede ver el entero relativo $p_n^2 - 2q_n^2$ en el numerador de la fracción anterior como una medida (en $\mathbb{Z}$) de la «calidad» de la aproximación racional $u_n = p_n/q_n$ respecto al límite $\sqrt{2}$. En particular, es claro que:

- $p_n^2 - 2q_n^2 < 0 \quad\Leftrightarrow\quad u_n^2 = p_n^2/q_n^2 < 2 \quad\Leftrightarrow\quad u_n < \sqrt{2}$ (aproximación inferior)
- $p_n^2 - 2q_n^2 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad u_n^2 = p_n^2/q_n^2 > 2 \quad\Leftrightarrow\quad u_n > \sqrt{2}$ (aproximación superior)

El siguiente resultado muestra que, según esta medida, las aproximaciones racionales p_n/q_n son óptimas, pues la diferencia $p_n^2 - 2q_n^2$ siempre es igual a 1 en valor absoluto:

Proposición 20. — *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:*

$$p_n^2 - 2q_n^2 \;=\; (-1)^{n+1} \;=\; \begin{cases} -1 & \textit{si } n \textit{ es par} \\ +1 & \textit{si } n \textit{ es impar} \end{cases}$$

Demostración. La propiedad se demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

- Caso de base. Tenemos que $p_0^2 - 2q_0^2 = 1 - 2 = -1 = (-1)^{0+1}$.

- Paso de inducción. Supongamos que $p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{array}{rcl} p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 & = & (p_n + 2q_n)^2 - 2(p_n + q_n)^2 \\ & = & (p_n^2 + 4p_nq_n + 4q_n^2) - 2(p_n^2 + 2p_nq_n + q_n^2) \\ & = & p_n^2 + 4p_nq_n + 4q_n^2 - 2p_n^2 - 4p_nq_n - 2q_n^2 \\ & = & -p_n^2 + 2q_n^2 \ = \ -(p_n^2 - 2q_n^2) \stackrel{\text{(HI)}}{=} -(-1)^n \ = \ (-1)^{n+1} \end{array} \qquad \square$$

La proposición anterior nos da una nueva demostración de la propiedad de alternancia entre las aproximaciones inferiores y superiores de $\sqrt{2}$ (Prop. 7), pues:

- Cuando n es par, tenemos que $p_n^2 - 2q_n^2 = -1 < 0$, entonces $u_n = p_n/q_n < \sqrt{2}$.
- Cuando n es impar, tenemos que $p_n^2 - 2q_n^2 = 1 > 0$, entonces $u_n = p_n/q_n > \sqrt{2}$.

Además, la igualdad $p_n^2 - 2q_n^2 = (-1)^{n+1}$ implica que

$$u_n^2 - 2 \ = \ \frac{p_n^2 - 2q_n^2}{q_n^2} \ = \ \frac{(-1)^{n+1}}{q_n^2} \ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ 0\,,$$

lo que demuestra de nuevo que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

4. Cálculo de los dígitos de $\sqrt{2}$ en base 10

En esta sección, se muestra como utilizar las aproximaciones racionales $u_n = p_n/q_n$ de $\sqrt{2}$ para calcular efectivamente los dígitos (exactos) de $\sqrt{2}$ en base 10.

4.1. División euclidiana.

El algoritmo que vamos a presentar se basa en una operación fundamental de la aritmética: la *división euclidiana*. Recordemos que:

Teorema 21 (División euclidiana). — *Para todos $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, existen $c, r \in \mathbb{N}$ tales que*

$$p = cq + r \quad \textit{con} \quad 0 \leq r < q\,.$$

Además, los dos enteros $c, r \in \mathbb{N}$ son únicos; se llaman respectivamente el cociente *y el* resto *de la división euclidiana de p por q.*

Ejemplo 22 (División euclidiana de 215 por 7). — Si $p = 215$ y $q = 7$, se observa que

$$215 = 30 \times 7 + 5, \quad \text{con} \quad 0 \leq 5 < 7\,;$$

así, los enteros $c = 30$ y $r = 5$ son el cociente y el resto de la división euclidiana de 215 por 7.

En lo siguiente, escribiremos:

- $p \div q$ («p dividido por q») el cociente de la división euclidiana de p por q;
- $p \bmod q$ («p módulo q») el resto de la división euclidiana de p por q.

Así, por definición, $p \div q$ y $p \bmod q$ son dos enteros naturales tales que:

$$p \ = \ (p \div q)q \ + \ p \bmod q \quad \text{y} \quad 0 \leq p \bmod q < q \qquad (p, q \in \mathbb{N},\ q \neq 0) \tag{4.1}$$

Dividiendo ambos lados por $q \neq 0$, se obtiene que:

$$\frac{p}{q} \ = \ p \div q \ + \ \frac{p \bmod q}{q} \quad \text{con} \quad 0 \leq \frac{p \bmod q}{q} < 1 \qquad (p, q \in \mathbb{N},\ q \neq 0) \tag{4.2}$$

En la escritura anterior, $p \div q$ representa la *parte entera* del número racional p/q, mientras $(p \bmod q)/q$ representa la *parte fraccionaria* de p/q.

4.2. Cálculo de la representación decimal de un número racional. Ahora, se considera un número racional no negativo, dado en la forma p/q, con $p \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}^*$. Se trata de determinar la representación decimal de p/q, es decir, la escritura en la forma

$$\frac{p}{q} = d_0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \cdots$$

donde:

- $d_0 \in \mathbb{N}$ es la parte entera de p/q;
- $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 \cdots \in [0..9]$ son los dígitos de la parte fraccionaria de p/q.

Según la descomposición (4.2), la parte entera de p/q es dada por $d_0 := p \div q$ ($\in \mathbb{N}$), mientras la parte fraccionaria de p/q es dada por:

$$\frac{p \text{ mód } q}{q} = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \cdots$$

Ahora, se trata de extraer los dígitos $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, \ldots$ de dicha parte fraccionaria.

Para ello, se considera el nuevo numerador $p_1 := 10(p \text{ mód } q)$, y se observa que:

$$\frac{p_1}{q} = 10 \cdot \frac{p \text{ mód } q}{q} = d_1, d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 \cdots$$

En efecto, la nueva fracción $p_1/q = 10(p \text{ mód } q)/q$ representa la parte fraccionaria de p/q multiplicada por 10, de tal modo que su representación decimal contiene la misma sucesión de dígitos, pero desplazada de un rango hacia la izquierda:

$$10 \times 0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \cdots \quad = \quad d_1, d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 \cdots$$

Así, la parte entera de la nueva fracción p_1/q es el primer dígito d_1 de la parte fraccionaria de p/q, lo que nos da $d_1 := p_1 \div q$. En otro lado, la parte fraccionaria de p_1/q es dada por:

$$\frac{p_1 \text{ mód } q}{q} = 0, d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 \cdots$$

De nuevo, se introduce el numerador $p_2 := 10(p_1 \text{ mód } q)$, y se observa que:

$$\frac{p_2}{q} = 10 \cdot \frac{p_1 \text{ mód } q}{q} = d_2, d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 \cdots$$

(desplazando los dígitos un rango más hacia la izquierda). La parte entera del racional p_2/q nos da el segundo dígito $d_2 := p_2$ mód q, mientras la parte fraccionaria de p_2/q es dada por:

$$\frac{p_2 \text{ mód } q}{q} = 0, d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 \cdots \qquad \text{(etc.)}$$

Iterando el proceso, se construye una sucesión de numeradores $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, aquella es definida[2] por la relación de recurrencia:

$$p_0 := p \qquad \text{y} \qquad p_{n+1} := 10(p_n \text{ mód } q) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.3}$$

Luego se verifica que:

Proposición 23 (Caracterización de los dígitos de p/q). — *Para todo $n \in \mathbb{N}$:*

(1) $p_n/q = d_n, d_{n+1} d_{n+2} d_{n+3} d_{n+4} \cdots$ *(en base 10)*
(2) $p_n \div q = d_n$

Demostración. Recordemos que por definición, $d_0 \in \mathbb{N}$ es la parte entera del racional p/q, mientras $d_1, d_2, d_3, d_4 \cdots \in [0..9]$ son los dígitos de la parte fraccionaria de p/q en base 10.

El ítem (1) se demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

[2] ¡Cuidado! La sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida aquí es distinta de la sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida en la Sección 3.

- Caso de base. Tenemos que $p_0/q = p/q = d_0, d_1d_2d_3d_4\cdots$ por definición.
- Paso de inducción. Supongamos que

  $$\frac{p_n}{q} \;=\; d_n, d_{n+1}d_{n+2}d_{n+3}d_{n+4}\cdots$$

  para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces, la parte fraccionaria de p_n/q es dada por

  $$\frac{p_n \text{ mód } q}{q} \;=\; 0, d_{n+1}d_{n+2}d_{n+3}d_{n+4}\cdots$$

  Como $p_{n+1} = 10(p_n \text{ mód } q)$, se deduce que

  $$\frac{p_{n+1}}{q} \;=\; 10\cdot\frac{p_n \text{ mód } q}{q} \;=\; d_{n+1}, d_{n+2}d_{n+3}d_{n+4}d_{n+5}\cdots$$

  (desplazando los dígitos de un rango hacia la izquierda).

(2) Sigue inmediatamente de (1), tomando la parte entera $p_n \div q = d_n$. □

Ejemplo 24 (Representación decimal de 215/7)**.** — La siguiente tabla ilustra el funcionamiento del algoritmo para el número racional 215/7:

Iteración	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
Numerador	p_n	215	50	10	30	20	60	40	50	10	30	20	60	40	$\cdots$
Denominador	q	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	$\cdots$
Cociente	$d_n = p_n \div q$	**30,**	**7**	**1**	**4**	**2**	**8**	**5**	**7**	**1**	**4**	**2**	**8**	**5**	$\cdots$
Resto	p_n mód q	5	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	$\cdots$

Se observa que la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es periódica de período 6 a partir del rango 1 ($p_{n+6} = p_n$ para todo $n \geq 1$) así como la sucesión de dígitos $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de tal modo que:

$$215/7 \;=\; 30,\overline{714285}$$

(la raya superior indica que el motivo 714285 se repite al infinito).

Observación 25. — Más generalmente, se puede demostrar que la representación decimal de cualquier número racional es periódica a partir de cierto rango:

$$p/q \;=\; \pm\langle\text{parte entera}\rangle, \underbrace{\langle\text{parte inicial}\rangle\overline{\langle\text{parte periódica}\rangle}}_{\text{parte fraccionaria}}$$

Esta propiedad caracteriza los números racionales, en el sentido que un número real es un número racional si y sólo si su representación decimal es periódica a partir de cierto rango:

$$\begin{aligned}
1/1 &= 1,000000000000000000000000000000\cdots &&= 1,\overline{0}\\
1/2 &= 0,500000000000000000000000000000\cdots &&= 0,5\overline{0}\\
1/3 &= 0,333333333333333333333333333333\cdots &&= 0,\overline{3}\\
1/4 &= 0,250000000000000000000000000000\cdots &&= 0,25\overline{0}\\
1/5 &= 0,200000000000000000000000000000\cdots &&= 0,2\overline{0}\\
1/6 &= 0,166666666666666666666666666666\cdots &&= 0,1\overline{6}\\
1/7 &= 0,142857142857142857142857142857\cdots &&= 0,\overline{142857}\\
1/9 &= 0,111111111111111111111111111111\cdots &&= 0,\overline{1}\\
1/17 &= 0,058823529411764705882352941176\cdots &&= 0,\overline{0588235294117647}\\
1/224 &= 0,004464285714285714285714285714\cdots &&= 0,00446\overline{428571}\\
\sqrt{2} &= 1,414213562373095048801688724209\cdots && \text{(ningún período)}
\end{aligned}$$

4.3. Extracción de los dígitos de $\sqrt{2}$. El la sección anterior, presentamos un algoritmo para extraer los dígitos de la representación decimal de cualquier número racional no negativo. Combinándolo con la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de las aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$, se puede utilizar dicho algoritmo para extraer los dígitos del número irracional $\sqrt{2}$.

En efecto, demostramos (Prop. 7 p. 4) que los términos de la sucesión $(u_n)_{n+1}$ definida por

$$u_0 \ := \ 1 \qquad \text{y} \qquad u_{n+1} \ := \ f(u_n) \ = \ 1 + \frac{1}{1+u_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

alternan entre aproximaciones inferiores de $\sqrt{2}$ (términos de índice par) y aproximaciones superiores (términos de índice impar), de tal modo que el número $\sqrt{2}$ siempre se encuentra entre dos términos consecutivos u_n y u_{n+1} (para todo $n \in \mathbb{N}$). Más precisamente:

$$\begin{cases} u_n \ < \sqrt{2} \ < \ u_{n+1} & \text{si } n \text{ es par} \\ u_{n+1} \ < \sqrt{2} \ < \ u_n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ahora, consideremos dos términos consecutivos u_n y u_{n+1} ($n \in \mathbb{N}$). Utilizando el algoritmo descrito en la Sección 4.2, se pueden extraer los dígitos de la representación decimal de los dos números racionales u_n y u_{n+1}:

$$\begin{aligned} u_n &= d_0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \cdots \\ u_{n+1} &= d'_0, d'_1 d'_2 d'_3 d'_4 d'_5 d'_6 \cdots \end{aligned}$$

Además, como los dos racionales u_n y u_{n+1} son distintos (son separados por el número $\sqrt{2}$), sus representaciones decimales $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(d'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son distintas. Lo que significa que existe un índice $k \in \mathbb{N}$ tal que $d_k \neq d'_k$. Tomando el primer índice $k \in \mathbb{N}$ (es decir: el índice más pequeño) tal que $d_k \neq d'_k$, tenemos que $d_i = d'_i$ para todo índice $i < k$, lo que implica que las representaciones decimales de los dos términos u_n y u_{n+1} comparten el mismo prefijo

$$d_0, d_1 \cdots d_{k-1} \ = \ d'_0, d'_1 \cdots d'_{k-1} \,,$$

llamado el *prefijo común más largo* de las dos representaciones decimales. Por supuesto, es claro que cuanto más cercanos son u_n y u_{n+1}, más largo es dicho prefijo común.

Para concluir, se utiliza el siguiente resultado (admitido):

Proposición 26 (Prefijo común). — *Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que $a < b$. Si las representaciones decimales de a y de b comparten un mismo prefijo $d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}$ ($k \in \mathbb{N}$), es decir:*

$$\begin{aligned} a &= d_0, d_1 \cdots d_{k-1} \langle \textit{otros dígitos de } a \ldots \rangle \\ b &= d_0, d_1 \cdots d_{k-1} \langle \textit{otros dígitos de } b \ldots \rangle \,, \end{aligned}$$

entonces para todo real $c \in [a, b]$, la representación decimal de c comienza por dicho prefijo:

$$c \ = \ d_0, d_1 \cdots d_{k-1} \langle \textit{otros dígitos de } c \ldots \rangle$$

En nuestro caso, como el número irracional $\sqrt{2}$ se encuentra entre u_n y u_{n+1}, la propiedad anterior implica que la representación decimal de $\sqrt{2}$ comienza *necesariamente* por el prefijo común $d_0, d_1 \cdots d_{k-1}$, es decir:

$$\sqrt{2} \ = \ d_0, d_1 \cdots d_{k-1} \langle \text{otros dígitos de } \sqrt{2} \ldots \rangle$$

Ejemplo 27. — Se sabe que $u_{10} < \sqrt{2} < u_{11}$, donde:

$$\begin{aligned} u_{10} &= 8119/5741 &&= 1{,}4142135516460546943041282006 61 \cdots \\ u_{11} &= 19601/13860 &&= 1{,}41421356421356421356421356 4213 \cdots \end{aligned}$$

(utilizando el algoritmo de la Sección 4.2 para extraer los dígitos de los racionales u_{10} y u_{11}). Como las representaciones decimales de u_{10} y u_{11} tienen $1,4142135$ como prefijo común más largo, se deduce de la Prop. 26 que la representación decimal de $\sqrt{2}$ comienza por:

$$\sqrt{2} \;=\; 1,4142135\cdots \qquad \text{(8 dígitos exactos)}$$

4.4. El algoritmo de extracción. La discusión en la sección anterior nos da naturalmente el siguiente algoritmo para extraer los dígitos del número irracional $\sqrt{2}$:

1. Calcular la sucesión de términos $(u_n = p_n/q_n)_{0\leq n\leq N}$ hasta cierto índice $N \geq 1$, utilizando las ecuaciones de recurrencia (3.2) p. 7.
2. Con el algoritmo de la Sección 4.2, calcular en paralelo los dígitos de los términos
$$u_{N-1} \;=\; p_{N-1}/q_{N-1} \qquad \text{y} \qquad u_N \;=\; p_N/q_N$$
hasta que los dígitos no coincidan más. Esta operación permite determinar el prefijo común más largo entre las representaciones decimales de u_{N-1} y u_N.
3. Devolver el prefijo común, que también es un prefijo de la representación decimal de $\sqrt{2}$.

El programa en Pascal. Se encuentra en el Cuadro 1 p. 14 una implementación del algoritmo anterior en Pascal. En razón de las limitaciones del tipo de datos utilizado para representar los enteros naturales (véase Obs. 28 más abajo), sólo se pueden calcular las aproximaciones racionales $u_0, \ldots, u_n$ hasta el índice $n = 47$ sin superar la capacidad de representación.

Sin embargo, este programa ya permite calcular los primeros 35 dígitos de la representación decimal de $\sqrt{2}$ (después de la coma), como indicado en la salida producida por la ejecución:

```
Aproximación #46 = 489133282872437279 / 345869461223138161
Aproximación #47 = 1180872205318713601 / 835002744095575440
raíz(2) = 1,41421356237309504880168872420969807... (35 dígitos)
```

Observación 28. — La principal limitación de una implementación del algoritmo anterior se encuentra en el tipo de datos usado para representar los numeradores y denominadores de las fracciones $u_n = p_n/q_n$. En el programa del Cuadro 1, se utilizó el tipo `int64` (enteros de 64 bits con signo), que permite representar todos los enteros naturales entre -2^{63} y $2^{63} - 1$. En la práctica, se observa que el tipo `int64` permite calcular las representaciones decimales de todos los términos u_n hasta $n = 47$ sin superar la capacidad del tipo[3].

Sin embargo, se puede remediar la limitación anterior utilizando una librería específica para manipular enteros con tamaño cualquiera, por ejemplo: la librería `GMP` (*GNU Multiple Precision*). En este caso, las únicas limitaciones son las de la memoria y del tiempo disponibles[4].

[3] El compilador `fpc` (freepascal) ofrece una opción de compilación `-Co` que genera código suplementario para verificar dinámicamente que el cálculo aritmético no supera los límites de los tipos enteros utilizados. La ejecución del programa compilado con esta opción (y con la constante `num_iter` = 48) indica un desbordamiento de capacidad durante el cálculo de la representación decimal de u_{48}.

[4] Adaptando el programa del Cuadro 1 a los enteros de la librería `GMP`, el autor calculó los primeros 1 500 000 términos de la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y produjo 1 148 325 dígitos exactos de $\sqrt{2}$ en 34 minutos.

```
{ La siguiente función calcula e imprime los dígitos comunes iniciales
  de dos fracciones num1/den1 y num2/den2 en base 10, y devuelve el
  número de dígitos producidos después de la coma decimal.

  Los numeradores/denominadores son representados con el tipo "int64",
  que permite representar todos los enteros entre -2^63 y 2^63 - 1. }

function digitos_comunes(num1, den1, num2, den2 : int64) : int64;
  var
    dig1, dig2 : int64;               { dígito corriente }
    k : int64;                        { posición del dígito }
  begin
    dig1 := num1 div den1;            { parte entera de num1/den1 }
    dig2 := num2 div den2;            { parte entera de num2/den2 }
    k := 0;
    while dig1 = dig2 do              { mientras dig1 y dig2 coinciden... }
      begin
        write(dig1);
        if k = 0 then
          write(',');                 { imprime la coma decimal }
        { cálculo del próximo dígito }
        num1 := 10 * (num1 mod den1);   { 0 <= num1/den1 < 10 }
        num2 := 10 * (num2 mod den2);   { 0 <= num2/den2 < 10 }
        dig1 := num1 div den1;          { 0 <= dig1 < 10 }
        dig2 := num2 div den2;          { 0 <= dig2 < 10 }
        k := k + 1
      end;
    writeln('...');
    digitos_comunes := k - 1          { no se cuenta la parte entera }
  end;

{ Debido a las limitaciones del tipo "int64", no se pueden calcular más de
  47 iteraciones de la sucesión (u_n) sin superar la capacidad del tipo. }

const num_iter = 47;

{ El siguiente programa calcula num_iter iteraciones de la sucesión (u_n),
  usando los últimos dos términos para determinar los dígitos de sqrt(2). }

var
  n, k : int64;
  num0, den0 : int64;                 { fracción anterior }
  num1, den1 : int64;                 { fracción corriente }

begin
  num1 := 1;                          { numerador de u_0 }
  den1 := 1;                          { denominador de u_0 }
  for n := 1 to num_iter do
    begin
      num0 := num1;
      den0 := den1;
      { Cálculo de u_n = num1/den1 a partir de u_(n-1) = num0/den0 }
      num1 := num0 + 2 * den0;
      den1 := num0 + den0;
    end;
  { Imprime los dos últimos términos }
  writeln('Aproximación #', num_iter - 1, ' = ', num0, ' / ', den0);
  writeln('Aproximación #', num_iter, ' = ', num1, ' / ', den1);
  { Calcula e imprime los dígitos comunes de dichos términos }
  write('raíz(2) = ');
  k := digitos_comunes(num0, den0, num1, den1);
  writeln('(', k, ' dígitos después de la coma)')
end.
```

CUADRO 1. Cálculo de los dígitos de $\sqrt{2}$ (base 10) en PASCAL