Componentes Simétricas

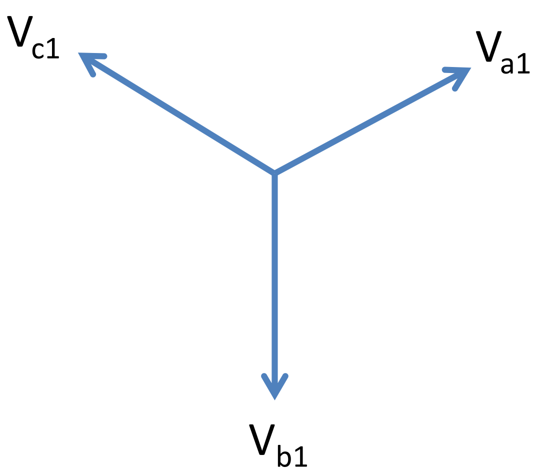
Introducción

- Método para resolución de sistemas trifásicos desbalanceados

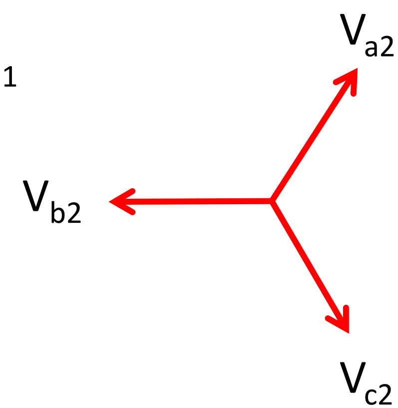
- Se basa en el teorema de **Fortescue**, que define una transformación lineal capaz de descomponer un sistema trifásico desbalanceado en tres sistemas simétricos:
  1. Sistema **Directo**
  2. Sistema **Inverso**
  3. Sistema **Homopolar**

Introducción

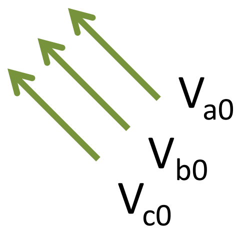
Representación fasorial de las componentes simétricas,



Componentes de Secuencia positiva



Componentes de Secuencia negativa



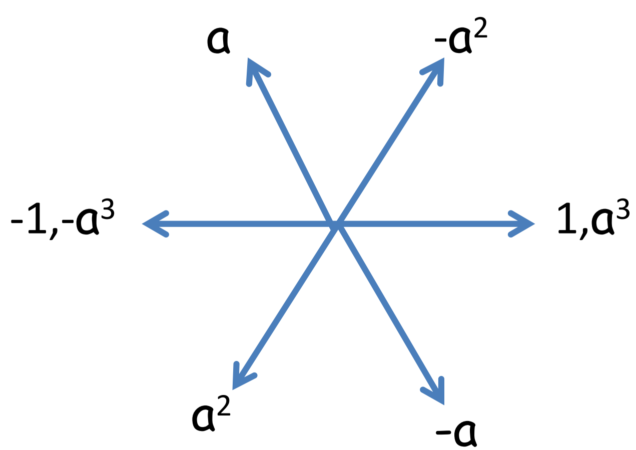
Componentes de Secuencia cero

FUNDAMENTOS

- Sea el operador ***a***:

$$\boxed{a = e^{j\frac{2\pi}{3}}}$$

Es posible construir un sistema simétrico a través del operador:



FUNDAMENTOS

- Sea un sistema de tensiones $\vec{V} = (V_a, V_b, V_c)^t$

$$\begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} V_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} V_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} V_0$$

- Si $\mathrm{V}_1 \neq 0, \; V_2 = V_0 = 0 \quad \rightarrow \quad Sistema\ directo$
- Si $\mathrm{V}_0 \neq 0, \; V_2 = V_1 = 0 \quad \rightarrow \quad Sistema\ homopolar$

NOTA: en todo momento las magnitudes son *fasoriales*, por simplicidad de notación no se escriben

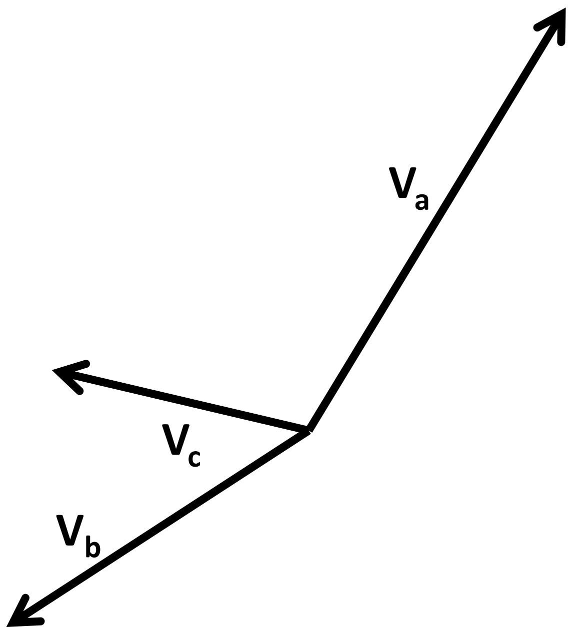
FUNDAMENTOS

- Se tiene una transformación candidata para descomponer un sistema trifásico cualquiera en los tres sistemas simétricos mencionados:

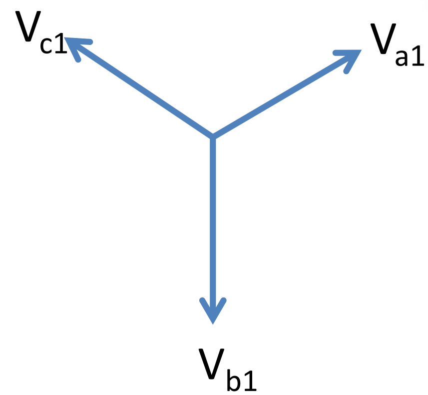
$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

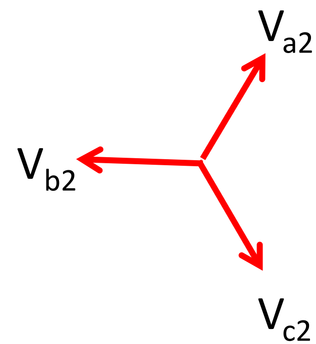
Donde V_1 , V_2 , V_0 se denominan respectivamente secuencia positiva, secuencia negativa y secuencia cero

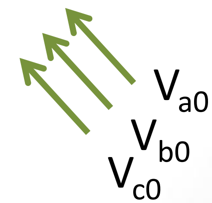
FUNDAMENTOS



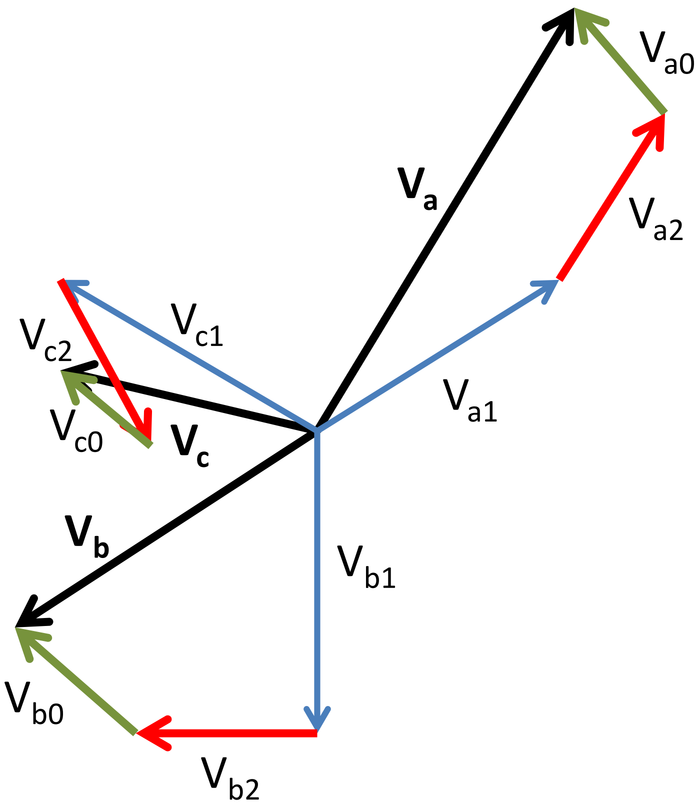
Sistema trifásico desbalanceado

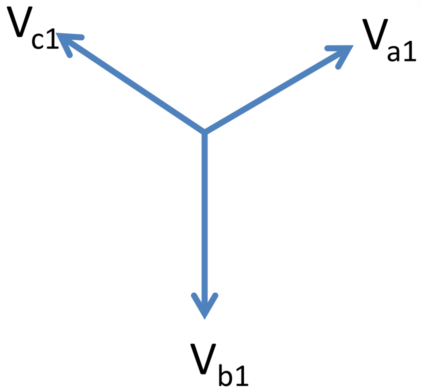


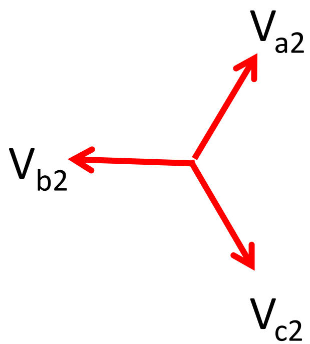


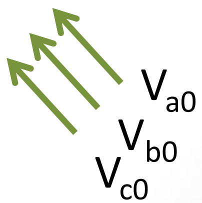


Fundamentos









Sistema trifásico desbalanceado, representado en componentes simétricas

UTILIDAD

- Para la mayoría de las redes, la respuesta de un sistema es independiente en cada secuencia de excitación
  - Máquinas rotativas de construcción simétrica*
  - Transformadores de construcción simétrico*
  - Impedancias balanceadas

*** Se verá qué condiciones tienen que cumplirse para que efectivamente la respuesta sea independiente para cada secuencia de excitación**

Utilidad

- Como el objetivo es resolver sistemas lineales, se puede aplicar el principio de superposición y resolver los tres sub-circuitos para cada sistema de excitación
- El método tiene su potencial máximo, en la medida que la respuesta del sistema se pueda desacoplar en tres respuestas independientes. Este tipo de redes serán el objetivo de estudio
- La respuesta de la red a cada componente simétrica no necesariamente es igual. Se definen las **redes de secuencia** según la **sensibilidad** a la **secuencia de excitación**
- Se resuelven los tres sistemas de excitación en componentes simétricas en forma independiente

Redes de secuencia

- Se definen las redes de secuencia, o redes sensibles a la secuencia, como aquellas que solo responden a una secuencia de excitación específica (directa, inversa, homopolar). Dicha respuesta se modela mediante las impedancias de secuencia

- Se definen:
  - $Z_d = impedancia\ de\ secuencia\ directa$
  - $Z_i = impedancia\ de\ secuencia\ inversa$
  - $Z_h = impedancia\ de\ secuencia\ homopolar$

Teorema de Fortescue

Supongamos que se puede descomponer el sistema

Como la superposición de:

SIST. EQ. DIRECTO: V_1 , a^2V_1 , aV_1

SIST. EQ. INVERSO: V_2 , aV_2 , a^2V_2

SIST. EQ. HOMOPOLAR: $V_0 \; , V_0 \; , V_0$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

Teorema de Fortescue

Si la **matriz de impedancias** de la red es **circulante y simétrica,** y las impedancias sensibles a la secuencia son

$$Z_d, Z_i, Z_h$$

La respuesta del sistema será:

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_d} \quad , \; I_2 = \frac{V_2}{Z_i} \quad , \quad I_0 = \frac{V_0}{Z_0}$$

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

Teorema de Fortescue

Matriz circulante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots & & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

Matriz de impedancias circulante sistema trifásico:

$$Z = \begin{bmatrix} Z & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{13} & Z & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{13} & Z \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica circulante:

$$\boxed{Z = \begin{bmatrix} Z & Z_{12} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{12} & Z \end{bmatrix}}$$

Teorema de Fortescue

La primer pregunta que surge es sobre la existencia de la transformación propuesta:

$$det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(a.1 - 1.a^2) - 1(a^2.1 - a.1) + 1(a^2.a^2 - a.a)$$

$$= 3(a - a^2) \neq 0 \quad \rightarrow \; \exists \; y \; es \; \text{ú}nica!$$

Teorema de Fortescue

Se define la matriz de transformación F

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow [F]^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F][F]^{-1} = [I] \quad = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^3+1 & a^2+a^4+1 \\ 0 & a^2+a^4+1 & 2a^3+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [I]$$

Teorema de Fortescue

Sean $\overrightarrow{V_F} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_0 \end{bmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{I_F} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad Comp.\, simétricas$

Sean $\vec{V} = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$ $\qquad \vec{I} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad Comp.\, de\ fase$

$$\overrightarrow{V} = [Z]\, \vec{I}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_1 & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{12} & Z_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} Z_1 = R + j\omega L \\ Z_{12} = j\omega M \end{cases}$$

Teorema de Fortescue

$\vec{V}$ = [Z] $\vec{I}$

$\vec{V}$ = $[\mathrm{F}]\overrightarrow{V_F}$

$\vec{I}$ = $[\mathrm{F}]\overrightarrow{I_F}$

$$[\mathrm{F}]\overrightarrow{V_F} = [\mathrm{Z}]\ [\mathrm{F}]\ \overrightarrow{I_F}$$
$$\overrightarrow{V_F} = [\mathrm{F}]^{-1}\ [\mathrm{Z}]\ [\mathrm{F}]\ \overrightarrow{I_F}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_F} = [Z_F]\overrightarrow{I_F}}$$

La condición para que los sistemas puedan desacoplarse es que la matriz $[Z_F]$ sea diagonal.

Teorema de Fortescue

$$\overrightarrow{V_F} = [Z_F]\overrightarrow{I_F}$$

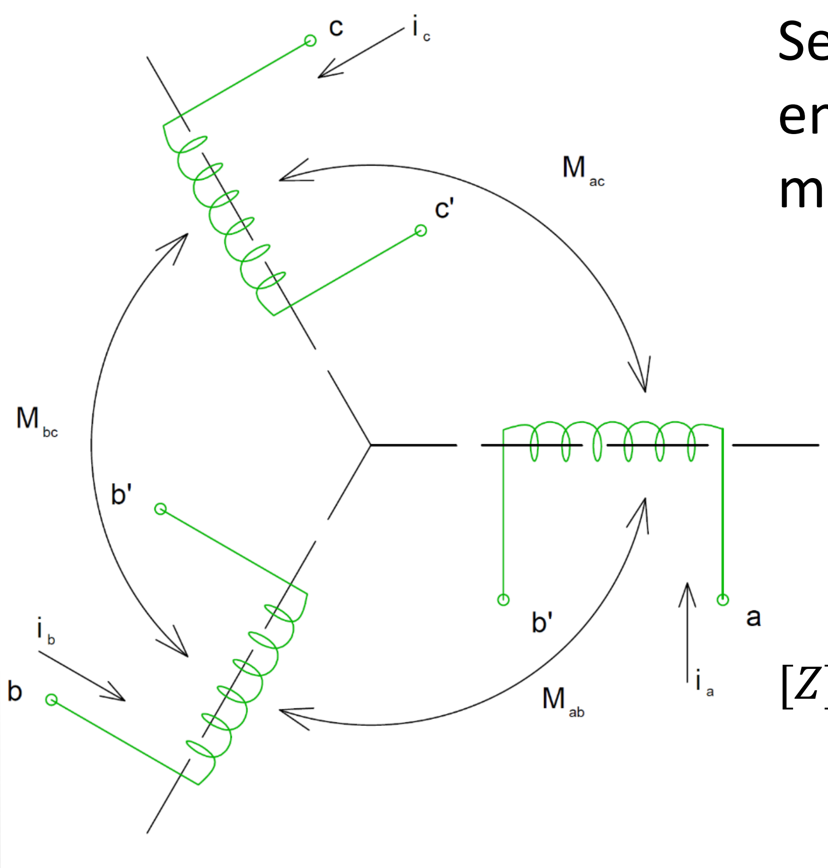
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_d & 0 & 0 \\ 0 & Z_i & 0 \\ 0 & 0 & Z_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

Se verá qué tipo de redes cumplen dicha condición

Aplicación - Teorema de Fortescue

Planteamiento del problema

Se parte de plantear el caso más general, con acoplamiento magnético entre impedancias de fase de la red *a,b,c*



Se plantea el sistema de ecuaciones en el dominio fasorial y se obtiene la matriz de impedancias

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_a + j\omega L_a & j\omega M_{ab} & j\omega M_{ac} \\ j\omega M_{ab} & R_b + j\omega L_b & j\omega M_{bc} \\ j\omega M_{ac} & j\omega M_{bc} & R_c + j\omega L_c \end{bmatrix}$$

Aplicación - Teorema de Fortescue

Caso 1 – matriz de impedancia simétrica circulante

Se corresponde a una red compuesta por elementos de construcción simétrica

- Impedancias de fase iguales
- Impedancias mutuas simétricas (geometría simétrica a nivel de los circuitos magnéticos)

$$\boxed{Z = \begin{bmatrix} R + j\omega L & j\omega M & j\omega M \\ j\omega M & R + j\omega L & j\omega M \\ j\omega M & j\omega M & R + j\omega L \end{bmatrix}}$$

Aplicando la transformación de Fortescue resulta:

- $[Z_F] = \begin{bmatrix} R + j\omega L - j\omega M & 0 & 0 \\ 0 & R + j\omega L - j\omega M & 0 \\ 0 & 0 & R + j\omega L + 2j\omega M \end{bmatrix}$

Aplicación - Teorema de Fortescue

Caso 2 – matriz de impedancia circulante NO simétrica

Se corresponde a una red cuyos elementos cumplen

- Impedancias de fase iguales
- Impedancias mutuas **no** simétricas (geometría asimétrica a nivel de los circuitos magnéticos)

$$\boxed{Z = \begin{bmatrix} Z & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{13} & Z & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{13} & Z \end{bmatrix}}$$

Aplicando la transformación de Fortescue resulta $[Z_F]$ **no diagonal**

Aplicación - Teorema de Fortescue

Caso 3 – matriz de impedancia NO circulante simétrica

Se corresponde a una red cuyos elementos cumplen

- Impedancias de fase **distintas**
- Sin acoplamiento magnético

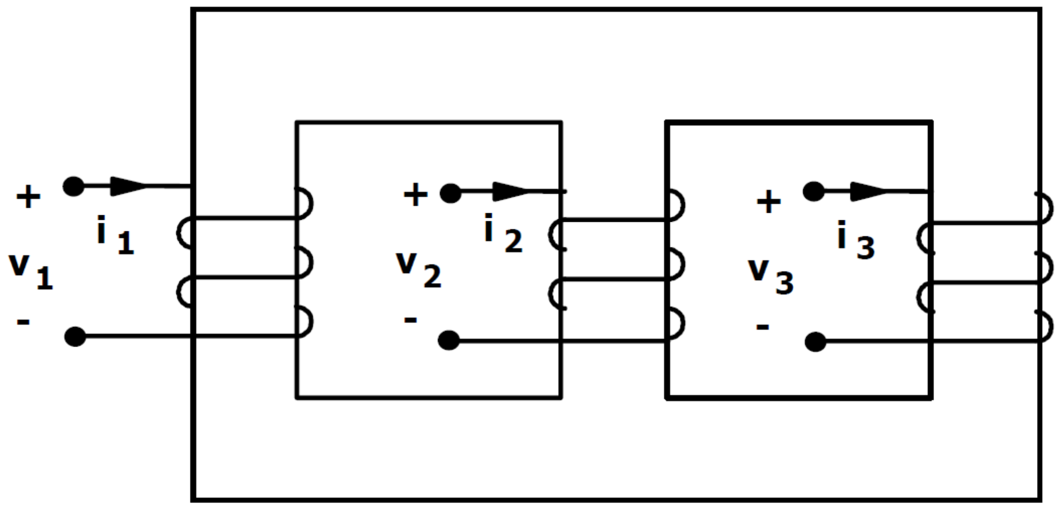
$$\boxed{Z = \begin{bmatrix} Z_a & 0 & 0 \\ 0 & Z_b & 0 \\ 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix}}$$

Aplicando la transformación de Fortescue resulta $[Z_F]$ **<u>no diagonal</u>**

Ejemplo

Matriz de impedancia no simétrica

Reactor trifásico de núcleo plano

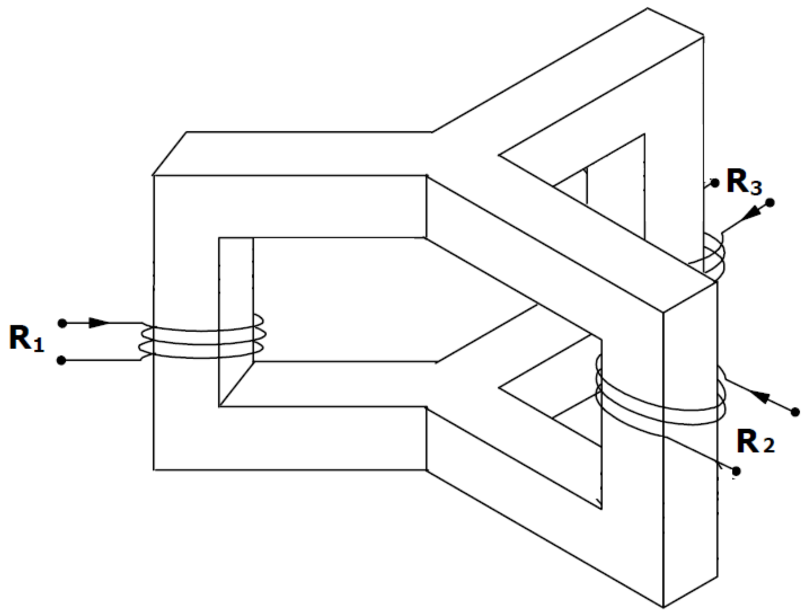


En la práctica, la diferencia en los circuitos de reluctancia es despreciable por lo que la contribución en la matriz de impedancias genera términos de varios órdenes de magnitud menor al término de la diagonal correspondiente a la auto-inductancia de la bobina.

Ejemplo

Matriz de impedancia simétrica

Reactor trifásico de núcleo simétrico



Con una construcción simétrica del núcleo se compensaría el efecto, pero la construcción sería mucho más compleja y en términos de volumen requeriría más hierro (mayor costo y tamaño).

Cálculo de Potencia

Se plantea el cálculo de potencia en componentes simétricas.

$$S = V_a I_a^* + V_b I_b^* + V_c I_c^*$$

$$\begin{aligned} S = {} & (V_1 + V_2 + V_0)(I_1^* + I_2^* + I_0^*) + \\ & +(a^2 V_1 + a V_2 + V_0)(a^2 I_1^* + a I_2^* + I_0^*) + \\ & +(a V_1 + a^2 V_2 + V_0)(a I_1^* + a^2 I_2^* + I_0^*) \end{aligned}$$

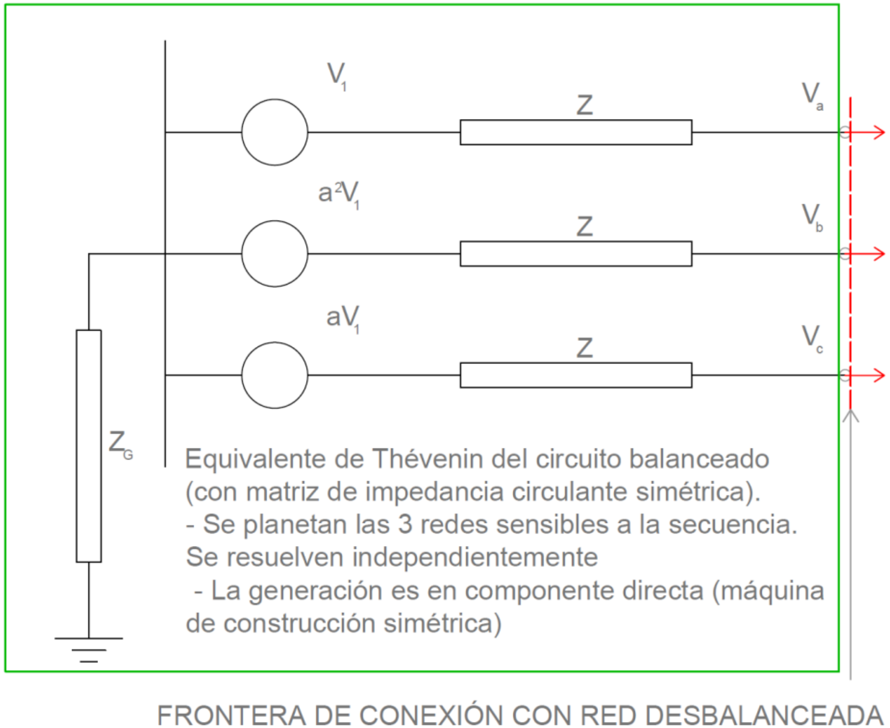
Desarrollo se concluye:

$$\boxed{S = 3V_1 I_1^* + 3V_2 I_2^* + 3V_0 I_0^*}$$

OBS: como en todo la presentación, el planteo es fasorial

Estrategia de aplicación

A continuación se presenta un esquema general en el que por algún motivo la red se desbalancea en el punto frontera.

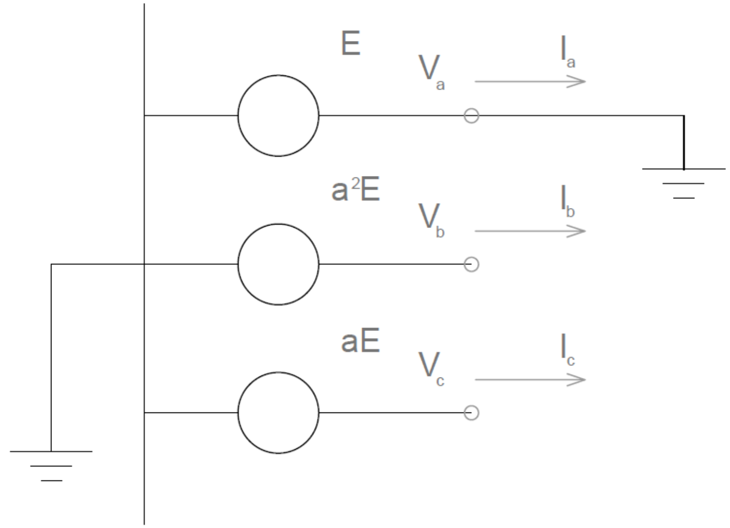


La zona verde cumple con las hipótesis de Fortescue, por lo que se puede aplicar el método resolviendo las redes de impedancias secuenciales en forma independiente. Se aplica la condición de borde en la frontera.

Ejemplo de aplicación

CC – 1FT

Ecuaciones en CS



$$(1)\begin{cases} E = V_1 + Z_d I_1 \\ 0 = V_2 + Z_2 I_2 \\ 0 = V_0 + Z_0 I_0 \end{cases}$$

Condiciones de borde

$$\begin{cases} V_a = 0 \\ I_b = I_c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_b = 0 = a^2 I_1 + a I_2 + I_0 \\ I_c = 0 = a I_1 + a^2 I_2 + I_0 \\ V_1 + V_2 + V_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 = I_0 \\ V_1 + V_2 + V_0 = 0 \end{cases}$$

Aplico (1) $$I_1 = I_2 = I_0 = \frac{E}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

Ejemplo Final

Impedancia de secuencia cero en transformadores trifásicos

Mostrar ejemplos

Casos

1 YY

2 YNY

3 YND