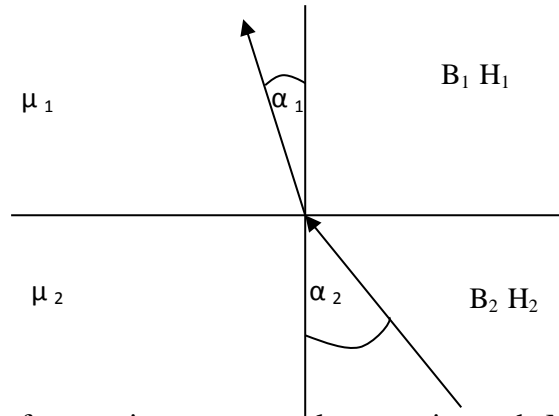


## Campo Giratorio.

1. Refracción de campo magnético en la interface de dos materiales magnéticamente distintos.



Condiciones de frontera impuestas por las ecuaciones de Maxwell:

$H_{t1} = H_{t2} = H_t$  Valido si en la frontera entre los materiales no hay corrientes:

$$B_{n1} = B_{n2} = B_n$$

Entonces calculando el ángulo de refracción de los campos se tiene:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{H_{t1}}{H_{n1}} = \mu_1 \frac{H_t}{B_n}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{H_{t2}}{H_{n2}} = \mu_2 \frac{H_t}{B_n}$$

$$\text{Se tiene: } \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$$

$$\text{Si } \mu_1 \ll \mu_2 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 \cong 0 \Rightarrow \alpha_1 \cong 0$$

Cuando se pasa de un medio de alta permeabilidad a otro de mucho menor permeabilidad el campo magnético, en el medio de menor permeabilidad, es normal a la interface de los medios

Ejemplo:

Medio 1: aire  $\mu_r = 1$

Medio 2: hierro  $\mu_r = 1000$

$$\text{Entonces: } \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = 10^{-3} \operatorname{tg} \alpha_2 \cong 0 \text{ siempre que } \alpha_2 \neq \frac{\pi}{2}$$

## 2. Campo Radial.

En general se puede poner:

$$\vec{H}(r, \theta, z) = H_r(r, \theta, z)\vec{u}_r + H_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + H_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$$

Si la dimensión axial es mucho mayor que la radial entonces se puede pasar a un problema en dos dimensiones:

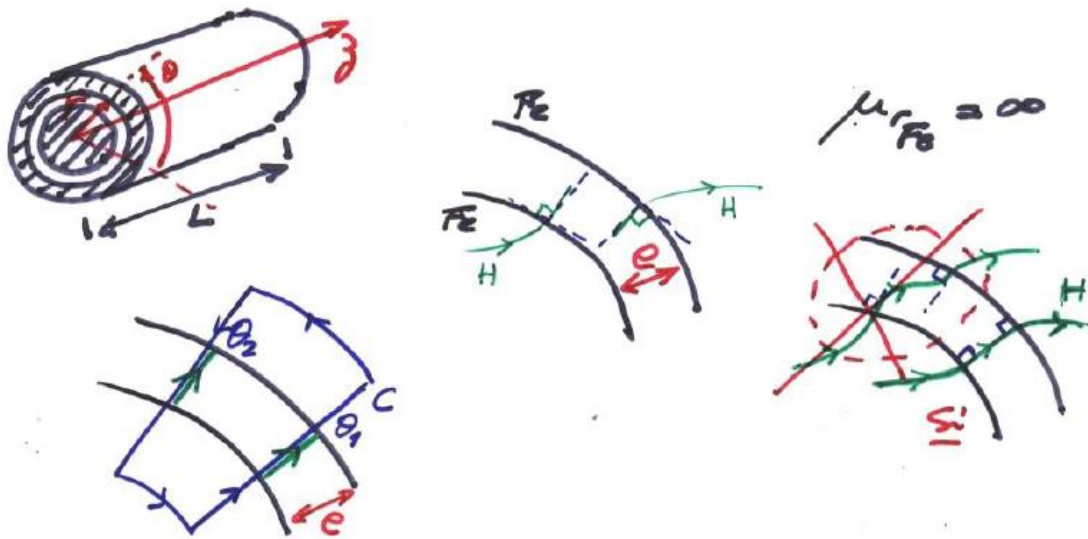
$$L \cong \infty \Rightarrow H_z = 0$$

Teniendo en cuenta lo estudiado en (1) se puede afirmar que el campo magnético deja el rotor para entrar en el entrehierro con un ángulo de  $90^\circ$  y con el mismo ángulo incide en el estator al dejar el entrehierro.

Si el entrehierro de la maquina es pequeño entonces se puede decir que el campo magnético tiene dirección radial en el mismo.

Entonces:

$$\vec{H}(r, \theta, z) = H_r(r, \theta, z)\vec{u}_r$$



Además:

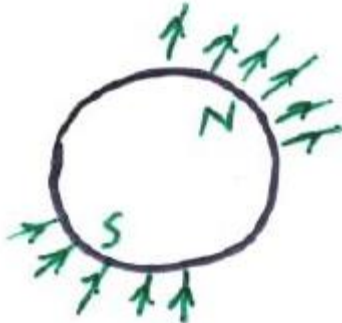
- No depende de  $z$  si  $L \cong \infty$
- Si se calcula el campo  $H$  medio a lo largo de  $e$ , no depende de  $r$ .

$\Rightarrow \vec{H} = H_r(\theta)\vec{u}_r$  Para un instante dado. Además puede depender de  $t$ .

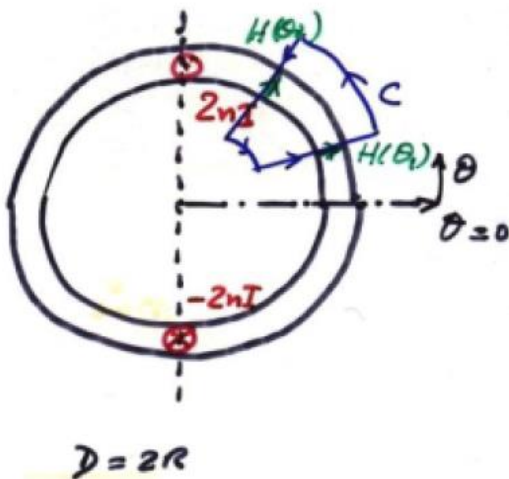
$$\boxed{\vec{H} = H_r(\theta, t)\vec{u}_r}$$

Observación:

Convención de signos  $H > 0$  para  $r$  crecientes  $\Rightarrow H > 0$ : saliente del rotor  
 "Polo Norte" del rotor



3. Campo Magnético en el entrehierro para una bobina diametral, concentrada.



- Bobina diametral de  $2n$  vueltas, concentrada en la posición indicada en la figura.
- $\mu_{FE} \cong \infty$

Entonces aplicando la ley de Ampere a curvas como las de la figura:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \left\{ \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \right\}_{FE} + \left\{ \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \right\}_{EH} = \iint \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

$$B = \mu_{FE} H_{FE} \Rightarrow H_{FE} \cong 0$$

$$\text{Entonces: } H(\theta_1) \cdot e - H(\theta_2) \cdot e = \begin{cases} 2nI \\ 0 \\ -2nI \end{cases}$$

Además se debe cumplir:

$$\iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \text{ Donde } S \text{ es la superficie que delimita el volumen de la máquina.}$$

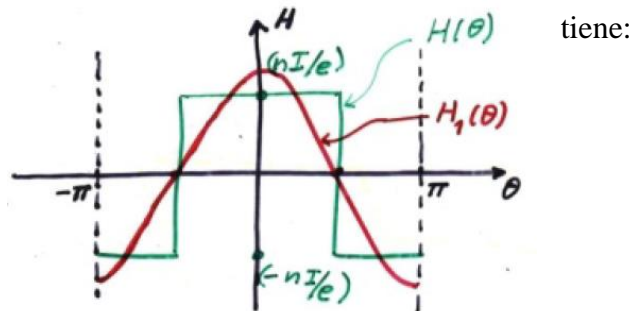
En el entrehierro se cumple:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Entonces:  $\mu_0 L R \int_0^{2\pi} H(\theta) d\theta = 0$

La curva de  $H(\theta)$  tiene valor medio nulo.

Por lo tanto se



Con 1 bobina diametral se tiene una onda cuadrada para  $H(\theta)$ .

#### 4. Fuerza Magneto Motriz de Entrehierro (f.m.m.).

Definición:  $\varepsilon(\theta, t)$

$$\varepsilon(\theta, t) = H(\theta, t) \cdot e$$

Observaciones:

- Si la maquina es de rotor cilíndrico entonces el entrehierro es constante ( $e = \text{cte}$ ).
- Máquinas de polos salientes el entrehierro no es constante pero entonces es una función periódica de la coordenada angular.

$$e(\theta) = e_o + \sum_{k=1}^{\infty} e_k \cos k\theta$$

#### 5. Contenido armónico de la f.m.m. de entrehierro.

Para el caso de entrehierro constante la f.m.m. correspondiente a una bobina diametral es una onda cuadrada como se estudió en (3).

A continuación se presenta su contenido armónico.

Dada la simetría de la onda la misma solo presenta un desarrollo en cosenos.

$$\varepsilon(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \cos k\theta$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon(\theta) \cdot \cos k\theta \cdot d\theta = \frac{4Ni}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos k\theta \cdot d\theta = \frac{4Ni}{\pi k} \cdot \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} \pm \frac{4Ni}{\pi k} & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

Para  $k = 1$  se tiene:

$$\varepsilon_1 = \frac{4}{\pi} \cdot N \cdot i(t)$$

Entonces teniendo en cuenta que los coeficientes son decrecientes con  $k$  una primera aproximación para la f.m.m. de entrehierro es quedarse con el primer término del desarrollo de Fourier y despreciar los de mayor orden.

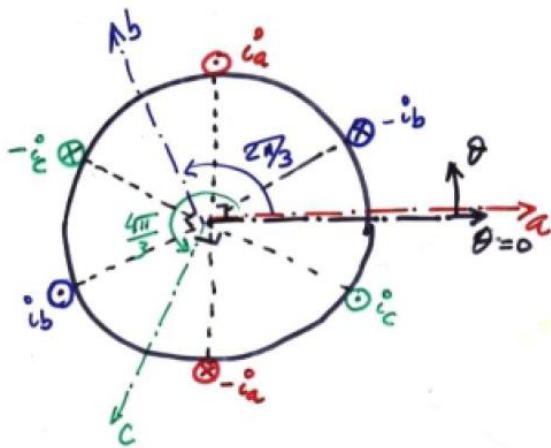
Entonces:

$$\varepsilon(\theta) = \frac{4}{\pi} \cdot N \cdot i(t) \cdot \cos\theta$$

El próximo término que aparece en el desarrollo en series de Fourier es el correspondiente a  $k = 3$  pero el mismo es un tercio del correspondiente a  $k = 1$ .

En lo que sigue se realizara un estudio considerando solo el término correspondiente a  $k = 1$  y luego se verán técnicas para que esto sea una mejor aproximación.

## 6. Campo Giratorio Bipolar – Teorema de Ferraris.



- Máquina con entrehierro constante.  

$$\varepsilon(\theta, t) = H(\theta, t) \cdot e, \quad e = cte.$$
- Tres bobinas (a, b, c) diametrales concentradas en un punto con ejes magnéticos desfasados  $120^\circ$ .

La f.m.m. producida por las bobinas son:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_a(\theta, t) &= \frac{4}{\pi} \cdot n'_a \cdot i_a(t) \cdot \cos\theta \\ \varepsilon_b(\theta, t) &= \frac{4}{\pi} \cdot n'_b \cdot i_b(t) \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \varepsilon_c(\theta, t) &= \frac{4}{\pi} \cdot n'_c \cdot i_c(t) \cdot \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} 3 \text{ bobinas iguales } n'_a = n'_b = n'_c = n'_s$$

Se alimentan las bobinas con una fuente trifásica equilibrada por lo que las corrientes que circulan por cada bobina serán:

$$\left. \begin{aligned} i_a(t) &= I_s \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) \\ i_b(t) &= I_s \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_c(t) &= I_s \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \text{ Sistema trifásico equilibrado directo}$$

El campo resultante en el entrehierro es la suma (escalar) de las contribuciones de las 3 bobinas.

$$\varepsilon(\theta, t) = \varepsilon_a(\theta, t) + \varepsilon_b(\theta, t) + \varepsilon_c(\theta, t)$$

Sumando:

$$\varepsilon(\theta, t) = \frac{4}{\pi} n'_s I_s \sqrt{2} \left[ \cos(\omega t - \varphi) \cos\theta + \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

Recordando la siguiente identidad trigonométrica.

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

La f.m.m de entrehierro resultante queda:

$$\varepsilon(\theta, t) = \frac{1}{2} \frac{4}{\pi} n'_s I_s \sqrt{2} [\cos(\omega t - \varphi + \theta) + \cos(\omega t - \varphi - \theta) + \cos\left(\omega t - \varphi + \theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos(\omega t - \varphi - \theta) + \cos\left(\omega t - \varphi + \theta - \frac{8\pi}{3}\right) + \cos(\omega t - \varphi - \theta)]$$

Se debe tener en cuenta que:

$$\cos(\omega t - \varphi + \theta) + \cos\left(\omega t - \varphi + \theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \varphi + \theta - \frac{8\pi}{3}\right) = 0$$

Entonces se tiene la f.m.m. resultante:

$$\varepsilon(\theta, t) = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} n'_s I_s \sqrt{2} \cos(\omega t - \theta - \varphi)$$

Si se define:  $\varepsilon_{M\acute{A}X} = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} n'_s I_s \sqrt{2}$  entonces:

$$\varepsilon(\theta, t) = \varepsilon_{M\acute{A}X} \cos(\omega t - \theta - \varphi)$$

Observaciones:

- Si  $\theta = \theta_0$  fijo  $\Rightarrow \varepsilon(\theta_0, t) = \varepsilon_{M\acute{A}X} \cos(\omega t - \varphi')$ ,  $\varphi' = \varphi + \theta_0$ , sinusoidal en  $t$ .
- Si  $t = t_0$  fijo  $\Rightarrow \varepsilon(\theta, t_0) = \varepsilon_{M\acute{A}X} \cos(\theta - \omega t_0 + \varphi)$ , sinusoidal en  $\theta$ .

- Velocidad de sincronismo: para un observador que se desplazara por el entrehierro a una velocidad  $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$ , existe una velocidad  $\Omega_s$  ("de sincronismo") tal que "vería" un campo  $\varepsilon = cte$ .

$$d\varepsilon = 0 \Rightarrow d\varepsilon = -\varepsilon_{MAX} \sin(\omega t - \theta - \varphi) [\omega dt - d\theta] = 0 \Rightarrow \omega dt - d\theta = 0$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \Omega_s \quad (\text{campo bipolar})$$

- ¿Qué sucede si en lugar de alimentar las bobinas con sistema de secuencia directa se lo hubiera alimentado con un sistema de secuencia inversa?

$$\text{Secuencia Inversa} \begin{cases} i_{ai} = \sqrt{2}I_i \cos(\omega t - \varphi) \\ i_{bi} = \sqrt{2}I_i \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}I_i \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \\ i_{ci} = \sqrt{2}I_i \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}I_i \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Entonces sustituyendo en las expresiones para la f.m.m. y teniendo en cuenta que

$$\varepsilon(\theta, t) = \varepsilon_a(\theta, t) + \varepsilon_b(\theta, t) + \varepsilon_c(\theta, t)$$

Se tiene:

$$\varepsilon = \frac{4}{\pi} n'_s \sqrt{2} I_i \left[ \cos(\theta) \cos(\omega t - \varphi) + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$\varepsilon = \frac{4}{\pi} n'_s \sqrt{2} I_i \left[ \cos(\omega t - \varphi + \theta) + \cos(\omega t - \varphi - \theta) + \cos(\omega t - \varphi + \theta) + \cos\left(\omega t - \varphi - \theta + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos(\omega t - \varphi + \theta) + \cos\left(\omega t - \varphi - \theta + \frac{8\pi}{3}\right) \right]$$

Además:

$$\cos(\omega t - \varphi - \theta) + \cos\left(\omega t - \varphi - \theta + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \varphi - \theta + \frac{8\pi}{3}\right) = 0$$

$$\varepsilon(\theta, t) = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} n'_s \sqrt{2} I_i \cos(\omega t + \theta - \varphi)$$

$$\Omega_s = -\omega$$

El campo gira ahora en sentido opuesto al que giraba cuando se alimentaba con un sistema directo

- ¿Qué sucede si se alimenta con una secuencia homopolar?

$$i_a = i_b = i_c = \sqrt{2} I_h \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{Todas en igual sentido.}$$

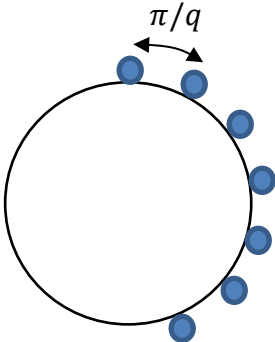
Sustituyendo en las expresiones para la f.m.m.

$$\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = 0$$

Los armónicos de corriente  $\dot{3}$  son homopolares por lo tanto no producen campo magnético resultante.

7. Efecto por el aumento de número de fases.

Se consideran ahora q bobinas diametrales para formar q fases equis espaciadas  $\frac{2\pi}{2q} = \frac{\pi}{q}$  radianes.



Generalizando lo desarrollado hasta ahora se puede ver que la f.m.m. de entrehierro producida por cada bobina es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{4}{\pi} n'_2 i_1 \cos(\theta_e) \\ \varepsilon_2 = \frac{4}{\pi} n'_2 i_2 \cos\left(\theta_e - \frac{2\pi}{q}\right) \\ \varepsilon_3 = \frac{4}{\pi} n'_2 i_3 \cos\left(\theta_e - 2 \cdot \frac{2\pi}{q}\right) \\ \dots \dots \dots \\ \varepsilon_q = \frac{4}{\pi} n'_2 i_q \cos\left(\theta_e - (q-1) \cdot \frac{2\pi}{q}\right) \end{array} \right.$$

A las q bobinas se las alimenta con un sistema de corrientes q-fasico perfecto del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi) \\ i_2 = \sqrt{2} I \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{q}\right) \\ i_3 = \sqrt{2} I \cos\left(\omega t - \varphi - 2 \cdot \frac{2\pi}{q}\right) \\ \dots \dots \dots \\ i_q = \sqrt{2} I \cos\left(\omega t - \varphi - (q-1) \cdot \frac{2\pi}{q}\right) \end{array} \right.$$

Esto es, un sistema de corrientes de igual modulo pero desfasadas en el tiempo  $\frac{2\pi}{q}$  radianes.



Sustituyendo se la corriente en la f.m.m. individual de cada bobina y teniendo en cuenta que la f.m.m. resultante es:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_q$$

Se tiene:

$$\varepsilon(\theta, t) = \frac{q}{2} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 (\sqrt{2}I) \cos(\omega t - \theta_e - \varphi)$$

### 8. Observaciones.

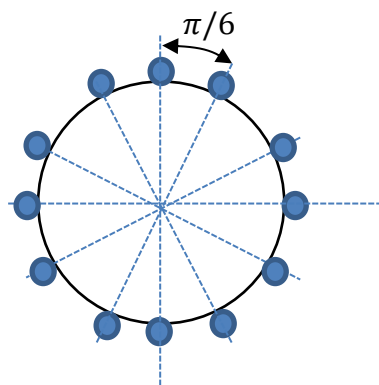
- Para una bobina diametral  $\varepsilon_{max} = \frac{4}{\pi} n'_2 (\sqrt{2}I)$
- Para tres bobinas diametrales con ejes magnéticos desfasados  $\frac{2\pi}{3}$  radianes la fm.m. resultante tiene un máximo  $\varepsilon_{maxr} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 (\sqrt{2}I) = \frac{3}{2} \varepsilon_{max}$ .
- Generalizando para q bobinas con ejes magnéticos desfasados espacialmente  $\frac{2\pi}{q}$  radianes recorridas por corrientes desfasadas en el tiempo  $\frac{2\pi}{q}$  se llega al siguiente resultado:

$$\varepsilon_{maxr} = \frac{q}{2} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 (\sqrt{2}I) = \frac{q}{2} \varepsilon_{max}$$

### Ejercicio.

Se tienen 6 bobinas diametrales conectadas en estrella recorridas por un sistema de corrientes exafásico.

Se abre una bobina. ¿Qué sucede?



$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2}I \cos(\omega t - \varphi) \\ i_2 = \sqrt{2}I \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{6}\right) \\ i_3 = \sqrt{2}I \cos\left(\omega t - \varphi - 2 \cdot \frac{2\pi}{6}\right) \\ i_4 = \sqrt{2}I \cos\left(\omega t - \varphi - 3 \cdot \frac{2\pi}{6}\right) \\ i_5 = \sqrt{2}I \cos\left(\omega t - \varphi - 4 \cdot \frac{2\pi}{6}\right) \\ i_6 = \sqrt{2}I \cos\left(\omega t - \varphi - 5 \cdot \frac{2\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Supongamos se abre la bobina 6 por lo cual la mencionada bobina no producirá f.m.m.

Se tendrá la f.m.m. producida por las restantes 5 bobinas.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2}I & \left[ \cos(\theta) \cos(\omega t - \varphi) + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{6}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{6}\right) \right. \\ & + \cos\left(\theta - 2 \cdot \frac{2\pi}{6}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - 2 \cdot \frac{2\pi}{6}\right) \\ & + \cos\left(\theta - 3 \cdot \frac{2\pi}{6}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - 3 \cdot \frac{2\pi}{6}\right) \\ & \left. + \cos\left(\theta - 4 \cdot \frac{2\pi}{6}\right) \cos\left(\omega t - \varphi - 4 \cdot \frac{2\pi}{6}\right) \right] \end{aligned}$$

Cada sumando da origen a dos campos que giran en sentido opuesto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \cdot \frac{1}{2} \left[ \cos(\omega t - \varphi + \theta) + \cos(\omega t - \varphi - \theta) + \cos\left(\omega t - \varphi + \theta - \frac{4\pi}{6}\right) \right. \\ \left. + \cos(\omega t - \varphi - \theta) + \cos\left(\omega t - \varphi + \theta - \frac{8\pi}{6}\right) + \cos(\omega t - \varphi - \theta) \right. \\ \left. + \cos(\omega t - \varphi + \theta - 2\pi) + \cos(\omega t - \varphi - \theta) \right. \\ \left. + \cos\left(\omega t - \varphi + \theta - \frac{16\pi}{6}\right) + \cos(\omega t - \varphi - \theta) \right] \end{aligned}$$

Agrupando:

$$\varepsilon_r = \frac{5}{2} \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \cdot \cos(\omega t - \varphi - \theta) + \frac{1}{2} \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \left[ \cos(\omega t - \varphi + \theta) + \cos\left(\omega t - \varphi + \theta - \frac{4\pi}{6}\right) \right. \\ \left. + \cos\left(\omega t - \varphi + \theta - \frac{8\pi}{6}\right) + \cos(\omega t - \varphi + \theta - 2\pi) + \cos\left(\omega t - \varphi + \theta - \frac{16\pi}{6}\right) \right]$$

Agrupando el segundo término:

$$\varepsilon_r = \frac{5}{2} \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \cdot \cos(\omega t - \varphi - \theta) + \frac{1}{2} \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \left[ \cos\left(\omega t - \varphi + \theta - \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

Se concluye que la fuerza magneto motriz resultantes está compuesta por dos campos que de distinta magnitud que giran en sentido opuesto.

### 9. Estudio de los armónicos espaciales 3, 5 y 7.

El campo producido por tres bobinas diametrales concentrada en un punto y desfasadas  $\frac{2\pi}{3}$  vale se expresa a continuación teniendo en cuenta el fundamental y los tres primeros armónicos espaciales del desarrollo.

$$\varepsilon_a = \frac{4}{\pi} n'_2 \cdot i_a(t) \left[ \cos \theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{5} \cos 5\theta - \frac{1}{7} \cos 7\theta + \dots \right]$$

$$\varepsilon_b = \frac{4}{\pi} n'_2 \cdot i_b(t) \left[ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{3} \cos 3\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \cos 5\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{7} \cos 7\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \right]$$

$$\varepsilon_c = \frac{4}{\pi} n'_2 \cdot i_c(t) \left[ \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{1}{3} \cos 3\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \cos 5\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{1}{7} \cos 7\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \dots \right]$$

Al alimentar las bobinas con un sistema trifásico de corrientes se vio que el fundamental produce un campo giratorio de amplitud  $\varepsilon_{maxr} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 (\sqrt{2} I)$ ; a continuación se estudiará el efecto de los armónicos 3, 5 y 7.

### Armónico 3.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{3r} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \left[ \cos 3\theta \cdot \cos(\omega t - \varphi) + \cos 3\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos 3\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \left[ \cos 3\theta \cdot \cos(\omega t - \varphi) + \cos(3\theta - 2\pi) \cdot \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos(3\theta - 4\pi) \cdot \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \cdot \cos 3\theta \cdot \left[ \cos(\omega t - \varphi) + \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \right] = 0\end{aligned}$$

La f.m.m. resultante debida a los terceros armónicos espaciales es nula.

### Armónico 5.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{5r} &= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \left[ \cos 5\theta \cdot \cos(\omega t - \varphi) + \cos 5\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos 5\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \left[ \cos(\omega t - \varphi + 5\theta) + \cos(\omega t - \varphi - 5\theta) \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\omega t - \varphi + 5\theta - 6 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \varphi - 5\theta + 4 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\omega t - \varphi + 5\theta - 6 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \varphi - 5\theta + 4 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) \right]\end{aligned}$$

Sumando por columnas, la segunda columna da cero mientras que la primera da  $3 \cdot \cos(\omega t - \varphi - 5\theta)$ ; entonces:

$$\varepsilon_{5r} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \cdot \cos(\omega t - \varphi + 5\theta)$$

El quinto armónico produce una f.m.m. de entrehierro que gira en sentido opuesto al que gira la f.m.m. producida por el primer armónico, su velocidad es 1/5 de la del primer armónico y su amplitud también.

### Armónico 7.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{7r} &= \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \left[ \cos 7\theta \cdot \cos(\omega t - \varphi) + \cos 7\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos 7\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \\ &= \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \left[ \cos(\omega t - \varphi + 7\theta) + \cos(\omega t - \varphi - 7\theta) \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\omega t - \varphi + 7\theta - 8 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \varphi - 7\theta + 6 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\omega t - \varphi + 7\theta - 8 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \varphi - 7\theta + 6 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) \right]\end{aligned}$$

Sumando por columnas, la primera columna da cero mientras que la segunda da  $3 \cdot \cos(\omega t - \varphi - 7\theta)$ ; entonces:

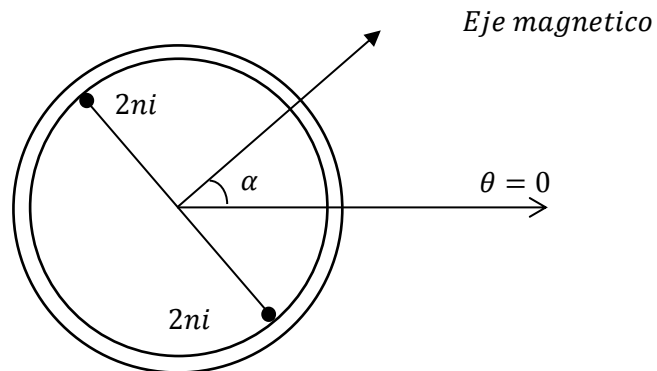
$$\varepsilon_{7r} = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi - 7\theta)$$

Se concluye que el séptimo armónico produce una f.m.m. que gira en el mismo sentido que la f.m.m. producida por el primer armónico, su velocidad es 1/7 de la f.m.m. producida por el primer armónico y su amplitud también.

### Conclusiones.

- Las terceras armónicas espaciales no producen f.m.m resultante por lo cual no van a producir par.
- Las 5 armónicas espaciales producen un campo inverso.
- Las 7 armónicas espaciales producen un campo directo.
- Es importante reducir el efecto de las armónicas 5 y 7 ; fundamentalmente la que produce campo inverso.
- Generalizando esto: las armónicas 3 no producen campo magnético resultante.
- De igual forma la armónica 11 produce campo inverso y el 13 directo.

10. Espira diametral en el rotor.



La f.m.m producida por esta bobina es:

$$\varepsilon(\theta, \alpha) = \frac{4}{\pi} \cdot N \cdot i(t) \cdot \cos(\theta - \alpha)$$

Observar que ahora el máximo se da en:  $\theta = \alpha$

Si ahora  $\alpha(t) = \omega t + \alpha_0$

Entonces se tiene un campo giratorio:

$$\varepsilon(\theta, t) = \frac{4}{\pi} \cdot N \cdot i \cdot \cos(\theta - \omega t + \alpha_0)$$

Además  $i(t) = i = cte$

Esta es otra forma de obtener un campo giratorio.

Siempre está implícito el no considerar los armónicos de mayor orden a 1.

## 11. Campo Giratorio Elíptico.

Supongamos que se tiene un sistema de corrientes desequilibrados por lo cual puede tener componentes d, i y h:

$$\begin{cases} i_a(t) = \sqrt{2}I_d \cos(\omega t - \varphi_d) + \sqrt{2}I_i \cos(\omega t - \varphi_i) + \sqrt{2}I_h \cos(\omega t + \varphi_h) \\ i_b(t) = \sqrt{2}I_d \cos\left(\omega t - \varphi_d - \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{2}I_i \cos\left(\omega t - \varphi_i + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{2}I_h \cos(\omega t + \varphi_h) \\ i_c(t) = \sqrt{2}I_d \cos\left(\omega t - \varphi_d - \frac{4\pi}{3}\right) + \sqrt{2}I_i \cos\left(\omega t - \varphi_i + \frac{4\pi}{3}\right) + \sqrt{2}I_h \cos(\omega t + \varphi_h) \end{cases}$$

F.m.m. resultante:  $\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c$

Puedo descomponerlo como:  $\varepsilon = \varepsilon_d + \varepsilon_i + \varepsilon_h$

Tenía que  $\varepsilon_h = 0$ .

$$\begin{cases} \varepsilon_d = \frac{4}{\pi} n' \sqrt{2} I_d \cos(\omega t - \theta - \varphi_d), & (\sqrt{2} I_d = I_{d_{M\acute{A}X}}) \\ \varepsilon_i = \frac{4}{\pi} n' \sqrt{2} I_i \cos(\omega t + \theta - \varphi_i), & (\sqrt{2} I_i = I_{i_{M\acute{A}X}}) \end{cases}$$

$$\varepsilon(\theta, t) = \varepsilon_d(\theta, t) + \varepsilon_i(\theta, t)$$

Supongo  $I_d > I_i$ , consideremos el lugar geométrico que describe el siguiente punto del entrehierro:  $\theta = 0$ .

- $\varepsilon_d$  describe una circunferencia que gira en un sentido y  $\varepsilon_i$  describe otra circunferencia que gira en sentido opuesto al de la primera.
- El radio de la circunferencia descrito por  $\varepsilon_i$  es menor.
- El efecto de superponer ambos lugares geométricos da una elipse. O sea el campo resultante describe una elipse cuando el sistema esta desequilibrado.
- Esto introduce vibraciones generalmente perjudiciales.

## 12. Bobinado monofásico.

Un bobinado monofásico genera una F.m.m. de la siguiente forma:

$$\varepsilon(\theta) = \varepsilon_{M\acute{A}X} \cdot \cos(\theta) = \frac{4}{\pi} n'_2 i_a \cos(\theta)$$

Si la corriente es:

$$i_a = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi)$$

Se tiene:

$$\varepsilon(\theta, t) = \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \cos(\theta) \cos(\omega t - \varphi)$$

Se tiene  $\cos(\theta)$  por un factor que varía con  $t$ . No es un campo giratorio. No hay desplazamiento en el espacio.

Si se descompone:

$$\varepsilon(\theta, t) = \frac{4}{\pi} n'_2 \sqrt{2} I \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \varphi + \theta) + \cos(\omega t - \varphi - \theta)]$$
$$\varepsilon_i = \cos(\omega t - \varphi + \theta)$$
$$\varepsilon_d = \cos(\omega t - \varphi - \theta)$$

Se puede interpretar como la superposición de dos campos giratorios, uno directo y uno inverso, de igual velocidad, frecuencia y amplitud.

Ejemplo: Máquinas monofásicas de inducción:

El estator generará un  $\varepsilon_d$  y  $\varepsilon_i$ , se alimenta de la red monofásica. Deberé tener entonces un rotor polifásico (si no, no gira), por ejemplo de jaula. Se “engancha” con  $\varepsilon_d$

El rotor polifásico crea un campo polifásico propio del rotor, directo.

Pero:

- Hay un  $\varepsilon_i$  superpuesto del estator, que molesta.
- La velocidad de rotación media es la misma que en campo “circular”, pero con pulsaciones “superpuestas”.