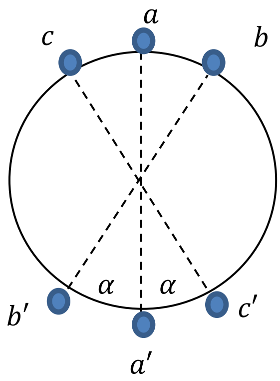
Mejora del contenido armónico de la F.M.M. de Entrehierro

1. Espiras diametrales distribuidas.

Se estudiará el caso en que se sustituye la bobina diametral de 2N espiras concentradas por tres paquetes de bobinas diametrales en serie según la siguiente figura para formar una única bobina con un total de 2n espiras..



Cada paquete de bobinas tiene 2N/3 espiras de forma que el total de espiras sea 2N.

Para determinar f.m.m. de entrehierro se procede con la ley de Ampere como se realizó para la espira diametral concentrada en un punto.

Región: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\varepsilon(0) - \varepsilon(\theta) = 0$

O sea que para valores de la coordenada angular en la región indicada la f.m.m. vale lo mismo

Región: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\varepsilon(0) - \varepsilon(\theta) = \frac{2Ni}{3}$$

Para valores de la coordenada angular comprendidos en el intervalo indicado la f.m.m. tiene una diferencia de $\frac{2Ni}{3}$

Región: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha$

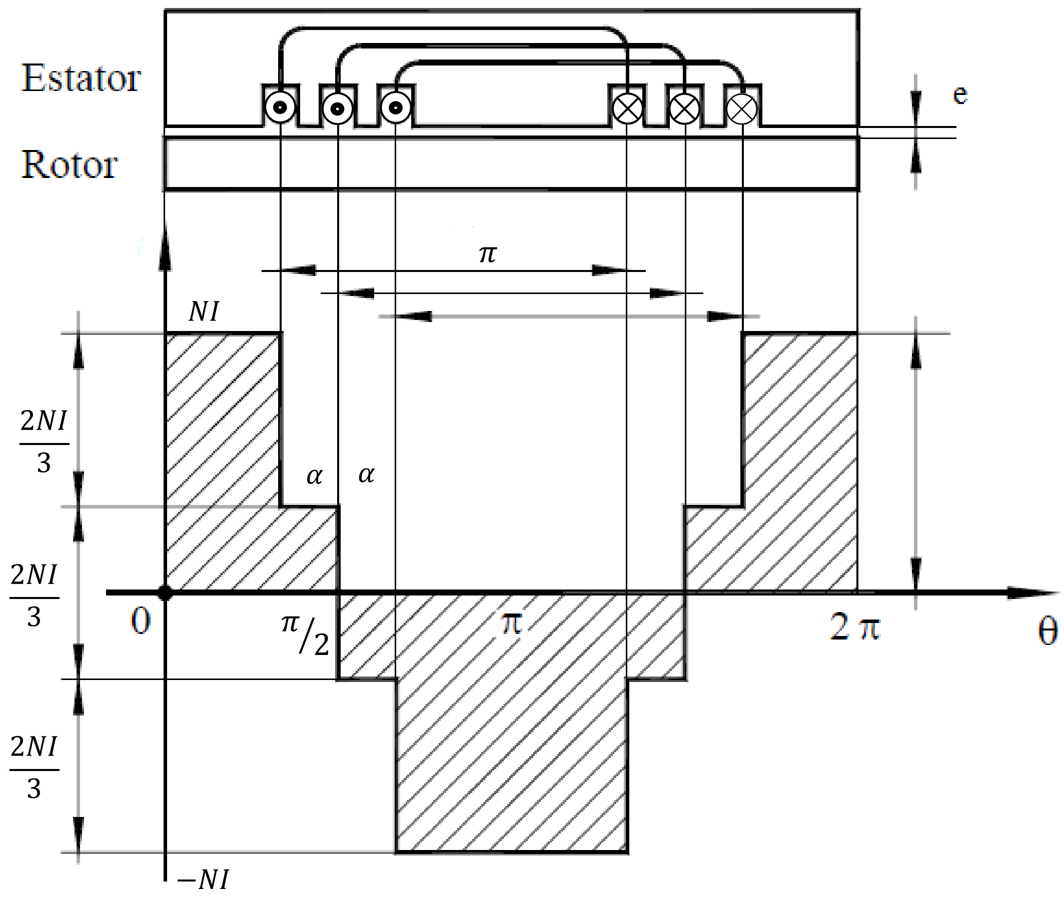
$$\varepsilon(0) - \varepsilon(\theta) = \frac{4Ni}{3}$$

Región: $0 \leq \theta \leq \pi$

$\varepsilon(0) - \varepsilon(\theta) = 2Ni$

Lo mismos valores se obtienen si se aplica la ley de ampere desde cero pero con la coordenada angular tomando valores negativos; intervalo [0,- π].

La siguiente figura sintetiza lo anterior.



Se puede observar que la f.m.m. es mucho más parecida a un coseno de la coordenada angular que lo que se tenía con una espira diametral concentrada en un punto.

Se calcula el contenido armónico de esta f.m.m.

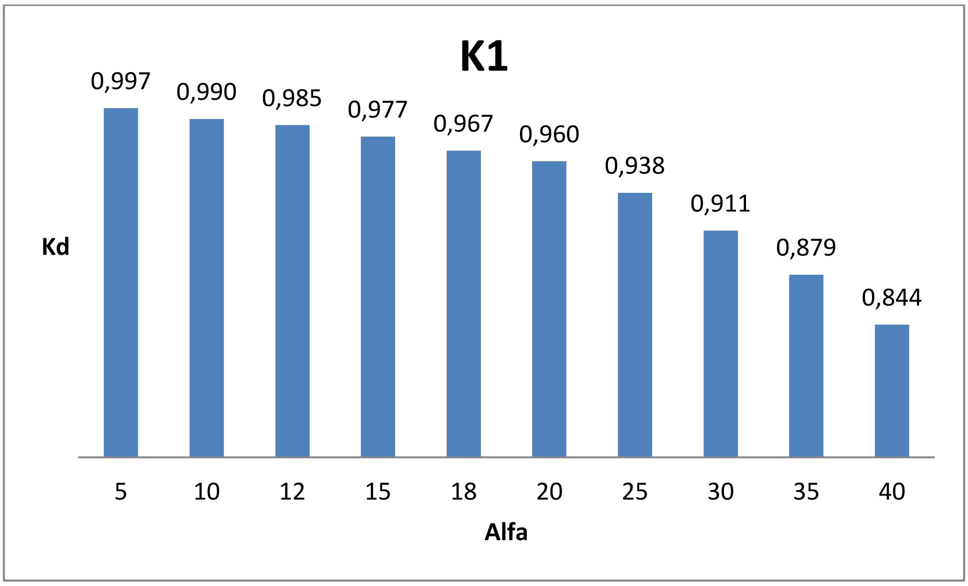
Dada la simetría par respecto a cero solo contiene términos en coseno y dada la simetría impar respecto a $\pi/2$ solo contiene coeficientes impares.

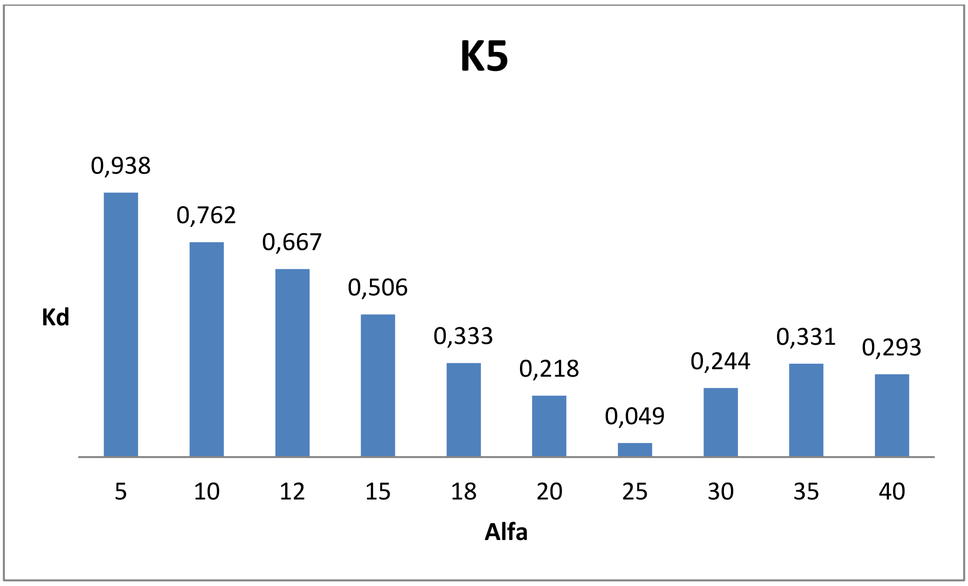
Calculando se obtiene:

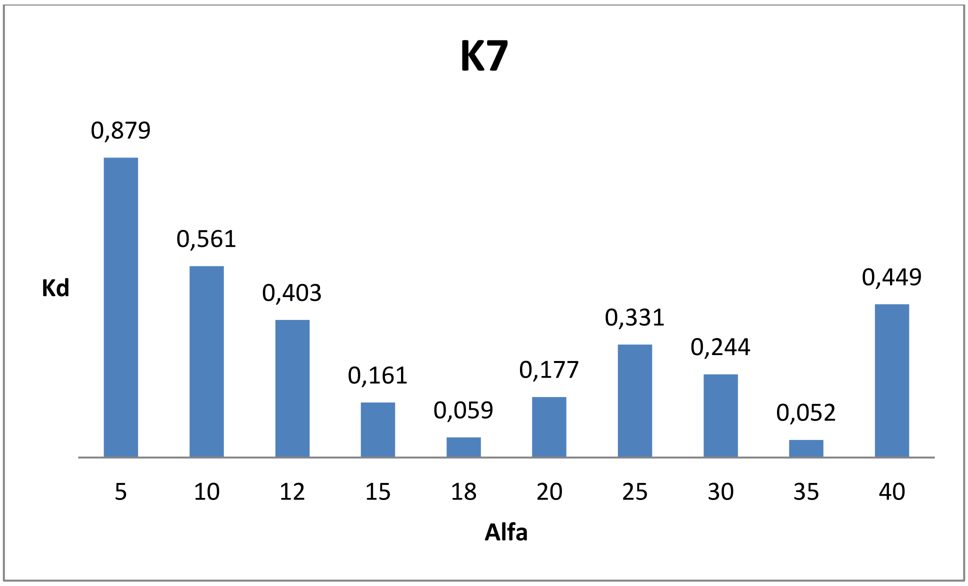
$$\varepsilon_k = \frac{4}{\pi}.\frac{N}{k}.i.\left[\sin\frac{k\pi}{2}\left(\frac{1+2.\cos k\alpha}{3}\right)\right] = K_{dk}\varepsilon_k^{con}$$

Dónde: $K_{dk} = \left(\frac{1+2.\cos k\alpha}{3}\right)$ y ε_k^{con} son los coeficientes del desarrollo en series de Fourier correspondientes a una bobina diametral concentrada ubicada en $\theta = {}^{\pi}/_{2}$.

A continuación se grafica el coeficiente k_{dk} en función de alfa para k =1, k = 5 y k =7; el tercer armónico no tiene interés pues no aporta al campo giratorio.


K1
Kd
0,997
0,990
0,985
0,977
0,967
0,960
0,938
0,911
0,879
0,844
5
10
12
15
18
20
25
30
35
40
Alfa


K5
Kd
0,938
0,762
0,667
0,506
0,333
0,218
0,049
0,244
0,331
0,293
5
10
12
15
18
20
25
30
35
40
Alfa


K7
Kd
0,879
0,561
0,403
0,161
0,059
0,177
0,331
0,244
0,052
0,449
5
10
12
15
18
20
25
30
35
40
Alfa

Se puede observar que eligiendo $\alpha \cong 20°$ se reducen notablemente los armónicos 5 y 7 mientras que el primer armónico solo se reduce un 4%.

El coeficiente K_d se denomina coeficiente de distribución de bobinado.

A partir de esto se puede constatar que la opción de concentrar una bobina en un punto además de ser poco práctica por el hecho de que requiere ranuras muy profundas es mala desde el punto de vista del contenido armónico que se obtiene en la f. m.m.

2. <u>Generalización</u>.

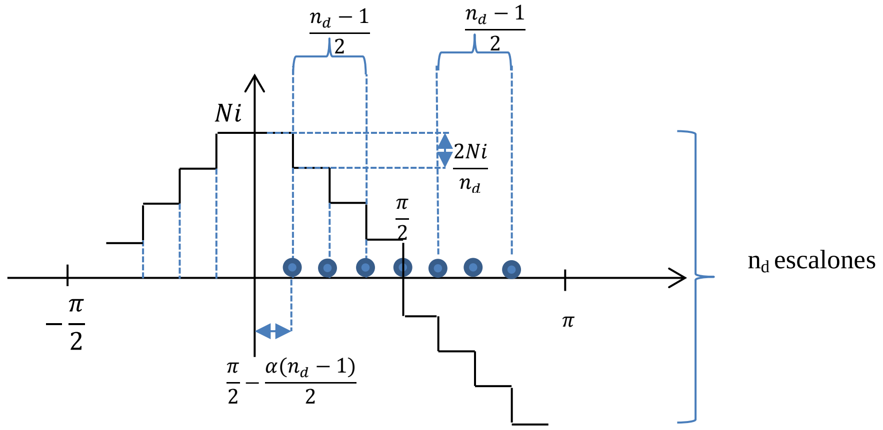
Si se tienen 2m ranuras en el estator, entonces para una maquina trifásica (q = 3) de un par de polos se tienen la siguiente cantidad de devanados en serie por fase:

$$n_d = \frac{m}{q} = \frac{m}{3}$$

Si cada ranura esta equis espaciado un ángulo α entonces un devanado ocupa un ángulo $\alpha.(n_d - 1)$ radianes.

Si cada fase está formada por 2N conductores en serie entonces en cada ranura se colocan $\frac{2N}{n_d}$ conductores (lo cual se admitirá es un numero natural).

De esta forma se obtiene un f.m.m de entrehierro de la siguiente forma:



La curva presenta un simetría par respecto al cero de la coordenada angular por lo cual se está admitiendo que se distribuyen las ranuras en forma simétrica respecto de $\theta = \pi/2$ y como consecuencia de esto el desarrollo en series de Fourier solo presenta términos en cosenos.

Además presenta simetría impar respecto de $\theta = \pi/2$ por lo cual solo existirán armónicos impares.

Es posible calcular los coeficientes del desarrollo en series de Fourier para esta f.m.m.

$$\varepsilon_k = \frac{2}{\pi}.N.i.\left[\int_0^{\pi/_2 - \alpha(n_d-1)/_2} cosk\theta.d\theta + \left(1-\frac{2}{n_d}\right)\int_{\pi/_2-\alpha(n_d-1)/_2}^{\pi/_2-\frac{\alpha(n_d-1)}{2}+\alpha} cosk\theta.d\theta\right.$$

$$+\left(1-\frac{4}{n_d}\right)\int_{\pi/_2-\frac{\alpha(n_d-1)}{2}+\alpha}^{\pi/_2-\frac{\alpha(n_d-1)}{2}+2\alpha} cos\theta.d\theta + \cdots$$

$$+\left(1-\frac{2(n_d-1)}{n_d}\right)\int_{\pi/_2-\frac{\alpha(n_d-1)}{2}+\alpha(n_d-2)}^{\pi/_2-\frac{\alpha(n_d-1)}{2}+\alpha(n_d-1)} cos\theta.d\theta$$

$$\left.+(-1)\int_{\pi/_2-\frac{\alpha(n_d-1)}{2}+\alpha(n_d-1)}^{\pi} cos\theta.d\theta\right]$$

Integrando:

$$\varepsilon_k = \frac{2}{\pi}.\frac{N}{k}.i.\left[\left[1-\left(1-\frac{2}{n_d}\right)\right]sen\left(k\left(\pi/_2 - \alpha(n_d-1)/_2\right)\right)\right.$$

$$+\left[\left(1-\frac{2}{n_d}\right)-\left(1-\frac{4}{n_d}\right)\right]sen\left(k\left(\pi/_2-\frac{\alpha(n_d-1)}{2}+\alpha\right)\right)$$

$$+\left[\left(1-\frac{4}{n_d}\right)-\left(1-\frac{6}{n_d}\right)\right]sen\left(k\left(\pi/_2-\frac{\alpha(n_d-1)}{2}+2\alpha\right)\right)+\cdots$$

$$\left.+\left[\left(1-\frac{2(n_d-1)}{n_d}\right)+1\right]sen\left(k\left(\pi/_2-\frac{\alpha(n_d-1)}{2}+\alpha(n_d-1)\right)\right)\right]$$

Teniendo en cuenta:

$$1-\left(1-\frac{2}{n_d}\right)=\frac{2}{n_d}$$

$$\left(1-\frac{a}{n_d}\right)-\left(1-\frac{2a}{n_d}\right)=\frac{2}{n_d}$$

$$\left(1-\frac{2(n_d-1)}{n_d}\right)+1=\frac{2}{n_d}$$

Se tiene:

$$\varepsilon_k = \frac{4}{\pi}.\frac{N}{n_d.k}.i\left[sen\left(k\left(\pi/_2 - {\alpha(n_d-1)}/_2\right)\right) + sen\left(k\left(\pi/_2 - \frac{\alpha(n_d-1)}{2} + \alpha\right)\right)\right.$$
$$+ sen\left(k\left(\pi/_2 - \frac{\alpha(n_d-1)}{2} + 2\alpha\right)\right) + \cdots$$
$$\left. + sen\left(k\left(\pi/_2 - \frac{\alpha(n_d-1)}{2} + \alpha(n_d-1)\right)\right)\right]$$

Teniendo en cuenta la siguiente identidad trigonométrica:

$$sen\left(k\left(\pi/_2 - \frac{\alpha(n_d-1)}{2} + a\alpha\right)\right)$$
$$= senk\,\pi/_2 . cosk\left[-\frac{\alpha(n_d-1)}{2} + a\alpha\right]$$
$$- cosk\,\pi/_2 . senk\left[-\frac{\alpha(n_d-1)}{2} + a\alpha\right]$$
$$= senk\,\pi/_2 . cosk\left[-\frac{\alpha(n_d-1)}{2} + a\alpha\right]$$

Se debe tener en cuenta que $cosk\,\pi/_2 = 0$ para k impar.

$$\varepsilon_k = \frac{4}{\pi}.\frac{N}{n_d.k}.i.senk\,\pi/_2 . \left[cosk\left[-\frac{\alpha(n_d-1)}{2}\right] + cosk\left[-\frac{\alpha(n_d-1)}{2} + \alpha\right] + \cdots\right.$$
$$\left. + cosk\left[-\frac{\alpha(n_d-1)}{2} + \alpha(n_d-1)\right]\right]$$

Entonces recordando que $\varepsilon_k^{con} = \frac{4}{\pi}.\frac{N}{k}.i.\ senk\,\pi/_2$ son los coeficientes para el caso de una espira diametral concentrada se tiene:

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_k^{con}}{n_d}\left\{Re\left[e^{-j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}(1 + e^{jk\alpha} + \cdots + e^{jk\alpha(n_d-1)})\right]\right\}$$
$$= \frac{\varepsilon_k^{con}}{n_d} Re[e^{-j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}.\frac{(e^{jk\alpha n_d} - 1)}{(e^{jk\alpha} - 1)}] = \frac{\varepsilon_k^{con}}{n_d}.A.cos\delta$$

Dónde: $A = \frac{\sqrt{(\cos(k\alpha n_d)-1)^2 + sen^2(k\alpha n_d)}}{\sqrt{(\cos(k\alpha)-1)^2 + sen^2(k\alpha)}} = \frac{sen({k\alpha n_d}/_2)}{sen({k\alpha}/_2)}$

Falta demostrar que $cos\delta = 1$ para lo cual se demostrará que el siguiente número es un número real: $e^{-j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}\left(1 + e^{jk\alpha} + \cdots + e^{jk\alpha(n_d-1)}\right)$

$$e^{-j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}\left(1+e^{jk\alpha}+\cdots+e^{jk\alpha(n_d-1)}\right)$$
$$=e^{-j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}\left[1+e^{jk\alpha(n_d-1)}\right]+e^{-j\frac{\alpha(n_d-1)}{2}}\left[e^{jk\alpha}+e^{jk\alpha(n_d-2)}\right]\ldots..$$

Observar que:

$$e^{-j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}\left[1+e^{jk\alpha(n_d-1)}\right]=e^{-j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}+e^{j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}\in R$$

$$e^{-j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}\left[e^{jk\alpha}+e^{jk\alpha(n_d-2)}\right]=e^{-j\frac{\alpha k(n_d-3)}{2}}+e^{j\frac{\alpha k(n_d-3)}{2}}\in R$$

Así es posible agrupar todos los términos quedando solo en término central el cual es:

Teniendo en cuenta que: $\pi/2=\pi/2-\frac{\alpha(n_d-1)}{2}+\frac{\alpha(n_d-1)}{2}$

$$e^{-j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}.e^{j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}=1\in R$$

De esta forma se demostró que $e^{-j\frac{\alpha k(n_d-1)}{2}}\left(1+e^{jk\alpha}+\cdots+e^{jk\alpha(n_d-1)}\right)\in R$ por lo cual $cos\delta=1$

Entonces: $\varepsilon_k=\frac{\varepsilon_k^{con}}{n_d}.\frac{sen(k\alpha n_d/2)}{sen(k\alpha/2)}$ con lo cual se define el coeficiente de distribución de bobinado como: $\boldsymbol{K_{dk}}=\frac{\boldsymbol{sen(k\alpha n_d/2)}}{\boldsymbol{n_d.sen(k\alpha/2)}}$

<u>Observación</u>:

Si se tuviera una distribución continua y uniforme de espiras cada fase ocupa 1/3 de la periferia del estator entonces:

$\alpha\to 0 \;=> sen\left(k\alpha/2\right)\to k\alpha/2$

$n_d\alpha\to\pi/3 \;=> sen\left(kn_d\alpha/2\right)\to sen\left(k\pi/6\right)$

Entonces: $\boldsymbol{K_{dk}}\to\frac{sen(k\pi/6)}{n_d k\alpha/2}=\frac{sen(k\pi/6)}{k\pi/6}$

De esta forma se tienen los siguientes valores en valor absoluto:

k	K_{dk}
1	0.95
5	0.19
7	0.136

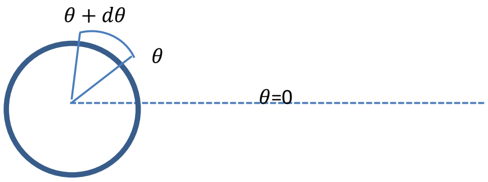
3. Distribución ideal de espiras de bobinado.

Se estudió como distribuyendo el bobinado en lugar de concentrarlo en un punto es posible disminuir el contenido armónico espacial de la f.m.m. de entrehierro.

Entonces tiene lugar la pregunta de ¿existe alguna forma de distribuir el bobinado en la periferia del estator de forma que la f.m.m. de entrehierro sea $\varepsilon(\theta) = A\cos\theta$?

Supongamos se tiene una distribución continua de espiras en el estator $n(\theta)$, o sea la cantidad de espiras por unidad de ángulo es $n(\theta)$.

Por lo cual en un diferencial $d\theta$ se tienen $n(\theta)d\theta$ espiras; si todas las espiras llevan una corriente i entonces entre θ y $\theta + d\theta$ circula una corriente $n(\theta).i.d\theta$



$$\varepsilon(\theta + d\theta) - \varepsilon(\theta) = n(\theta).i.d\theta$$

Entonces:

$$\frac{d\varepsilon(\theta)}{d\theta} = n(\theta).i.$$

Además se quiere que $\varepsilon(\theta) = A\cos\theta$ por lo cual: $n(\theta) = \left|\frac{A}{i}\operatorname{sen}\theta\right|$

Se debe cumplir con $i\int_0^{\pi} n(\theta)d\theta = 2Ni$

Entonces: $A = N$ con lo cual: $n(\theta) = |N\operatorname{sen}\theta|$

Conclusión:

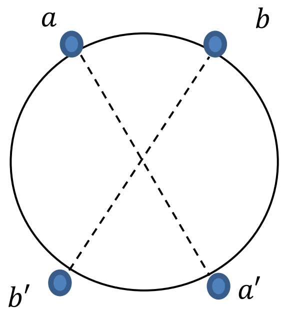
Se encontró una distribución de espiras para un bobinado que da lugar a una f.m.m. puramente sinusoidal.

4. <u>Acortamiento del Paso</u>.

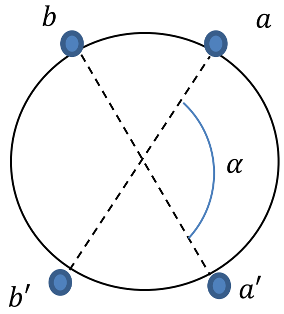
Hasta el momento se han estudiados bobinados de paso diametral o sea la corriente entra en una determinada coordenada θ y sale en $\theta + \pi$.

A continuación se estudiará el efecto de acortar el paso de la bobina o sea el ángulo entre los dos lados de la bobina será menor que π.

$Paso\ completo$

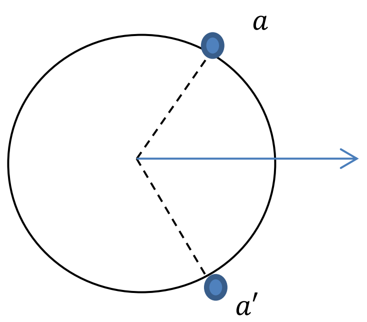


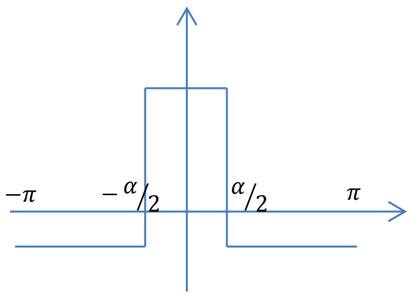
$Paso\ reducido\ simetrico$



a' α

Si en una máquina se coloca una sola bobina con el paso acortado, resulta un campo con semiciclos asimétricos como se muestra en la figura de abajo; esto genera armónicos pares, lo que es totalmente indeseable.





Se concluye que los bobinados de paso acortado serán simétricos.

Las bobinas estaran en:

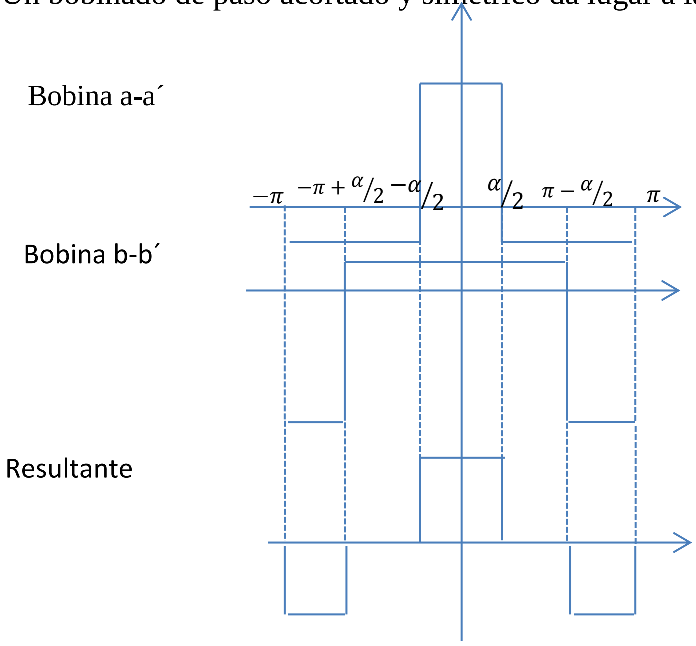
$\alpha/2$ lado a (corriente saliente Ni)

$-\alpha/2$ lado a' (corriente entrante Ni)

$\pi - \alpha/2$ lado b (corriente saliente Ni)

$-\pi + \alpha/2$ lado b' (corriente entrante Ni)

Un bobinado de paso acortado y simétrico da lugar a la siguiente F.m.m. de entrehierro:



Para cada bobina individual el máximo vale:

Los coeficientes de Fourier para esta F.m.m. se calculan de la siguiente forma:

Se debe tener en cuenta que por tener simetría par solo presenta términos en cosenos y por tener simetría impar respecto a ${}^{\pi}/_{2}$ solo tendrá términos impares.

$$\varepsilon_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\alpha/2} \varepsilon . cosk\theta . d\theta - \int_{\pi-\alpha/2}^{\pi} \varepsilon . cosk\theta . d\theta\right] = \frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon}{k}\left[sen\left(\frac{k\alpha}{2}\right) - cos(k\pi) sen\left(\frac{k\alpha}{2}\right)\right]$$

$cos(k\pi) = -1 \;\; \forall k \neq \dot{2}$

Entonces:

$$\varepsilon_k = \frac{4}{\pi}\frac{\varepsilon}{k}\; sen\left(\frac{k\alpha}{2}\right)$$

Entonces si las bobinas a – a’ y b-b’ tienen las vueltas necesarias para que $\varepsilon = N.i$ se puede escribir:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{diam}\; sen\left(\frac{k\alpha}{2}\right)$$

Donde ε_k^{diam} son los coeficientes de una bobina diametral ubicada en $\theta = {}^{\pi}/_{2}$

Se define el coeficiente paso como: $K_p = sen\left(\frac{k\alpha}{2}\right)$

Si se toma $\alpha = \frac{\pi}{h}$; o sea como fracción del paso completo entonces $K_p = sen\left(\frac{k\pi}{2h}\right)$

A continuación se calcula K_p para distintos valores de h.

k\h	3	4	5	6	7
1	0,87	0,92	0,95	0,97	0,97
3	0,00	0,38	0,59	0,71	0,78
5	-0,87	-0,38	0,00	0,26	0,43
7	-0,87	-0,92	-0,59	-0,26	0,00

- Se observa que para el primer armónico el coeficiente reduce muy poco.
- Los armónicos 5 y 7 se pueden reducir apreciablemente si se acorta el paso: 1/6.
- Es posible eliminar el armónico 5 acortando el paso 1/5.
- Es posible eliminar el armónico 7 acortando el paso 1/7.

5. <u>Factor de Devanado</u>.

En general los bobinados de las máquinas se realizan acortando el paso y en forma distribuida pero es posible encontrar una bobina concentrada de paso diametral que genere la misma F.m.m. mediante la utilización de los coeficientes de distribución (Kd) y de paso (Kp).

Cada pareja de bobinas de paso reducido se puede sustituir por una bobina de paso diametral equivalente utilizando el factor Kp.

Luego se reduce el bobinado distribuido de paso diametral a una bobina concentrada de paso diametral utilizando el coeficiente Kd.

De esta forma el bobinado equivalente tiene un número efectivo de vueltas:

$N_{ef} = K_{p1}K_{d1}\mathrm{N}$

Se define el factor de devanado como: $K_{w1} = K_{d1}K_{p1}$

Lo anterior es para el primer armónico pero se puede definir para cualquier armónico de orden superior.

$$K_{wk} = K_{dk}K_{pk}$$

Según esto el máximo de la F.m.m. de entrehierro será:

$$\varepsilon_k = \frac{4}{\pi}\frac{Ni}{k}\ K_{wk}$$