Conversión Electromecánica de Energía - III

Curso Máquinas Eléctricas

Bibliografía

- 1- Apuntes del curso de Máquinas Eléctricas (ediciones anteriores) https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/98578/mod_folder/content/0/Cap4_Conversi%C3%B3n%20ElectroMec%C3%A1nica%20de%20Energ%C3%ADa_Fundamentos.pdf?forcedownload=1

Repaso

- Si se tiene un convertidor lineal de dos excitaciones:

$$\lambda_1 = L_{11}.i_1 + L_{12}.i_2$$
$$\lambda_2 = L_{21}.i_1 + L_{22}.i_2$$

- El par en el convertidor resulta:

$$T = \frac{1}{2}[i]^t \frac{\partial[L(\theta)]}{\partial\theta}[i]$$

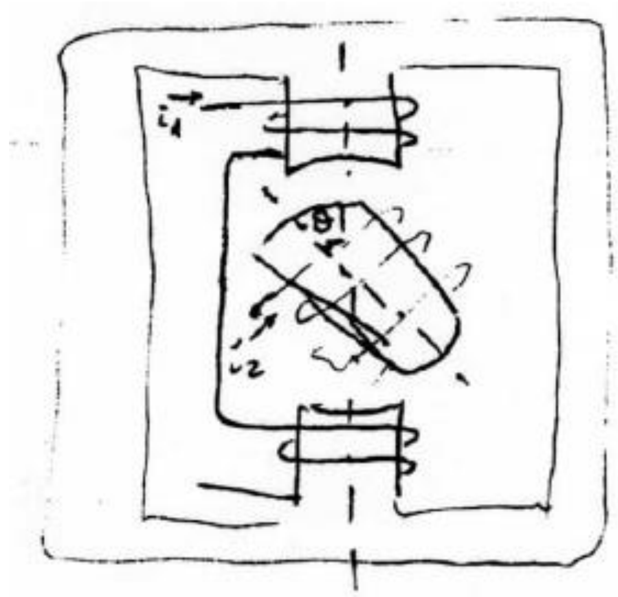
- Desarrollando la expresión anterior:

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta}\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Repaso

- Suponiendo un convertidor con inductancia propia y mutua variable con la posición:

$$L_{11} = L_{11\,0} + L_{11\,2}.\cos(2\theta)$$
$$L_{22} = L_{22\,0} + L_{22\,2}.\cos(2\theta)$$
$$L_{12} = M.\cos(\theta)$$



Si bien las inductancias son periódicas, se considera por simplicidad formas sinusoidales.

Repaso

- Evaluando la expresión del par en este caso:

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$T = -\underbrace{(L_{11\,2}\, {i_1}^2 + L_{22\,2}\, {i_2}^2).\, sen(2\theta)}_{\text{“par de reluctancia”}} - \underbrace{M i_1 i_2 .\, sen(\theta)}_{\text{“par de inductancia mutua”}}$$

Par de inductancia mutua y de reluctancia

- Par de inductancia mutua:
  - Se produce por variación de la inductancia mutua entre las dos bobinas al cambiar la posición del rotor.
  - Depende del producto de las dos corrientes de la máquina. Si una de las dos corrientes es nula, esta componente del par no existe.

- Par de reluctancia:
  - Se produce por variación de la inductancia propia de la bobina con la posición del rotor. Para que esto ocurra es indispensable que el circuito magnético visto por la bobina en cuestión varíe con la posición del rotor.
  - Esta componente del par depende del cuadrado de la corriente en la bobina, no se requiere de la corriente en la otra bobina (al no depender de interacción entre ambas).

Par de inductancia mutua y de reluctancia

- En función de lo anterior se puede afirmar que:
  - En máquinas de rotor y estator "liso" (entrehierro de ancho constante con la posición angular) solo se puede tener par de inductancia mutua.
  - En máquinas con rotor de polos salientes (o ranurado) puede haber, además del par de inductancia mutua, componente de par de reluctancia (debido a la corriente de estator).
  - En máquinas con estator ranurado existe el mismo efecto debido a la corriente rotórica.

Trabajo mecánico neto

- El par como función del ángulo permite calcular el trabajo mecánico neto en cada rotación:

$$dW_m = Td\theta$$

- Integrando en una rotación completa:

$$W_m = \int_0^{2\pi} dW_m = \int_0^{2\pi} T(\theta)d\theta$$

- Por ejemplo en la situación calculada:

$$W_m = -\int_0^{2\pi} (L_{11\,2}\,{i_1}^2 + L_{22\,2}\,{i_2}^2).sen(2\theta)d\theta\ - \int_0^{2\pi} Mi_1 i_2.sen(\theta)d\theta$$

Trabajo mecánico neto

$$W_m = -\int_0^{2\pi} \left(L_{11\,2}\, {i_1}^2 + L_{22\,2}\, {i_2}^2\right).sen(2\theta)d\theta \; - \int_0^{2\pi} M i_1 i_2.sen(\theta)d\theta$$

- Si se alimenta el convertidor con corriente contínua en estator y rotor, ambas integrales son nulas: <u>no se produce trabajo mecánico neto en cada revolución.</u>

- Si por ejemplo una de las dos corrientes se conmutara cada media revolución, el término de par de inductancia mutua deja de ser nulo, se tiene trabajo neto y por ende se podría construir una máquina rotativa en regimen.

- Tener en consideración que la corriente depende del tiempo en general, lo cual hace necesario para resolver esta integral tener la dependencia de la corriente con el ángulo.

Trabajo mecánico neto

- El cálculo anterior tiene como objetivo determinar el trabajo mecánico realizado por el convertidor sobre el rotor en una revolución.

- Si el objetivo es simular la dinámica del convertidor (analizar en función del tiempo su evolución) basta con disponer de la expresión $T = f(\theta)$ ya que el ángulo del rotor será una <u>variable de estado</u>.

Trabajo mecánico neto

- La dinámica de este convertidor puede representarse mediante cuatro variables de estado (VE): i_1, i_2, θ, ω.

- Se puede hallar la dinámica resolviendo un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de tipo $[\dot{X}]$=$[A]$ $[X]$+$[B]$

  - Donde $[X]$ es el vector de VE.
  - Se debe expresar las derivadas de cada VE en función del resto de las mismas.
  - $\dot{\theta} = \omega$
  - $\dot{\omega} = \frac{1}{J}.(\mathrm{T_m} - \mathrm{T_{resistente}})$
  - $[A]$ y $[B]$ pueden depender de t en general.

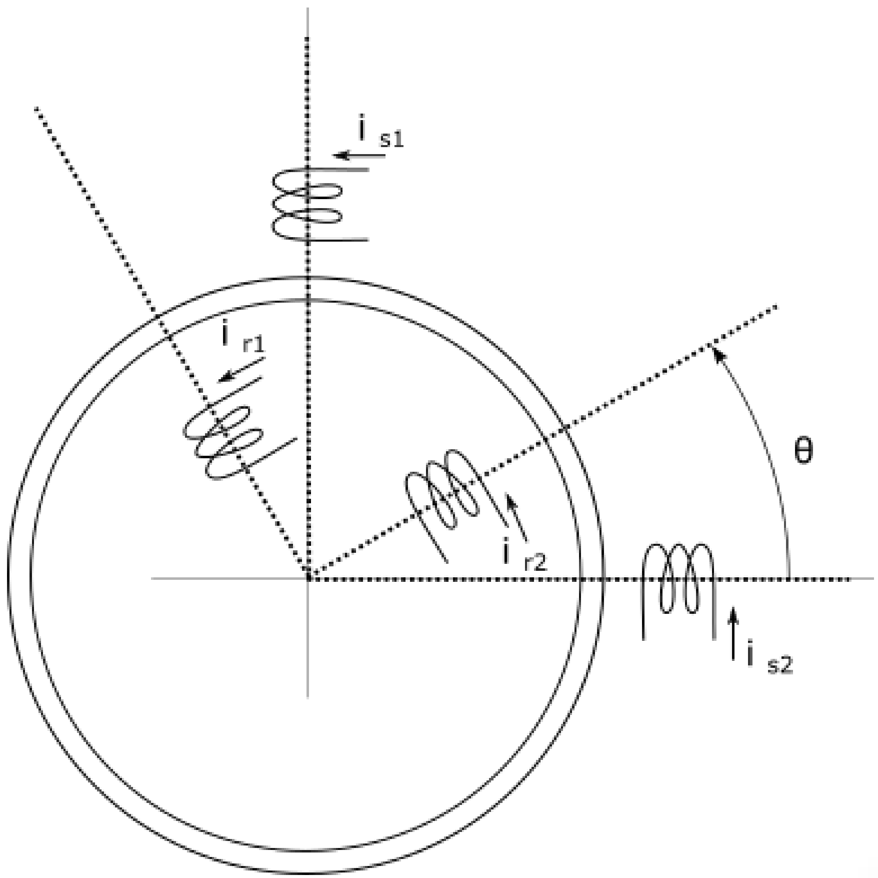
Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- Se analizará a continuación un convertidor electromecánico de energía rotativo de cuatro excitaciones (cuatro bobinados).

- Motivación: resulta relevante estudiar este convertidor porque permite representar en forma genérica a las máquinas trifásicas (sincrónica, asincrónica).

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- Dos bobinas dispuestas en cuadratura en el estator.
- Dos bobinas en cuadratura en el rotor, formando ángulo θ con el anterior.



Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- Se suponen rotor y estator lisos: inductancias propias de las cuatro bobinas no dependen del ángulo.

$$\begin{cases} L_{s1}=L_{s2}=L_s = cte. \\ L_{r1}=L_{r2}=L_r = cte. \end{cases}$$

- Inductancias mutuas entre bobinas del estator y entre bobinas del rotor son 0 porque están en cuadratura:

$$M_{s1s2}=M_{r1r2} = 0$$

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- Inductancias mutuas “cruzadas” (entre bobinas del estator y entre bobinas del rotor):

$$\begin{cases} M_{s1r1} = M_{sr}cos(\theta) \\ M_{s2r2} = M_{sr}cos\ (\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{s1r2} = M_{sr}sen(\theta) \\ M_{s2r1} = -M_{sr}sen(\theta) \end{cases}$$

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- Matriz de inductancias y relación flujo-corriente:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{s1} \\ \lambda_{s2} \\ \lambda_{r1} \\ \lambda_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M_{sr}\cos(\theta) & M_{sr}\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & L_s & -M_{sr}\mathrm{sen}(\theta) & M_{sr}\cos(\theta) \\ M_{sr}\cos(\theta) & -M_{sr}\mathrm{sen}(\theta) & L_r & 0 \\ M_{sr}\mathrm{sen}(\theta) & M_{sr}\cos(\theta) & 0 & L_r \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \end{bmatrix}$$

- Derivada de matriz de inductancias:

$$\frac{\partial[L(\theta)]}{\partial\theta} = M_{sr}. \begin{bmatrix} 0 & 0 & -sen(\theta) & cos(\theta) \\ 0 & 0 & -cos(\theta) & -sen(\theta) \\ -sen(\theta) & -cos(\theta) & 0 & 0 \\ cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- Recordando la definición de par:

$$T = \frac{1}{2}[i]^t \frac{\partial[L(\theta)]}{\partial\theta}[i]$$

- Operando se obtiene:

$$T = M_{sr}.[\cos(\theta)\,(i_{s1}i_{r2} - i_{s2}i_{r1}) - sen(\theta)(i_{s1}i_{r1} + i_{s2}i_{r2})]$$

- Con corrientes continuas: el par es función sinusoidal del ángulo, <u>valor medio nulo en un ciclo</u> (mismo resultado que en convertidor de dos excitaciones con DC en ambas bobinas).

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- ¿Qué sucede si se imponen corrientes sinusoidales?
- Se tiene un sistema "bifásico" (análogo a un sistema trifásico, donde las corrientes están desfasadas 120°) <u>con corrientes desfasadas 90° en el tiempo</u>.

$$\begin{cases} i_{s1} = \sqrt{2}.I_s\,.cos(\theta_s) \\ i_{s2} = \sqrt{2}.I_s\,.cos\left(\theta_s + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

- Donde se define: $\theta_s = \omega_s t + \alpha_s$
  - ω_s pulsación eléctrica de las corrientes estatóricas.
  - α_s define el origen de tiempo.

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- Análogo con el sistema de corrientes del rotor:

$$\begin{cases} i_{r1} = \sqrt{2}.I_r\,.cos(\theta_r) \\ i_{r2} = \sqrt{2}.I_r\,.cos\left(\theta_r + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

- Donde se define: $\theta_r = \omega_r t + \alpha_r$
  - ω_r pulsación eléctrica de las corrientes rotóricas.
  - α_r define el origen de tiempo.

- Notar que las frecuencias y desfasajes son todos arbitrarios.

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- El ángulo del rotor se puede expresar en función de la velocidad de rotación:

$$\theta = \Omega t + \theta_0$$

  - Ω velocidad de rotación del rotor.
  - θ_0 define el origen de tiempo.

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- Evaluando la expresión del par obtenida anteriormente con las corrientes propuestas y operando:

$$T = M_{sr}.[\cos(\theta)\,(i_{s1}i_{r2} - i_{s2}i_{r1}) - sen(\theta)(i_{s1}i_{r1} + i_{s2}i_{r2})]$$

$$T = \underbrace{2M_{sr}.I_r.I_s}_{T_{max}}\,sen(\theta_s - \theta_r - \theta)$$

- Pero dado que θ_s y θ_r son función del tiempo:

$$T(t) = T_{max}.sen[(\omega_s - \omega_r - \Omega)t + (\alpha_s - \alpha_r - \theta_0)]$$

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- Para evaluar el trabajo neto en un ciclo se integra el par:

$$W_m = \int_0^{2\pi} dW_m = \int_0^{2\pi} T(\theta)d\theta = \int_0^{T} T\big(\theta(t)\big).\frac{d\theta}{dt}.dt$$

- Asumiendo que el rotor gira a velocidad constante:

$$W_m = \Omega \int_0^{T} T(t).dt$$

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- La expresión del par obtenida:

$$T(t) = T_{max}.sen[(\omega_s - \omega_r - \Omega)t + (\alpha_s - \alpha_r - \theta_0)]$$

muestra que el par es oscilante en el tiempo.

- Lo ideal sería que el par no dependa del tiempo, para lo cual se impone:

$$\boxed{\omega_s - \omega_r - \Omega = 0}$$

- Esta es la llamada condición de sincronismo.

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- Cumpliéndose la condición de sincronismo, y anulando una de las constantes (eligiendo arbitrariamente el origen de tiempo para que se cumpla esto) el par resulta:

$$T(t) = T_{max}.sen(\alpha_s - \alpha_r)$$

- Notar que el par depende del desfasaje relativo entre las corrientes de estator y rotor.

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- ¿En qué condiciones se cumple la condición de sincronismo?

$$\omega_s - \omega_r = \Omega$$

- Asumiendo $\Omega \neq 0$:

- $\omega_r = 0$ (corriente contínua en el rotor), $\rightarrow \omega_s = \Omega$

La máquina gira a la misma velocidad angular de la corriente estatórica, es una <u>máquina sincrónica (MS)</u>.

A otras velocidades de rotación diferentes de ω_s no tiene par medio. La MS solo realiza conversión electromecánica de energía en una rotación si gira a velocidad de sincronismo.

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- $\omega_s = 0$ (corriente contínua en el estator), $\rightarrow \omega_r = -\Omega$

Que la pulsación de la corriente rotórica sea <0 implica que el campo debe ser inverso, o sea rotar en sentido contrario al giro del rotor. Entonces es un campo que está fijo visto desde el estator.

Ejemplos:

- MS invertida (con AC en el rotor y DC en estator).
- MCC. La forma de la corriente en el rotor es tal que el campo permanece estático (escobillas).

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- $\omega_s \neq 0, \omega_r \neq 0, \Omega \neq 0$: Máquina de inducción.

En este caso se define el deslizamiento como la diferencia de velocidad del rotor respecto a la pulsación del estator:

$$g = \frac{\omega_s - \Omega}{\omega_s}$$

Considerando la condición de sincronismo: $\omega_s - \omega_r = \Omega$

Se obtiene: $g\omega_s = \omega_r$ (pulsación del rotor)

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- $\omega_s \neq 0, \omega_r \neq 0$, $\Omega \neq 0$: Máquina de inducción.

En esta máquina se tiene AC tanto en estator como en rotor, de distinta frecuencia. En general la frecuencia estatórica es fija (la red) y el deslizamiento es pequeño por lo que la frecuencia rotórica también lo es.

Es una máquina de velocidad variable, aunque levemente.

Convertidor lineal de cuatro excitaciones

- Observación: En todos los casos ambos campos (el generado por el sistema de corrientes del estator y el del rotor) rotan a la misma velocidad.

- Mediante transformaciones de coordenadas se pueden reducir las máquinas trifásicas a este tipo de máquinas bifásicas por lo que el análisis presentado resume el principio de funcionamiento de las máquinas rotativas en general.