Generación de par en máquinas con EH no uniforme

Curso Máquinas Eléctricas

Bibliografía

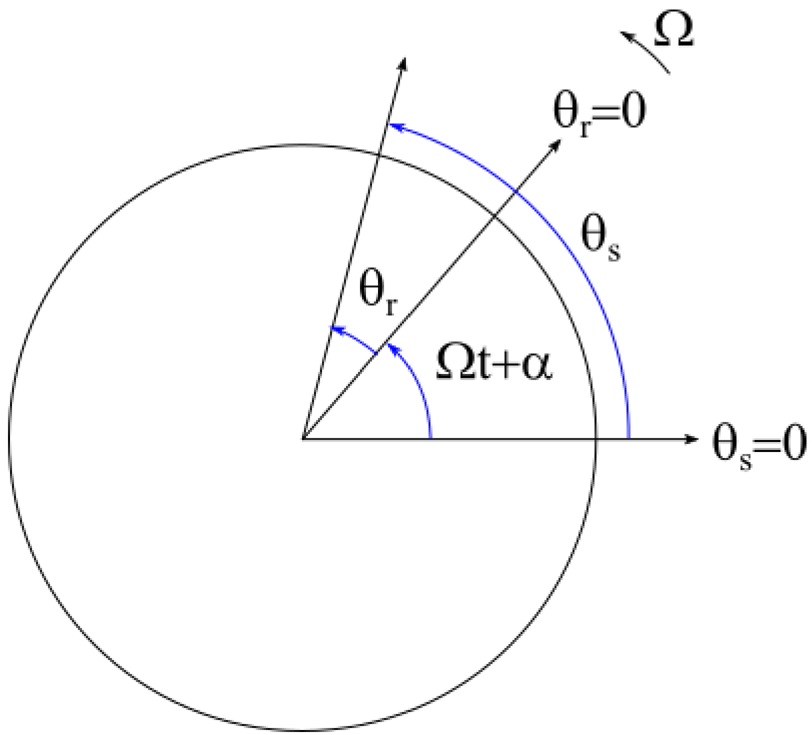
- 1- Apuntes del curso de Máquinas Eléctricas (ediciones anteriores) https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/98576/mod_folder/content/0/Cap5_Generaci%C3%B3n%20de%20par_Reluctancia%20-%20Fmm%20desfasajes.pdf?forcedownload=1

Par de reluctancia

- Motivación: Calcular el par en la máquina por efecto del campo estatórico y el entrehierro no uniforme.
- Se trata de analizar como una máquina con bobinado trifásico en el estator, que produce un campo giratorio, puede producir par electromagnético sin tener corriente en los bobinados rotóricos (o directamente sin tenerlos), por el efecto de un rotor de polos salientes.

Coordenadas

- Definición de coordenadas: $\theta_s = \theta_r + \Omega t + \left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)$
- Hipótesis general: rotor gira a velocidad Ω=cte.



FMM de entrehierro

Sólo interesa analizar el bobinado estatórico ya que no hay corriente en el rotor. Polos salientes en el rotor.
Hipótesis: f.m.m. de entrehierro sinusoidal

$$\varepsilon_s(\theta_s, t) = H_s(\theta_s, t).\, e(\theta_s)$$

$$\varepsilon_s(\theta_s, t) = \varepsilon_{s_{MÁX}} cos(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)$$

Esta hipótesis se sustenta en que se asume bobinado trifásico sinusoidalmente distribuído, aplicando Ley de Ampère.

Resulta entonces: $H_s(\theta_s, t) = \frac{1}{e(\theta_s)} \varepsilon_{s_{MÁX}} cos(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)$

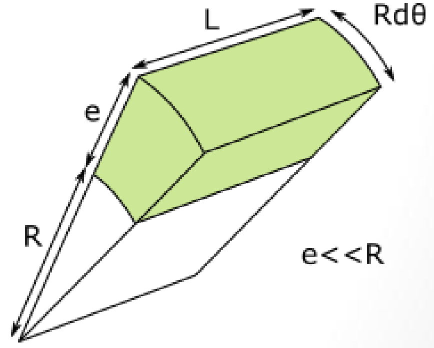
Energía en el entrehierro

Tal como se vio en clase anteriores, la densidad energía magnética almacenada en el EH por unidad de volumen se define como:

$$\frac{\partial w_m}{\partial vol} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{\varepsilon_s(\theta_s,t)}{e(\theta_s)}\right)^2$$

Integrando en el volumen para tener toda la energía almacenada en el EH:

$$W_m = \int_{vol} \frac{\partial w_m}{\partial vol} dvol = \frac{1}{2}\mu_0 LR \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varepsilon_s(\theta_s,t)}{e(\theta_s)}\right)^2 e(\theta_s) d\theta_s$$



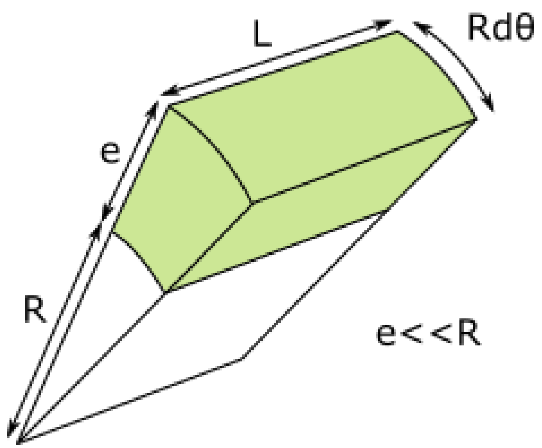
Donde se asume que el estator es idéntico longitudinalmente (longitud L) y que el entrehierro es despreciable frente al radio R.

Energía en el entrehierro

Se obtiene:

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_0 RL\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon_s^2(\theta_s,t)}{e(\theta_s)}d\theta_s$$

Recordando la definición de la reluctancia del entrehierro:



La reluctancia de un elemento de EH de ancho $d\theta_s$ resulta:

$$R(\theta_s) = \frac{1}{\mu_0}\frac{e(\theta_s)}{LRd\theta_s}$$

Energía en el entrehierro

Se define la *Permeancia* del entrehierro como el inverso de la reluctancia. La permeancia de un elemento de EH de ancho $d\theta_s$ es:

$$P(\theta_s) = R(\theta_s)^{-1} = \left(\frac{1}{\mu_0}\frac{e(\theta_s)}{LRd\theta_s}\right)^{-1}$$

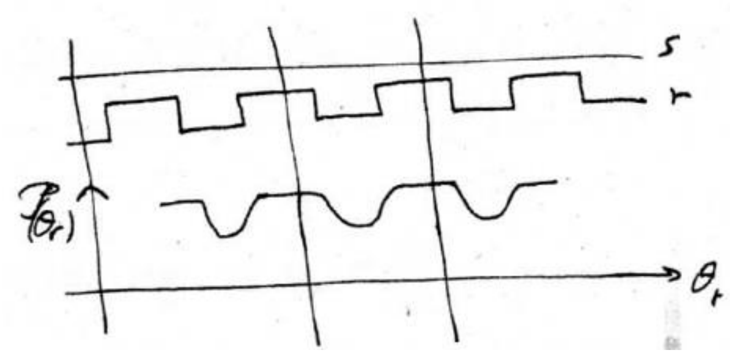
La permeancia por unidad de arco resulta: $p(\theta_s) = \frac{LR\mu_0}{e(\theta_s)}$

En términos de la permeancia, la energía almacenada en el EH resulta:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(\theta_s)\varepsilon_s^2(\theta_s, t)d\theta_s$$

Energía en el entrehierro

Si se tiene un rotor de polos salientes, la permeancia del EH por unidad de arco, medida desde el rotor (coordenada θ_r) es una función periódica en el ángulo pero constante en el tiempo:



$$p(\theta_r) = \frac{LR\mu_0}{e(\theta_r)}$$

$$p(\theta_r) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n cos(nZ\theta_r)$$

Dado que se trata de una función periódica en el ángulo, se puede descomponer en serie de Fourier, con un valor medio correspondiente al ancho medio del EH (p_0 (y una serie de armónicos en el espacio, de frecuencia múltiplo de $Z\theta_r$,donde Z es el número de "dientes" del rotor.

Energía en el entrehierro

Recordando la definición de coordenadas $\theta_r = \theta_s - \Omega_m t - \left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)$,entonces planteando la permeancia vista desde el estator:

$$p(\theta_s) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n cos\left[nZ\left(\theta_s - \Omega_m t - \left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)\right)\right]$$

Notar que desde el estator la permeancia es una función periódica en el ángulo pero además variable en el tiempo, debido a que el rotor se mueve el EH visto desde el estator es variable con el tiempo.

Energía en el entrehierro

Recordando la formulación para la energía almacenada en el EH que se dedujo previamente y la FMM de EH:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(\theta_s)\varepsilon_s^2(\theta_s,t)d\theta_s$$

$$\varepsilon_s(\theta_s,t) = \varepsilon_{MÁX}cos(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)$$

Se puede sustituir la forma hallada para la permeancia:

$$W_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{s_{MÁX}}^2 \int_0^{2\pi} P_0 cos^2(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)d\theta_s$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} P_n \int_0^{2\pi} cos\left[nZ\theta_s - nZ\Omega_m t - nZ\left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)\right] cos^2(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)d\theta_s$$

Energía en el entrehierro

Se puede ver que la energía almacenada en el EH puede descomponerse en un término constante debido al EH medio y una suma de armónicos debido a los dientes del rotor.

$$W_m = W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} W_n$$

Utilizando que $cos^2(a) = \frac{1+cos(2a)}{2}$ y recordando que $\int_0^{2\pi} cos[k\theta_s + \alpha]d\theta_s = 0$ para k entero, se puede simplificar el primer término:

$$W_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_{s_{MÁX}}^2 \int_0^{2\pi} P_0 cos^2(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)d\theta_s =$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{s_{MÁX}}^2 P_0 \int_0^{2\pi} \frac{1 + cos[2(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)]}{2} d\theta_s = \frac{\pi}{2} P_0 \varepsilon_{s_{MÁX}}^2$$

Energía en el entrehierro

Planteando el término correspondiente a los armónicos:

$$W_n = \frac{1}{2}\varepsilon_{s_{MÁX}}^2 P_n \int_0^{2\pi} cos\left[nZ\theta_s - nZ\Omega_m t - nZ\left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)\right] \frac{1 + cos[2(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)]}{2} d\theta_s$$

Utilizando nuevamente que $cos^2(a) = \frac{1+cos(2a)}{2}$ y $\int_0^{2\pi} cos[k\theta_s + \alpha]d\theta_s = 0$ para k entero:

$$W_n = \frac{1}{4}\varepsilon_{s_{MÁX}}^2 P_n \int_0^{2\pi} cos\left[nZ\theta_s - nZ\Omega_m t - nZ\left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)\right] cos[2(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)] d\theta_s$$

$$cos\left[nZ\theta_s - nZ\Omega_m t - nZ\left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)\right] cos[2(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)]$$

$$= \frac{1}{2}\{cos\left[(nZ - 2p_s)\theta_s + (2\omega_s - nZ\Omega_m)t - 2\varphi_s - nZ\left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)\right]$$

$$+cos\left[(nZ + 2p_s)\theta_s - (nZ\Omega_m + 2\omega_s)t + 2\varphi_s - nZ\left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)\right]\}$$

Energía en el entrehierro

Recordar que:

$$\left.\begin{array}{r} n \geq 1 \\ Z > 0 \\ p_s \geq 1 \end{array}\right\} \underset{\Rightarrow}{\begin{array}{c} k = nZ + 2p_s > 0 \\ (entero) \end{array}}$$

Entonces:

$$cos\left[(nZ + 2p_s)\theta_s - (nZ\Omega_m + 2\omega_s)t + 2\varphi_s - nZ\left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)\right]$$

siempre integrará 0 entre θ_s=0 y 2π.

Por otra parte, $nZ - 2p_s$ puede ser nulo si se da: $n_r = \frac{2p_s}{Z}$

n_r siempre está definido por esa relación, pero además debe ser entero, para poder ser un término del desarrollo en serie de Fourier. Es decir, que según p_s y Z, puede no existir.

Energía en el entrehierro

Si $\exists n_r$ entero, tal que $n_r = \frac{2p_s}{Z}$ y si $Z = 2p_s \rightarrow n_r = 1$ entonces se tiene contribución del par de reluctancia al fundamental.

En tal caso se anula el término $(nZ - 2p_s)\theta_s$ y el coseno es independiente de θ_s y por ende no integra 0 entre θ_s=0 y 2π.

Se obtiene el siguiente término armónico de energía en el EH:

$$W_{n_r} = \frac{1}{8}\varepsilon_{s_{MÁX}}^2 P_{n_r}\int_0^{2\pi} cos\left[(2\omega_s - n_r Z\Omega_m)t - \left(2\varphi_s + n_r Z\left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)\right)\right] d\theta_s$$

$$\rightarrow W_{n_r} = \frac{\pi}{4}\varepsilon_{s_{MÁX}}^2 P_{n_r} cos\left\{2\left[(\omega_s - p_s\Omega_m)t - \left(\varphi_s + p_s\left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)\right)\right]\right\}$$

Energía en el entrehierro

Si $\frac{2p_s}{Z}$ ≠entero → $W_n = 0\ \forall n$. Y no existe aporte del par de reluctancia (debido a que W_0 es independiente del ángulo y por ende su derivada angular es nula).

En el caso que existe contribución de algún armónico, la energía en el EH resulta:

$$W_m = W_0 + W_{n_r}$$

Cálculo del Par

El par electromagnético se calcula como la derivada de la energía almacenada en el EH en función de una coordenada angular:

$$\Gamma = \left(\frac{\partial W_s'}{\partial \theta_m}\right)_{i=cte} \rightarrow \Gamma = \left(\frac{\partial W_s}{\partial \theta_m}\right)_{\varepsilon_{MÁX}=cte}$$

Donde energía y coenergía son iguales por tratarse de un circuito magnético lineal. El ángulo según el cual se calculará la derivada debe ser el ángulo que forman los dos ejes magnéticos de los campos giratorios:

$$\Gamma_m = -2.\frac{\pi}{4}\varepsilon_{s_{MÁX}}^2 P_{n_r} sin\left\{2\left[(\omega_s - p_s\Omega_m)t - p_s\left(\xi_0 + \frac{\varphi_s}{p_s}\right)\right]\right\}.(-p_s)$$

$$\left(\xi_0 + \frac{\varphi_s}{p_s}\right) = \theta_m$$

Cálculo del Par

Nuevamente aparece que la condición para que exista par que no oscile en el tiempo (y por tanto genera trabajo neto), es la llamada condición de sincronismo: $\omega_s - p_s\Omega_m = 0$

$$\Omega_m = \frac{\omega_s}{p_s} = \Omega_s$$

Velocidad mecánica de rotación = velocidad de sincronismo. La única forma de que exista par de reluctancia es que el rotor se mueva a la velocidad de sincronismo que impone el campo estatórico. Entonces cumpliendo esto el par resulta:

$$\Gamma_m = \frac{\pi}{2}\varepsilon_{s_{MÁX}}^2 P_{n_r}.p_s sin[2(-p_s\theta_m)] = - \Gamma_{MÁX}.sin[2p_s\theta_m]$$

Resumen

- El par de reluctancia se forma por efecto del EH de ancho variable, lo que genera variaciones en la energía almacenada en el mismo con la posición.

- Se puede tener par de reluctancia si se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:
  - La velocidad de rotación coincide con la velocidad de sincronismo impuesta por el campo estatórico.
  - El número de dientes del rotor Z es tal que $n_r = \frac{2p_s}{Z}$ es un número entero.

- El par dependerá del seno del ángulo de desfasaje entre el campo estatórico y la posición del rotor.