Generación de par en máquinas con EH uniforme

Curso Máquinas Eléctricas

Bibliografía

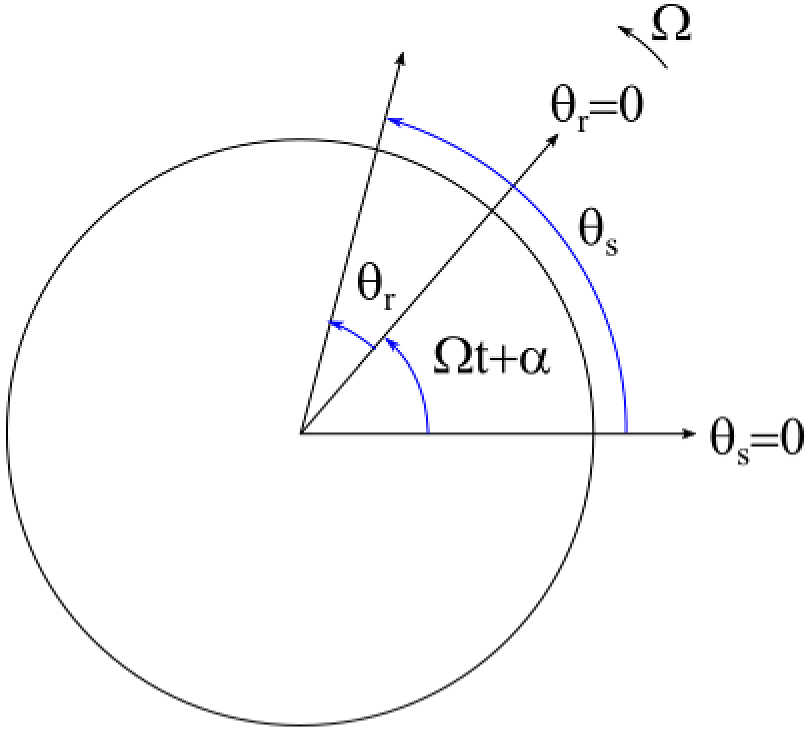
• 1- Apuntes del curso de Máquinas Eléctricas (ediciones anteriores)
https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/98576/mod_folder/content/0/Cap5_Generaci%C3%B3n%20de%20par_Entrehierro%20constante.pdf?forcedownload=1

Campo en el entrehierro

- Motivación: Calcular el par en la máquina en función de los campos estatórico y rotórico en el entrehierro.

Campo en el entrehierro

- Definición de coordenadas: $\theta_s = \theta_r + \Omega t + \left(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}\right)$
- Hipótesis general: rotor gira a velocidad Ω=cte.



Campo en el entrehierro

- Campo generado por el bobinado estatórico:

  - Sinusoidal en el espacio y giratorio respecto al estator (pulsación de la corriente estatórica: ω_s).
  - p_s pares de polos

$$H_s(\theta_s, t) = H_{s_{MÁX}} cos(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)$$

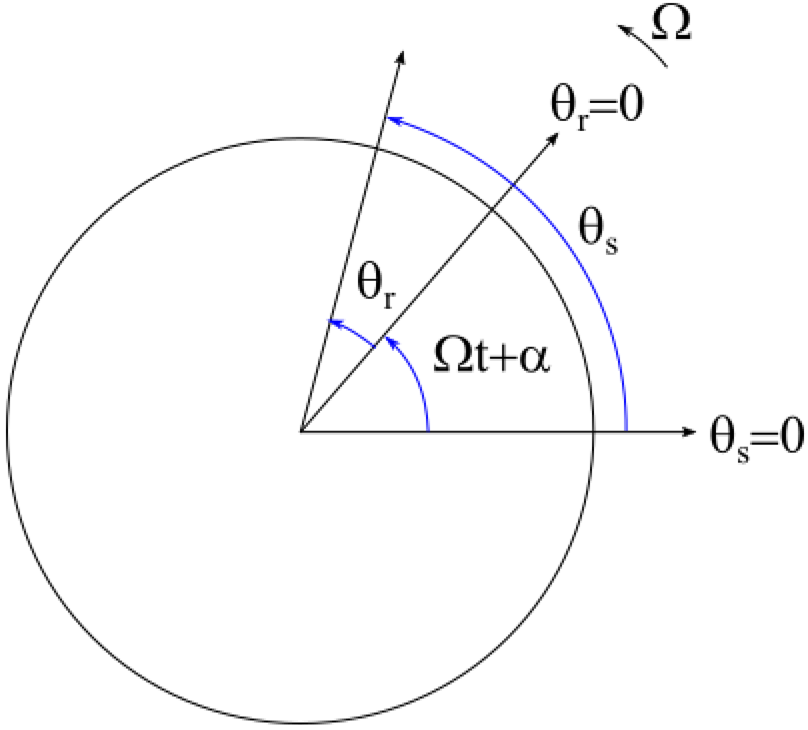
- Campo generado por el bobinado rotórico:

$$H_r(\theta_r, t) = H_{r_{MÁX}} cos(\omega_r t - p_r\theta_r - \varphi_r)$$

  - Sinusoidal en el espacio y giratorio respecto al rotor (pulsación de la corriente rotórica: ω_r).
  - p_r pares de polos

Campo en el entrehierro

- Definimos: $\theta_s = \theta_r + \Omega t + (\theta_{s_0} - \theta_{r_0})$ Notar que $\theta_{s_0} - \theta_{r_0}$ no es arbitrario, dados φ_r y φ_s (impuestos por la fase en t=0 de las corrientes) este desfasaje tiene un valor dado.



Campo en el entrehierro

- El campo en el EH es la suma en θ de H_s y H_r.
- Se deben expresar entonces ambos campos con coordenada angular común (para poder sumarlos):

$$H_r(\theta_r, t) = H_{r_{MÁX}} cos(\omega_r t - p_r\theta_r - \varphi_r) \rightarrow$$

$$H_r(\theta_r, t) = H_r(\theta_s, t) = H_{r_{MÁX}} cos\left(\omega_r t - p_r(\underbrace{\theta_s - \Omega t - \theta_{s_0} + \theta_{r_0}}_{\theta_r}) - \varphi_r\right)$$

Agrupando términos:

$$H_r(\theta_s, t) = H_{r_{MÁX}} cos\left(\overbrace{(\omega_r + p_r\Omega)t}^{temporal} - \overbrace{p_r\theta_s}^{angular} - \overbrace{(\varphi_r - p_r(\theta_{s_0} - \theta_{r_0}))}^{constantes}\right)$$

Campo en el entrehierro

- Resulta conveniente definir estas constantes:

$$\omega_r' = \omega_r + p_r \Omega$$
$$\varphi'_r = \varphi_r - p_r(\theta_{s_0} - \theta_{r_0})$$

- De este modo resulta:

$$H_r(\theta_s, t) = H_{r_{MÁX}} cos(\omega_r' t - p_r \theta_s - \varphi'_r)$$

- Notar que la constante ω_r' tiene sentido físico:

$$\frac{\omega_r'}{p_r} = \frac{\omega_r}{p_r} + \Omega$$

$\frac{\omega_r'}{p_r}$ es la <u>velocidad de giro del campo rotórico respecto del estator</u>

Campo en el entrehierro

- A partir de este punto mediremos los ángulos siempre respecto del estator: $\theta = \theta_s$

$$H_{total}(\theta, t) = H_s(\theta, t) + H_r(\theta, t)$$

$$H_{total}(\theta, t) = H_{s_{MÁX}} cos(\omega_s t + p_s \theta - \varphi_s) + H_{r_{MÁX}} cos(\omega_r' t - p_r \theta - \varphi_r')$$

- Objetivo: calcular el par en la máquina. Recordar que se hizo anteriormente un cálculo en base a la derivada de la matriz de inductancias respecto al ángulo θ.

- Ahora se seguirá otro enfoque: <u>calcular la energía almacenada en el EH</u> por $H_{total}(\theta, t)$ y ver su efecto en el par.

Energía almacenada en EH

- Recordar que la energía almacenada se define como:

$$W_{total} = \int_{Vol} \frac{\partial W}{\partial vol} dVol = \int_{Vol} \frac{1}{2} \mu_0 H_{total}^2 \, dVol$$

- Se debe calcular la integral en el volumen de EH del campo neto (el hierro no agrega energía, porque asumimos μ infinito).

- Si R es el radio medio del EH y asumiendo que el ancho del EH es $e \ll R$, la integral resulta en θ por simetría:

$$W_{total} = \int_0^{2\pi} LRe \frac{1}{2} \mu_0 H_{total}^2(\theta, t) d\theta$$

Energía almacenada en EH

$$W_{total} = \frac{1}{2}LRe\mu_0 \int_0^{2\pi} H_{total}^2(\theta,t)d\theta$$

$$W_{total} = \frac{1}{2}\mu_0 LRe \int_0^{2\pi} [H_s^2(\theta,t) + H_r^2(\theta,t) + 2H_s(\theta,t)H_r(\theta,t)]d\theta$$

- Notar que la energía se separa en tres términos:

$$W_1 = \frac{1}{2}\mu_0 LRe \int_0^{2\pi} [H_s^2(\theta,t)]d\theta = \frac{1}{2}\mu_0 LReH_{s_{MÁX}}^2 \overbrace{\int_0^{2\pi} [cos^2(\omega_s t - p_s\theta - \varphi_s)]d\theta}^{\pi}$$

$$\rightarrow W_1 = \frac{1}{2}\mu_0 LRe\pi H_{s_{MÁX}}^2$$

- Obs: W_1 no depende del tiempo ni del ángulo.

Energía almacenada en EH

- Angálogamente:

$$W_2 = \frac{1}{2}\mu_0 LRe\pi H_{r_{MÁX}}^2$$

- Resta resolver el término cruzado:

$$W_3 = \frac{1}{2}\mu_0 LRe.2H_{s_{MÁX}}H_{r_{MÁX}}\int_0^{2\pi} cos(\omega_s t - p_s\theta - \varphi_s)cos(\omega'_r t - p_r\theta - \varphi'_r)d\theta$$

- Desarrollando el producto de los cosenos:

$$cos(\omega_s t - p_s\theta - \varphi_s)cos(\omega'_r t - p_r\theta - \varphi'_r)$$
$$= \frac{1}{2}\{cos[(\omega_s + \omega'_r)t - (p_s + p_r)\theta - (\varphi_s + \varphi'_r)]$$
$$+cos[(\omega_s - \omega'_r)t - (p_s - p_r)\theta - (\varphi_s - \varphi'_r)]\}$$

Energía almacenada en EH

- p_s y p_r son los números de pares de polos del estator y el rotor (1,2,..) por lo que $p_s + p_r$ siempre es entero positivo.

$\rightarrow cos[(\omega_s + \omega_r')t - (p_s + p_r)\theta - (\varphi_s + \varphi_r')]$ siempre integra cero en θ entre 0 y 2π.

- Por otra parte, si $p_s \neq p_r$: $p_s - p_r$ es un entero positivo o negativo pero no cero. Si esto fuera así: $W_3 = 0$ y la energía almacenada en el EH sería una constante por lo que el par sería nulo (recordar que el par es la derivada angular de la energía almacenada)

Energía almacenada en EH

- La única forma de que $W_3 \neq 0$ es que $p_s = p_r$.
- Este resultado es muy importante: la máquina debe tener <u>igual cantidad de pares de polos en estator y rotor</u> para producir par.
- Entonces asumiendo $p_s = p_r$:

$$W_3 = \frac{1}{2}\mu_0 LReH_{s_{MÁX}}H_{r_{MÁX}}\int_0^{2\pi} cos[(\omega_s - \omega_r')t - (\varphi_s - \varphi_r')]\,d\theta$$

$$\rightarrow W_3 = \mu_0 \pi LReH_{s_{MÁX}}H_{r_{MÁX}} cos[(\omega_s - \omega_r')t - (\varphi_s - \varphi_r')]$$

Cálculo del par

- Sistema lineal: $W_s = W'_s, \Gamma = \left.\frac{\partial W_s'}{\partial \gamma}\right|_{i=cte}$ (expresión del par)

(siendo γ el ángulo que hace variar la energía almacenada)

- En función de lo calculado anteriormente:

$$W_1 = \frac{1}{2}\mu_0 LRe\pi H_{s_{MÁX}}^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\mu_0 LRe\pi H_{r_{MÁX}}^2$$

$$W_3 = \mu_0 \pi LReH_{s_{MÁX}} H_{r_{MÁX}} cos[(\omega_s - \omega_r')t - (\varphi_s - \varphi_r')]$$

- W_1 y W_2 dependen solo de las corrientes (derivando a i=cte darán cero).

Cálculo del par

- W_3 sí presenta una dependencia angular, pero no es del todo clara:

$$W_3 = \mu_0 \pi L R e H_{s_{MÁX}} H_{r_{MÁX}} cos[(\omega_s - \omega_r')t - (\varphi_s - \varphi_r')]$$

- Sea cual sea el ángulo con el que se derive, siempre quedará un término del tipo sinusoidal en el tiempo. El par entonces oscila en forma sinusoidal con el tiempo.

- Tomamos como hipótesis velocidad $\Omega = cte$. Por lo que el trabajo neto es:

$$W = \int_0^T P dt = \int_0^T \Gamma . \Omega dt = \Omega \int_0^T \Gamma dt$$

Cálculo del par

- Dependiendo del período considerado el trabajo total realizado puede ser >0 (motor), <0 (generador), o cero.

- Para que sirva como convertidor, es decir que realice un trabajo siempre como motor (transformación de energía eléctrica en energía mecánica), o como generador (transformación de energía mecánica en energía eléctrica):

$$\omega_s = \omega_r'$$

- Además vimos anteriormente que se debe cumplir:

$$p_s = p_r = p$$

Cálculo del par

- Estas dos condiciones juntas implican:

$$\omega_s = \omega_r' = \omega_r + p\Omega \;\rightarrow \frac{\omega_s}{p} = \frac{\omega_r}{p} + \Omega$$

Recordar que:

  - $\frac{\omega_s}{p}$ es la velocidad con la que gira el campo estatórico respecto al estator.
  - $\frac{\omega_r}{p}$ es la velocidad del campo rotórico respecto del rotor.
  - Ω es la velocidad del rotor

- Conclusión: es la <u>condición de sincronismo</u> ya vista. Implica que <u>ambos campos deben rotar en sincronismo</u> para producir par medio.

Cálculo del par

- Aplicando entonces la condición de sincronismo resulta:

$$W_3 = \mu_0 \pi L R e H_{s_{MÁX}} H_{r_{MÁX}} cos(\varphi_s - \varphi_r')$$

- Esto restringe los posibles ángulos para derivar a $\begin{cases} \pm\varphi_s \\ \pm\varphi_r' \\ \pm(\varphi_s - \varphi_r') \end{cases}$

- Analizaremos a continuación el sentido físico de estos ángulos.

Cálculo del par

- Recordando los campos estatórico y rotórico:

$$H_s(\theta, t) = H_{s_{MÁX}} cos(\omega_s t - p\theta - \varphi_s)$$
$$H_r(\theta, t) = H_{r_{MÁX}} cos(\omega_s t - p\theta - \varphi'_r)$$

- Tomando una fotografía del campo en t=0 se observa:

$$H_s(\theta, 0) = H_{s_{MÁX}} cos(p\theta + \varphi_s)$$

$$H_r(\theta, 0) = H_{r_{MÁX}} cos(p\theta + \varphi'_r) = H_{r_{MÁX}} cos\big(p\theta + \varphi_r - p(\theta_{s_0} - \theta_{r_0})\big)$$

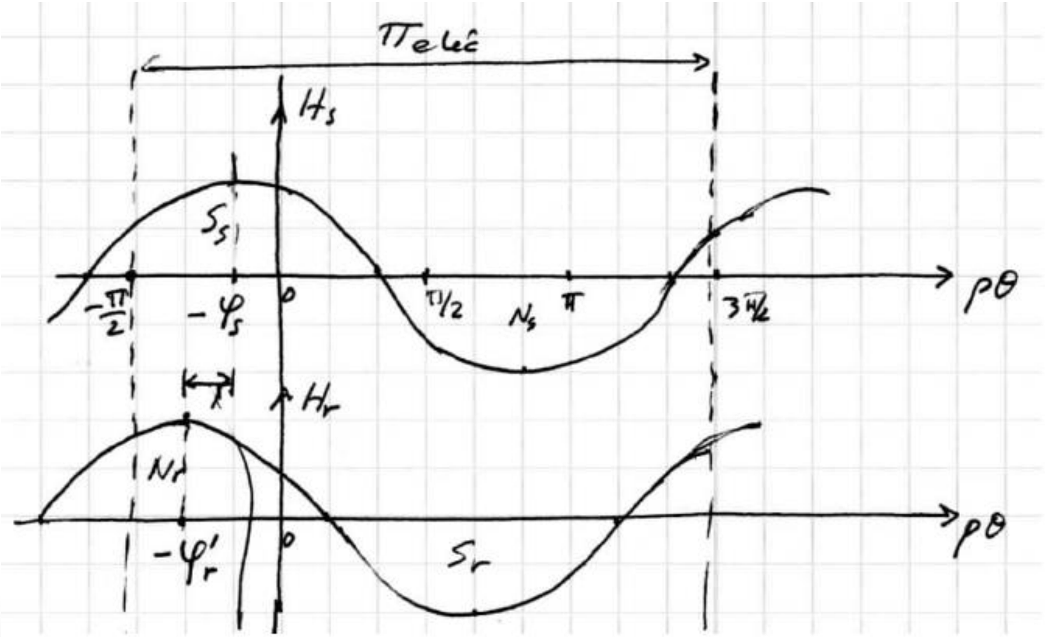
  - Notar que $p\theta$ es el ángulo eléctrico (θ ángulo mecánico o físico)

Cálculo del par

- Graficando estos campos:

$$H_s(\theta,0) = H_{s_{MÁX}} cos(p\theta + \varphi_s)$$

$$H_r(\theta,0) = H_{r_{MÁX}} cos(p\theta + \varphi'_r) = H_{r_{MÁX}} cos\big(p\theta + \varphi_r - p(\theta_{s_0} - \theta_{r_0})\big)$$



Notar que $\varphi_s - \varphi_r'$ es el desfasaje entre ambos campos (medido en ángulo eléctrico).

Cálculo del par

- Tiene sentido físico derivar respecto de este $\varphi_s - \varphi_r'$ ya que la energía almacenada en el campo depende de éste, más que de los valores individuales de φ_s y φ_r'.

- De este modo el par resulta:

$$\Gamma = \left.\frac{\partial W_s'}{\partial(\varphi_s - \varphi_r')}\right|_{i=cte} = \left.\frac{\partial W_3}{\partial(\varphi_s - \varphi_r')}\right|_{i=cte}$$

$$\boxed{\Gamma = \ -\mu_0 p\pi L R e H_{s_{MÁX}} H_{r_{MÁX}} sen(\varphi_s - \varphi_r')}$$

- Nota: la derivada se calcula respecto del ángulo mecánico, notar que como $\varphi_s - \varphi_r'$ y éste expresa ángulo eléctrico ($\theta_{elec} = p\theta_{mec}$) entonces corresponde multiplicar por p al derivar.

Cálculo del par

- Consideraciones físicas:

$$\Gamma = -\mu_0 p\pi LReH_{s_{MÁX}}H_{r_{MÁX}}sen(\varphi_s - \varphi_r')$$

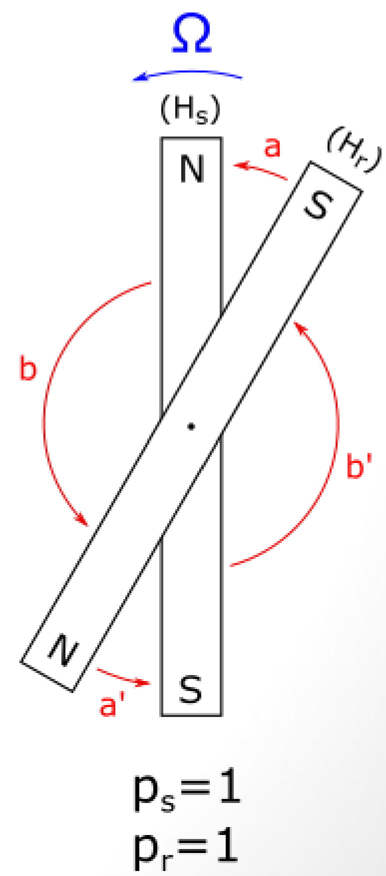
- Si $\varphi_s = \varphi_r'$ implica que los campos H_s y H_r están alineados en el espacio (máquina en vacío).

- Si $\varphi_s < \varphi_r'$ es un motor (par positivo)

- Si $\varphi_s > \varphi_r'$ es un generador (par negativo)

Igualdad de pares de polos

- Se puede analizar cualitativamente qué ocurre con el par si $p_s \neq p_r$ mediante una analogía simplificada donde los campos H_s y H_r son producidos por imanes giratorios.
- Inicialmente se supone que ambos imanes rotan en sincronismo, y que $p_s = p_r = 1$. Se analizan las fuerzas sobre el rotor.
- El N del estator atrae el S del rotor (fuerza *a*) y repele al N (fuerza *b*)
  El S del estator atrae el N del rotor con una fuerza *a'* de misma magnitud y sentido que *a*. Análogamente son iguales *b* y *b'*.
  El par total se origina de la suma de todas las fuerzas.



Igualdad de pares de polos

- Si por ejemplo $p_s = 1$ y $p_r = 2$ ahora cada polo del estator interacciona con cuatro del rotor (N-S-N-S).

- El N del estator repele a los dos N rotóricos (fuerzas *a* y *c*) y atrae los dos S (fuerzas *b* y *d*).

- El S del estator repele y atrae a los polos del rotor del mismo modo (fuerzas *a'*,*b'*,*c'* y *d'*).

- Notar que dados los ángulos iguales, el par producido por *a* anula el de *a'*. Análogamente se cancelan los otros pares y el par neto sobre el rotor es nulo.