Notas para el curso de Álgebra Lineal II

Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Andrés Abella

6 de febrero de 2015

Introducción

Estas son las notas y ejercicios del curso de Álgebra Lineal II, en la forma en que fue dictado en 2011. Buena parte del material está tomado del libro *Linear Algebra*, de S. M. Friedberg, A. J. Insel y L. E. Spence, de la editorial Prentice Hall.

En el Capítulo 1 se estudian los operadores diagonalizables. Al final se incluye la descomposición espectral, preparando el terreno para el teorema espectral que se ve en el capítulo siguiente.

En el Capítulo 2 se estudian los espacios vectoriales con producto interno y sus operadores. Las demostraciones están hechas para espacios complejos y las correspondientes a los espacios reales se obtienen como un caso particular. Si el lector está interesado solo en los espacios reales, entonces puede olvidarse de las referencias a los complejos, y las definiciones y demostraciones funcionan igual. El único punto donde tendría problemas es en la prueba de que un operador real autoadjunto es diagonalizable sobre una base ortonormal, dado que la prueba en el caso complejo utiliza el "teorema fundamental del álgebra" que no es válido en los reales. Para solucionar esto se dan dos pruebas de ese teorema, una de las cuales no necesita números complejos.

En el Capítulo 3 se estudian las formas bilineales simétricas, poniendo énfasis en el caso real.

En el Capítulo 4 se estudia el polinomio minimal y la forma de Jordan. La forma de Jordan se ve primero para operadores nilpotentes y luego para el caso general. Este enfoque es un poco más largo que el estudio directo de la forma de Jordan, pero simplifica su estudio. Además tiene la virtud que la forma de Jordan para operadores nilpotentes se puede obtener con los coeficientes en cualquier cuerpo mientras que para el caso general se necesita imponer condiciones sobre el cuerpo o el polinomio característico.

En el Capítulo 5 se ven algunos temas necesarios para seguir estas notas y otros que las profundizan o extienden. Dependiendo de los objetivos del curso, algunas o todas de las secciones de este capítulo podrían omitirse, aunque es necesario conocer los resultados y definiciones de las secciones 5.1, 5.2 y 5.3.

En el Capítulo 6 están los ejercicios del curso. Notar que en el práctico 0 se repasa el concepto de suma directa y su relación con las proyecciones; tenerlo claro es básico para entender el teorema espectral.

Contenidos

Capítulo 1

Diagonalización

En este tema $\mathbb{k}$ es un cuerpo y V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial no nulo de dimensión finita n. Si $\mathcal{B}$ es una base de V, supondremos siempre que $\mathcal{B}$ es una *base ordenada* es decir una base en la cual hemos elegido un orden para sus elementos. Al subespacio de V generado por el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subseteq V$ lo denotaremos por $[v_1, v_2, \cdots, v_n]$.

A las transformaciones lineales de V en V les llamaremos también *operadores*. Al espacio de las transformaciones lineales de V en V lo denotaremos por $\mathcal{L}(V)$ y a la transformación lineal identidad por Id o Id_V. Al espacio de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en $\mathbb{k}$ lo denotaremos por $M_n(\mathbb{k})$ y a la matriz identidad por I o I_n.

1.1. Operadores diagonalizables

Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de V, escribiremos ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$ a la matriz asociada a T de la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{C}$ y $[T]_{\mathcal{B}}$ para ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$. Si $A \in M_n(\mathbb{k})$, escribiremos L_A a la transformación lineal de $\mathbb{k}^n$ en $\mathbb{k}^n$ definida por $L_A(v) = Av$, $\forall v \in \mathbb{k}^n$. Observar que si $\mathcal{C} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{k}^n$ y $A \in M_n(\mathbb{k})$, es

$$[L_A]_{\mathcal{C}} = A.$$

Si $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{k}^n$, el símbolo $[v_1|\cdots|v_n]$ denotará a la matriz cuadrada de orden n cuyas columnas son $v_1, \ldots, v_n$.

Definición 1.1.1. Diremos que dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{k})$ son *semejantes* y lo escribiremos $A \simeq B$, si existe una matriz invertible $Q \in M_n(\mathbb{k})$ tal que $A = QBQ^{-1}$.

Es un ejercicio el verificar que la relación de semejanza es de equivalencia en $M_n(\mathbb{k})$.

Proposición 1.1.2. *Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B}$ una base de V.*

1. *Si $\mathcal{B}'$ es otra base de V, entonces $[T]_{\mathcal{B}'} \simeq [T]_{\mathcal{B}}$. Explícitamente, $[T]_{\mathcal{B}'} = P\,[T]_{\mathcal{B}}\,P^{-1}$, siendo $P = {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$.*
2. *Si $A \in M_n(\mathbb{k})$ es tal que $A \simeq [T]_{\mathcal{B}}$, entonces existe una base $\mathcal{B}'$ de V tal que $A = [T]_{\mathcal{B}'}$.*

Dem.

1. Si $P = {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$, es $[T]_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'} = P\,[T]_{\mathcal{B}'}\,P^{-1}$.

2. Si $A = Q\,[T]_{\mathcal{B}}\,Q^{-1}$, siendo $Q^{-1} = (q_{ij})$ y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, definimos

$$w_j := \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\, v_i, \quad \forall j = 1 \dots, n.$$

Como la matriz Q^{-1} es invertible, el conjunto $\mathcal{B}'' = \{w_1, \dots, w_n\}$ es una base de V y ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}''} = Q^{-1}$. Luego

$$A = Q\,[T]_{\mathcal{B}}\,Q^{-1} = {}_{\mathcal{B}''}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}''} = [T]_{\mathcal{B}''}. \qquad \square$$

Corolario 1.1.3. *Dos matrices son semejantes si y solo si representan a la misma transformación lineal.*

Dem. Sean A y B en $M_n(\Bbbk)$ tales que $A \simeq B$. Si consideramos $T = L_A \in \mathcal{L}(\Bbbk^n)$, es $A = [T]_{\mathcal{C}}$ siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\Bbbk^n$. Luego $B \simeq [T]_{\mathcal{C}}$ y la parte 2 de la Proposición 1.1.2 implica que existe $\mathcal{B}$ base de $\Bbbk^n$ tal que $B = [T]_{\mathcal{B}}$. El recíproco es la parte 1 de la Proposición 1.1.2. $\square$

Recordar que una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se dice *diagonal* si $a_{ij} = 0,\ \forall i \neq j$.

Definición 1.1.4. Una matriz $A \in M_n(\Bbbk)$ es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal. Un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ es *diagonalizable* si existe una base $\mathcal{B}$ de V en la cual $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

Ejemplo 1.1.5. Sea T a la simetría axial del plano $\mathbb{R}^2$ respecto a una recta r que pasa por el origen. Sean $0 \neq u \in r$ y $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ tales que u y v son ortogonales. Luego $\mathcal{B} = \{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B}$ es $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Luego la simetría axial de eje r es diagonalizable.

Proposición 1.1.6. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$.*

1. *Si T es diagonalizable y $\mathcal{B}$ es una base cualquiera de V, entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonalizable.*

2. *Si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonalizable, entonces T es diagonalizable.*

Dem. Si T es diagonalizable, entonces existe una base $\mathcal{C}$ de V en la cual $[T]_{\mathcal{C}}$ es diagonal. Si $\mathcal{B}$ es una base cualquiera de V, la parte 1 de la Proposición 1.1.2 implica que $[T]_{\mathcal{B}}$ es semejante a $[T]_{\mathcal{C}}$, luego $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonalizable.

Si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonalizable, entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ es semejante a una matriz diagonal D. La parte 2 de la Proposición 1.1.2 implica que existe una base $\tilde{\mathcal{B}}$ de V tal que $[T]_{\tilde{\mathcal{B}}} = D$, luego T es diagonalizable. $\square$

Corolario 1.1.7. *Una matriz A es diagonalizable si y solo si la transformación lineal $L_A \in \mathcal{L}(\Bbbk^n)$ es diagonalizable.* $\square$

1.2. Valores y vectores propios

Definición 1.2.1. Dado $T \in \mathcal{L}(V)$, un escalar $\lambda \in \Bbbk$ se dice un *valor propio* de T si existe $0 \neq v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$, el vector v se dice que es un *vector propio* de T asociado a λ.

Dada $A \in M_n(\Bbbk)$, un escalar $\lambda \in \Bbbk$ se dice un *valor propio* de A si existe $0 \neq v \in \Bbbk^n$ tal que $Av = \lambda v$, el vector v se dice que es un *vector propio* de A asociado a λ. Es claro que los valores y vectores propios de la matriz A coinciden con los del operador L_A.

Ejemplo 1.2.2. En el caso en que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la simetría axial del ejemplo 1.1.5, nosotros vimos que existían vectores no nulos u y v tales que $T(u) = u$ y $T(v) = -v$; luego u y v son vectores propios de T con valores propios 1 y -1, respectivamente.

Notar que para la definición de valor y vector propio de $T \in \mathcal{L}(V)$ no se necesita la hipótesis $\dim_{\Bbbk} V < \infty$.

Ejemplo 1.2.3. Sea $C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ tiene derivada de todos los órdenes}\}$. Definimos $T \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}))$ por $T(f) = f'$. Entonces $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de T si y solo si existe $f \neq 0$ tal que $f' = \lambda f$, es decir si y solo si f es una solución no nula de la ecuación diferencial $x' = \lambda x$; luego todo $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de T y los vectores propios correspondientes a λ son las funciones de la forma $f(t) = c\, e^{\lambda t}$, $\forall c \neq 0$.

Proposición 1.2.4. *Un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable si y solo si existe una base $\mathcal{B}$ de V formada por vectores propios de T.*

Dem. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V formada por vectores propios de T con valores propios correspondientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, entonces es $T(v_i) = \lambda_i v_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$ y

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Recíprocamente, si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es como en (1.1), entonces es $T(v_i) = \lambda_i v_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$ y por lo tanto los elementos de $\mathcal{B}$ son vectores propios de T. □

Ejemplo 1.2.5. Considerar el caso de la simetría axial vista en los ejemplos 1.1.5 y 1.2.2.

Corolario 1.2.6. *Una matriz $A \in M_n(\Bbbk)$ es diagonalizable si y solo si existe una base $\mathcal{B}$ de $\Bbbk^n$ formada por vectores propios de A. En este caso, si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios correspondientes, es*

$$A = QDQ^{-1}, \quad \textit{siendo} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \textit{y} \quad Q = [v_1 | \cdots | v_n].$$

Dem. La primera afirmación se deduce de la proposición anterior aplicada al operador $L_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$. Para la segunda, si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\Bbbk^n$, es $A = [L_A]_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} \cdot [L_A]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = QDQ^{-1}$. □

Ejemplo 1.2.7. Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$. Consideremos $v_1 = (1, -1)$ y $v_2 = (3, 4)$. Observar que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y que $Av_1 = -2\, v_1$ y $Av_2 = 5\, v_2$, luego A es diagonalizable y

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}.$$

1.3. Polinomio característico

Proposición 1.3.1. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ son dos bases de V, entonces vale* $\det([T]_{\mathcal{B}}) = \det([T]_{\mathcal{C}})$.

Dem. Es $[T]_{\mathcal{B}} = Q^{-1}[T]_{\mathcal{C}} Q$, siendo $Q = {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$, luego

$$\det([T]_{\mathcal{B}}) = \det\left(Q^{-1}[T]_{\mathcal{C}} Q\right) = (\det Q)^{-1} \det([T]_{\mathcal{C}}) \det Q = \det([T]_{\mathcal{C}}).$$

□

Vista la proposición anterior tiene sentido la definición siguiente:

Definición 1.3.2. Si $T \in \mathcal{L}(V)$, definimos su *determinante* por $\det T := \det([T]_{\mathcal{B}})$ siendo $\mathcal{B}$ una base cualquiera de V.

Ejemplo 1.3.3. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ definida por $T(p(x)) = p'(x)$. Si $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det T = 0.$$

Proposición 1.3.4. *Sean $T, S \in \mathcal{L}(V)$.*

1. *Vale* $\det(T \circ S) = \det T \, \det S$.
2. *El operador T es invertible si y solo si* $\det T \neq 0$ *y en ese caso vale* $\det\left(T^{-1}\right) = (\det T)^{-1}$.
3. *Para todo λ en $\Bbbk$ y toda base $\mathcal{B}$ de V vale* $\det(T - \lambda \operatorname{Id}) = \det(A - \lambda I)$, *siendo* $A = [T]_{\mathcal{B}}$.

Dem. Sea $\mathcal{B}$ una base de V.

(1): $\det(T \circ S) = \det([T \circ S]_{\mathcal{B}}) = \det([T]_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}}) = \det([T]_{\mathcal{B}}) \det([S]_{\mathcal{B}}) = \det T \, \det S$.

(2): La primera afirmación se deduce de lo siguiente

$$\det T \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det([T]_{\mathcal{B}}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [T]_{\mathcal{B}} \text{ es invertible} \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ es invertible.}$$

Si T es invertible, es $T \circ T^{-1} = \operatorname{Id}$, luego $1 = \det(\operatorname{Id}) = \det\left(T \circ T^{-1}\right) = \det T \, \det\left(T^{-1}\right)$. Esto implica $\det\left(T^{-1}\right) = (\det T)^{-1}$.

(3): Si $\lambda \in \Bbbk$, es $\det(T - \lambda \operatorname{Id}) = \det([T - \lambda \operatorname{Id}]_{\mathcal{B}}) = \det([T]_{\mathcal{B}} - \lambda [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}}) = \det(A - \lambda I)$. $\square$

Definición 1.3.5. Si $A \in M_n(\Bbbk)$, definimos su *polinomio característico* por

$$\chi_A(t) := \det(A - t\, I) \in \Bbbk[t].$$

Si $T \in \mathcal{L}(V)$, definimos su *polinomio característico* por

$$\chi_T(t) := \det(T - t \operatorname{Id}) \in \Bbbk[t].$$

Observación 1.3.6. De la Proposición 1.3.4 se deduce que si $A \in M_n(\Bbbk)$, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B}$ es una base de V, entonces

$$\chi_T(t) = \chi_{[T]_{\mathcal{B}}}(t), \quad \chi_A(t) = \chi_{L_A}(t).$$

Notar que si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ es } \chi_A(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - t \end{vmatrix}.$$

Es un ejercicio del práctico el probar que vale la fórmula siguiente

$$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)\, t^{n-1} + \cdots + \det(A).$$

Luego $\operatorname{gr} \chi_A(t) = n$ si $A \in M_n(\Bbbk)$ y $\operatorname{gr} \chi_T(t) = n$ si $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\dim V = n$.

Ejemplo 1.3.7. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, es $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 4 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3$.

Ejemplo 1.3.8. Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ está definida por $T(p(x)) = p'(x)$, (ejemplo 1.3.3) entonces

$$\chi_T(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 2 \\ 0 & 0 & -t \end{vmatrix} = -t^3.$$

Proposición 1.3.9. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \Bbbk$. Son equivalentes:*

1. *El escalar λ es un valor propio de T.*
2. $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0\}$.
3. *El operador $T - \lambda \operatorname{Id}$ no es invertible.*
4. *El escalar λ es raíz de $\chi_T(t)$.*

Dem.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ es valor propio de } T &\Leftrightarrow \exists\, v \neq 0 : \; T(v) = \lambda\, v \\ &\Leftrightarrow \exists\, v \neq 0 : \; v \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow T - \lambda \operatorname{Id} : V \to V \text{ no es inyectiva} \\ &\Leftrightarrow T - \lambda \operatorname{Id} : V \to V \text{ no es invertible } (\dim_{\Bbbk} V < \infty) \\ &\Leftrightarrow \det(T - \lambda \operatorname{Id}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \chi_T(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

□

Observación 1.3.10. Notar que de la prueba anterior se deduce que si λ es un valor propio de $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces $v \in V$ es un vector propio de T correspondiente al valor propio λ si y solo si $v \neq 0$ y $v \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id})$.

Corolario 1.3.11. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\dim V = n$, entonces T tiene a lo más n valores propios.*

Dem. Los valores propios de T son las raíces de $\chi_T(t)$, como este polinomio tiene grado n, entonces tiene a lo más n raíces. □

Ejemplo 1.3.12. *Rotación.* La rotación de ángulo θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ es la transformación lineal $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $R_\theta(x, y) = (x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta,\; x \operatorname{sen}\theta - y \cos\theta)$. Es

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \chi_{R_\theta}(t) = t^2 - (2\cos\theta)t + 1.$$

El discriminante de la ecuación $t^2 - (2\cos\theta)t + 1 = 0$ es

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4\left(\cos^2\theta - 1\right) \leq 0.$$

Observar que $\Delta = 0$ si y solo si $\theta = 0, \pi$. Si $\theta = 0$, es $R_\theta = \operatorname{Id}$ y todos los vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$ son vectores propios de R_θ con valor propio 1. Si $\theta = \pi$, es $R_\theta = -\operatorname{Id}$ (simetría central de centro en el origen) y todos los vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$ son vectores propios de R_θ con valor propio -1. Si $\theta \neq 0, \pi$, es $\Delta < 0$ y R_θ no tiene valores propios por lo cual no es diagonalizable.

Ejemplo 1.3.13. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ del ejemplo 1.3.7. Es $\chi_A(t) = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)$, luego A tiene valores propios $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Observar que $\operatorname{Ker}(L_A - 3\operatorname{Id}) = [(1,2)]$ y $\operatorname{Ker}(L_A + \operatorname{Id}) = [(1,-2)]$. El conjunto $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,-2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de L_A, luego L_A es diagonalizable. En particular tenemos

$$[L_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [L_A]_{\mathcal{B}} = Q^{-1} A\, Q, \text{ siendo } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.3.14. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ definida por $T(p(x)) = p'(x)$ (Ejemplo 1.3.8). Es $\chi_T(t) = -t^3$, luego 0 es el único valor propio de T. Los vectores propios de T son los polinomios constantes no nulos, luego no existe una base de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por vectores propios de T y T no es diagonalizable.

Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, definimos el mapa *coordenadas* $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{k}^n$ por

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{si} \quad v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

En el curso de álgebra lineal I se probó que $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}$ es un isomorfismo lineal.

Proposición 1.3.15. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{B}$ una base de V, $A = [T]_{\mathcal{B}}$ y λ un valor propio de T. Entonces $v \in V$ es un vector propio de T correspondiente a λ si y solo si $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) \in \mathbb{k}^n$ es un vector propio de A correspondiente a λ.*

Dem. Utilizando que $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{k}^n$ es un isomorfismo, tenemos que dado $v \in V$, es $v \neq 0$ si y solo si $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) \neq 0$ y

$$T(v) = \lambda\, v \Leftrightarrow \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v)) = \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(\lambda\, v) \Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}} \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = \lambda \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) \Leftrightarrow A \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = \lambda \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v).$$

□

Ejemplo 1.3.16. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ definida por $T(p(x)) = p(x) + x\, p'(x) + p'(x)$. Considerando la base $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$, es

$$A = [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_T(t) = -(t-1)(t-2)(t-3),$$

luego los valores propios de T son 1, 2 y 3. Operando obtenemos:

$$\operatorname{Ker}(L_A - \operatorname{Id}) = [(1,0,0)], \quad \operatorname{Ker}(L_A - 2\operatorname{Id}) = [(1,1,0)], \quad \operatorname{Ker}(L_A - 3\operatorname{Id}) = [(1,2,1)].$$

Luego

$$\operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id}) = [1], \quad \operatorname{Ker}(T - 2\operatorname{Id}) = [1+x], \quad \operatorname{Ker}(T - 3\operatorname{Id}) = \left[1 + 2x + x^2\right].$$

El conjunto $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+2x+x^2\}$ es LI y por lo tanto es una base de $\mathbb{R}_2[x]$; en la base $\mathcal{B}$ obtenemos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.3.17. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores propios distintos de T y $v_1, \ldots, v_k$ vectores propios correspondientes. Entonces $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es LI.*

Dem. La prueba la haremos por inducción en k.

Si $k=1$, entonces $\{v_1\}$ es LI porque como v_1 es un vector propio, es $v_1 \neq 0$.

Supongamos que el resultado es cierto para $k-1 \geq 1$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores propios distintos de T y $v_1, \ldots, v_k$ vectores propios correspondientes. Sean $a_1, \ldots, a_k \in \Bbbk$ tales que

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1} + a_k v_k = 0. \tag{1.2}$$

Aplicando T en ambos lados de la ecuación (1.2) y teniendo en cuenta que $v_1, \ldots, v_k$ son vectores propios obtenemos

$$a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + a_k \lambda_k v_k = 0. \tag{1.3}$$

Multiplicando la ecuación (1.2) por $-\lambda_k$ obtenemos

$$-a_1 \lambda_k v_1 - \cdots - a_{k-1} \lambda_k v_{k-1} - a_k \lambda_k v_k = 0. \tag{1.4}$$

Sumando la ecuación (1.3) y la (1.4) obtenemos

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0.$$

Por la hipótesis de inducción el conjunto $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ es LI, luego

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) = \cdots = a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0.$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_k$ para todo $i = 1, \ldots, k-1$, es

$$a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0.$$

Substituyendo $a_1, \ldots, a_{k-1}$ por 0 en la ecuación (1.2) obtenemos $a_k v_k = 0$ y como $v_k \neq 0$, es $a_k = 0$; esto completa la prueba de que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es LI. $\square$

Corolario 1.3.18. *Si la dimensión de V es n y $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene n valores propios distintos, entonces T es diagonalizable.* $\square$

Ejemplo 1.3.19. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, es $\chi_A(t) = t(t-2)$. Luego A es diagonalizable y es semejante a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Observación 1.3.20. La matriz identidad y la matriz nula son ejemplos de matrices diagonales -luego diagonalizables- que tienen un solo valor propio, 1 y 0 respectivamente. Estos ejemplos nos muestran que el corolario anterior nos da una condición suficiente pero no necesaria para que un operador sea diagonalizable.

Definición 1.3.21. Un polinomio no constante $f(x) \in \Bbbk[x]$ se dice que *escinde* (en $\Bbbk$) si existen escalares $a, a_1, \ldots, a_n$ tales que $f(x) = a(x-a_1)\cdots(x-a_n)$ (pueden haber elementos repetidos en $a_1, \ldots, a_n$).

Observar que si $f(x)$ escinde, agrupando los términos repetidos queda $f(x) = a(x-b_1)^{n_1}\cdots(x-b_r)^{n_r}$, con $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$ y $n_i \in \mathbb{Z}^+$, $\forall i = 1, \ldots, r$.

Ejemplo 1.3.22.

1. $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ escinde en $\mathbb{Q}$.
2. $x^2 - 2$ no escinde en $\mathbb{Q}$.
3. $x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$ escinde en $\mathbb{R}$.
4. $x^2 + 1$ y $\left(x^2+1\right)(x-2)$ no escinden en $\mathbb{R}$.

5. $x^2+1=(x+i)(x-i)$ escinde en $\mathbb{C}$.

Observación 1.3.23. En $\mathbb{C}[x]$ todo polinomio no constante escinde, este es el llamado "teorema fundamental del álgebra" que será demostrado en cursos posteriores.

Proposición 1.3.24. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Si T es diagonalizable, entonces χ_T escinde.*

Dem. Sea $\mathcal{B}$ una base de V en la cual $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_T(t) = (a_1 - t)\cdots(a_n - t) = (-1)^n (t-a_1)\cdots(t-a_n).$$

□

Corolario 1.3.25. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Si χ_T no escinde, entonces T no es diagonalizable.* □

Ejemplo 1.3.26. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, es $\chi_A(t) = t^2+1$ que no escinde en $\mathbb{R}$, luego A no es diagonalizable en $M_2(\mathbb{R})$. Observar que si consideramos $A \in M_2(\mathbb{C})$, es $\chi_A(t) = t^2+1 = (t-i)(t+i)$ que escinde en $\mathbb{C}$, luego A es diagonalizable en $M_2(\mathbb{C})$ y es semejante a $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Observación 1.3.27. Que el polinomio característico escinda es una condición necesaria pero no suficiente para que un operador sea diagonalizable (ver más adelante el ejemplo 1.4.3).

1.4. Multiplicidad geométrica y algebraica

Definición 1.4.1. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y λ un valor propio de T.

1. El *subespacio propio* asociado al valor propio λ es $E_\lambda := \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id})$.
2. La *multiplicidad geométrica* de λ es $MG(\lambda) := \dim E_\lambda$.
3. La *multiplicidad algebraica* de λ es $MA(\lambda) := \text{máx}\left\{h : \ (t-\lambda)^h \text{ divide a } \chi_T(t)\right\}$.

Si $A \in M_n(\mathbb{k})$ y λ es un valor propio de A, entonces se define la multiplicidad algebraica y geométrica de λ como las correspondientes al operador $L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{k}^n)$.

Observación 1.4.2. 1. Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces 0 es un valor propio de T si y solo si $\operatorname{Ker}(T) \neq \{0\}$, en este caso es $E_0 = \operatorname{Ker}(T)$.

2. El subespacio propio asociado a un valor propio λ consiste en el vector nulo y los vectores propios correspondientes a λ.

3. Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y λ un valor propio de T es

$$MG(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(T - \lambda \operatorname{Id}) = \dim V - \operatorname{rango}(T - \lambda \operatorname{Id}).$$

   En particular si $A \in M_n(\mathbb{k})$ y λ es un valor propio de A, entonces $MG(\lambda) = n - \operatorname{rango}(A - \lambda I)$.

4. Si λ es un valor propio de T, es $MA(\lambda) = m$ si y solo si $\chi_T(t) = (t-\lambda)^m p(t)$ con $p(\lambda) \neq 0$.

Ejemplo 1.4.3. Un ejemplo de un operador que no es diagonalizable pero su polinomio característico escinde. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ definida por $T(p(x)) = p'(x)$. En el ejemplo 1.3.14 probamos que $\chi_T(t) = -t^3$, luego 0 es el único valor propio de T y $E_0 = \operatorname{Ker}(T) = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_2[x]$. Entonces $MA(0) = 3$ y $MG(0) = 1$. Observar que si fuese T diagonalizable, al ser 0 su único valor propio, la matriz en la cual se diagonalizaría sería la matriz nula, por lo cual T sería el operado nulo. Como $T \neq 0$, deducimos que no es diagonalizable.

Ejemplo 1.4.4. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Es $\chi_A(t) = (t-3)^2 \left(t^2+1\right)$, luego 3 es el único valor propio de A y $MA(3) = MG(3) = 2$.

Teorema 1.4.5. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y λ un valor propio de T, entonces*

$$1 \leq MG(\lambda) \leq MA(\lambda).$$

Dem. Como λ es un valor propio de T, es $E_\lambda \neq \{0\}$ y luego $MG(\lambda) \geq 1$.

Sean $\mathcal{B}_1$ una base de E_λ y $\mathcal{B}_2$ un conjunto LI de V disjunto con $\mathcal{B}_1$ tales que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V. Observar que $T(v) = \lambda v$ para todo $v \in \mathcal{B}_1$, luego la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B}$ es una matriz en bloques de la forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda I_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

siendo $m = \#\mathcal{B}_1 = \dim E_\lambda = MG(\lambda)$. Luego $\chi_T(t) = (\lambda - t)^m g(t)$, siendo $g(t) = \chi_C(t)$. Como puede ser $g(\lambda) = 0$, deducimos $MA(\lambda) \geq m = MG(\lambda)$. $\square$

Corolario 1.4.6. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y λ un valor propio de T, entonces $MA(\lambda) = 1$ implica $MG(\lambda) = 1$.* $\square$

Definición 1.4.7. Una familia de subespacios $W_1, \ldots, W_k$ de V se dice *independiente* si

$$w_1 + \cdots + w_k = 0, \text{ con } w_i \in W_i, \ \forall i = 1, \ldots, k \quad \Rightarrow \quad w_1 = \cdots = w_k = 0.$$

Si los subespacios $W_1, \ldots, W_k$ son independientes, entonces la suma $\sum_{i=1}^k W_i$ se dice *directa* y se escribe $\sum_{i=1}^k W_i = \bigoplus_{i=1}^k W_i$. En el curso de Álgebra Lineal I se prueba $\dim \bigoplus_{i=1}^k W_i = \sum_{i=1}^k \dim(W_i)$.

Proposición 1.4.8. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores propios distintos de T. Entonces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ son subespacios independientes.*

Dem. Sean $v_1 \in E_{\lambda_1}, \ldots, v_k \in E_{\lambda_k}$ tales que $v_1 + \cdots + v_k = 0$. Si existiese algún $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $v_i \neq 0$, eventualmente reordenando los subíndices existiría algún l, $1 \leq l \leq k$ tal que $v_i \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, l$ y $v_{l+1} = \cdots = v_k = 0$. Luego es

$$v_1 + \cdots + v_l = 0 \text{ con } v_i \neq 0, \ \forall i = 1, \ldots, l. \tag{1.5}$$

Si $i \in \{1, \ldots, l\}$ es $0 \neq v_i \in E_{\lambda_i}$, luego v_i es un vector propio de T correpondiente al valor propio λ_i. Entonces la Proposición 1.3.17 implica que $\{v_1, \ldots, v_l\}$ es LI y esto contradice (1.5). Luego es $v_1 = \cdots = v_k = 0$ y $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ son subespacios independientes. $\square$

El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes para que un operador sea diagonalizable.

Teorema 1.4.9. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Son equivalentes:*

1. *T es diagonalizable.*
2. *χ_T escinde y $MG(\lambda) = MA(\lambda)$ para todo valor propio λ de T.*
3. *$V = \bigoplus_{i=1}^h E_{\lambda_i}$, siendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ los valores propios de T.*

Dem. $1 \Rightarrow 2$: Como T es diagonalizable, nosotros ya sabemos que χ_T escinde y además podemos suponer que existe una base $\mathcal{B} = \left\{v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1, \ldots, v_1^h, \ldots, v_{n_h}^h\right\}$ de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_h & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_h \end{pmatrix}$$

siendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ los valores propios de T con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Es decir que el valor propio λ_i aparece exactamente n_i veces en $[T]_{\mathcal{B}}$ para todo $i = 1, \ldots, h$. Luego es

$$\chi_T(t) = (\lambda_1 - t)^{n_1} \cdots (\lambda_h - t)^{n_h} = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_h)^{n_h}.$$

Observar que por la forma de la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ es $\left\{v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i\right\} \subset E_{\lambda_i}$, luego $MG(\lambda_i) \geq n_i = MA(\lambda_i)$. Pero siempre vale $MG(\lambda_i) \leq MA(\lambda_i)$, luego $MG(\lambda_i) = MA(\lambda_i)$, para todo $i = 1, \ldots, h$.

$2 \Rightarrow 3$: Sea $\chi_T(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_h)^{n_h}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. La Proposición 1.4.8 nos dice que $\sum_{i=1}^h E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^h E_{\lambda_i}$, luego

$$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^h E_{\lambda_i} \right) = \sum_{i=1}^h \dim E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^h MG(\lambda_i) = \sum_{i=1}^h MA(\lambda_i) = \sum_{i=1}^h n_i = \operatorname{gr} \chi_T(t) = \dim V,$$

luego $\bigoplus_{i=1}^h E_{\lambda_i} = V$.

$3 \Rightarrow 1$: Si $\mathcal{B}_i$ es una base de E_{λ_i} para todo $i = 1, \ldots, h$, entonces $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_h$ es una base de V formada por vectores propios de T. $\square$

Observación 1.4.10. Notar que los ejemplos 1.4.3 y 1.4.4 muestran que, por separado, el que χ_T escinda o que $MG(\lambda) = MA(\lambda)$ para todo valor propio λ de T, no implican que T sea diagonalizable.

1.5. Descomposición espectral

Teorema 1.5.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Si el operador T es diagonalizable, entonces existen únicos escalares distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ y operadores no nulos $P_1, \ldots, P_h$ tales que*

1. *$P_i^2 = P_i$, $\forall i = 1, \ldots, h$ (los operadores P_i son proyecciones).*

2. $P_i \circ P_j = 0$ *si* $i \neq j$.

3. $\mathrm{Id} = P_1 + \cdots + P_h$.

4. $T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_h P_h$.

La descomposición $T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_h P_h$ *se llama la* descomposición espectral *de* T.

Dem. Existencia: Como T es diagonalizable, entonces es $V = \bigoplus_{i=1}^h E_{\lambda_i}$, siendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ los distintos valores propios de T. Para cada $i \in \{1, \ldots, h\}$, definimos $P_i : V \to V$ por $P_i(v) = v_i$ si $v = v_1 + \cdots + v_h$, con $v_i \in E_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, h$. Por las relaciones que conocemos entre proyecciones y sumas directas, sabemos que $P_1, \ldots, P_h$ verifican las condiciones 1, 2 y 3. Además como $E_{\lambda_i} \neq \{0\}$, es $P_i \neq 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

Si $v \in V$, es $v = P_1(v) + \cdots + P_h(v)$ con $P_i(v) \in E_{\lambda_i}$, $\forall i = 1, \ldots, h$, luego

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(P_1(v) + \cdots + P_h(v)\right) = T\left(P_1(v)\right) + \cdots + T\left(P_h(v)\right) = \lambda_1 P_1(v) + \cdots + \lambda_h P_h(v) \\ &= \left(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_h P_h\right)(v) \quad \Rightarrow \quad T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_h P_h. \end{aligned}$$

Unicidad: Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que existen escalares distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ y operadores no nulos $P_1, \ldots, P_h$ que verifican las condiciones 1, 2, 3 y 4. Probaremos que T es diagonalizable, que $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ son los distintos valores propios de T y que $P_1, \ldots, P_h$ son las proyecciones asociadas a la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^h E_{\lambda_i}$.

Sea $W_i = \mathrm{Im}(P_i)$, $i = 1, \ldots, h$. Las condiciones 1, 2 y 3 implican que $V = \bigoplus_{i=1}^h W_i$ y que si $v = w_1 + \cdots + w_h$, con $w_i \in W_i$, entonces $P_i(v) = w_i$, $\forall i = 1, \ldots h$. Además como $P_i \neq 0$, es $W_i \neq \{0\}$ $\forall i = 1, \ldots, h$.

Si $v \in W_i$, es $P_i(v) = v$, luego

$$T(v) = \left(\sum_{j=1}^h \lambda_j P_j\right)(v) = \sum_{j=1}^h \lambda_j P_j(v) = \sum_{j=1}^h \lambda_j P_j\left(P_i(v)\right) = \sum_{j=1}^h \lambda_j \left(P_j \circ P_i\right)(v) = \lambda_i P_i^2(v) = \lambda_i P_i(v) = \lambda_i v.$$

Como $W_i \neq \{0\}$, la relación anterior implica que λ_i es un valor propio de T y que $W_i \subset E_{\lambda_i}$, para todo $i = 1, \ldots, h$. Además tenemos

$$V = \bigoplus_{i=1}^h W_i = \sum_{i=1}^h W_i \subset \sum_{i=1}^h E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^h E_{\lambda_i} \subset V. \tag{1.6}$$

Luego $V = \bigoplus_{i=1}^h E_{\lambda_i}$. Esto implica que T es diagonalizable y que $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ son los distintos valores propios de T. Observar que tomando dimensiones en la relación (1.6) obtenemos $\dim V = \sum_{i=1}^h \dim W_i = \sum_{i=1}^h \dim E_{\lambda_i}$. Por otro lado de $W_i \subset E_{\lambda_i}$ se deduce que $\dim W_i \leq \dim E_{\lambda_i}$ para todo $i = 1, \ldots, h$. De estas dos últimas relaciones se tiene que $\dim W_i = \dim E_{\lambda_i}$ y como $W_i \subset E_{\lambda_i}$, es $W_i = E_{\lambda_i}$ para todo $i = 1, \ldots, h$. Esto implica que $P_1, \ldots, P_h$ son las proyecciones asociadas a la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^h E_{\lambda_i}$. □

Ejemplo 1.5.2. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ definida por $T(x, y, z) = (4x + z, 2x + 3y + 2z, x + 4z)$. Observar que es

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \chi_T(t) = -(t-3)^2(t-5).$$

Operando obtenemos

$$E_3 = [(1, 0, -1),\ (0, 1, 0)], \quad E_5 = [(1, 2, 1)].$$

Luego χ_T escinde, $MG(3) = MA(3) = 2$ y $MG(5) = MA(5) = 1$, esto implica que T es diagonalizable y que $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),\ (0,1,0),\ (1,2,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Escribiendo un vector geńerico de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de $\mathcal{B}$ obtenemos

$$(x,y,z) = \frac{x-z}{2}(1,0,-1) + (y-x-z)(0,1,0) + \frac{x+z}{2}(1,2,1).$$

Luego si definimos P_1 y P_2 en $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ mediante

$$\begin{aligned} P_1(x,y,z) &= \frac{x-z}{2}(1,0,-1) + (y-x-z)(0,1,0) = \left(\frac{x-z}{2}, y-x-z, \frac{z-x}{2}\right), \\ P_2(x,y,z) &= \frac{x+z}{2}(1,2,1) = \left(\frac{x+z}{2}, x+z, \frac{z+x}{2}\right) \end{aligned}$$

entonces la descomposición espectral de T es $T = 3P_1 + 5P_2$. Además sabemos que P_1 y P_2 verifican:

$$P_1 + P_2 = \mathrm{Id}, \quad P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2 \quad \text{y} \quad P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0.$$

Definición 1.5.3. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Si $p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0 \in \Bbbk[x]$, definimos

$$p(T) := a_n\, T^n + a_{n-1}\, T^{n-1} + \cdots + a_1\, T + a_0\, \mathrm{Id} \in \mathcal{L}(V),$$

siendo $T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Si definimos $T^0 = \mathrm{Id}$, podemos escribir $p(T) = \sum_{i=0}^n a_i\, T^i$ siendo $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i\, x^i$.

Observación 1.5.4. Es un ejercicio del práctico el probar que si $T = \sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i$ es la descomposición espectral de un operador diagonalizable y $q(x) \in \Bbbk[x]$, entonces $q\,(T) = \sum_{j=1}^k q(\lambda_j)\, P_j$.

Proposición 1.5.5. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador diagonalizable y consideremos su descomposición espectral $T = \sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i$. Entonces cada P_i es un polinomio en T.*

Dem. Dado que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son escalares distintos, en el Apéndice se prueba que existen polinomios $q_1(x), \ldots, q_k(x)$ llamados *polinomios de Lagrange* que verifican $q_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$, para todo $i, j = 1, \ldots, k$; luego

$$q_i(T) = \sum_{j=1}^k q_i(\lambda_j)\, P_j = \sum_{j=1}^k \delta_{ij}\, P_j = P_i \quad \Rightarrow \quad P_i = q_i(T),\ \forall i = 1, \ldots, k.$$

$\square$

Capítulo 2

Espacios con producto interno

En este tema el cuerpo de base $\mathbb{k}$ será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Diremos que un $\mathbb{k}$-espacio vectorial es un espacio *real* si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ y que es un espacio *complejo* si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

2.1. Espacios con producto interno

Definición 2.1.1. Sea V un espacio vectorial. Un *producto interno* en V es una función $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{k}$ que verifica:

1. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle,\ \forall u, v, w \in V$.
2. $\langle a\, u, v\rangle = a\langle u, v\rangle,\ \forall a \in \mathbb{k},\ u, v \in V$.
3. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle},\ \forall u, v \in V$.
4. $\langle v, v\rangle > 0,\ \forall v \neq 0$.

Un *espacio con producto interno* es un par $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ en el cual V es un espacio vectorial y $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{k}$ es un producto interno en V.

Observación 2.1.2. 1. Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, la condición (3) queda en $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle,\ \forall u, v \in V$.

2. Las dos primeras condiciones nos dicen que todo producto interno es lineal en la primera componente. Notar que si el espacio es real entonces también es lineal en la segunda componente, pero si el espacio es complejo esto deja de ser cierto.

Ejemplo 2.1.3. En $\mathbb{k}^n$ el producto interno *usual* es

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1\,\overline{y_1} + x_2\,\overline{y_2} + \cdots + x_n\,\overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{y_i}.$$

Cuando consideremos a $\mathbb{k}^n$ como espacio vectorial con producto interno nos estaremos refiriendo siempre al producto interno usual, a menos que explicitemos lo contrario. En el caso $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ al producto interno usual también se le suele llamar *producto escalar* y su fórmula es

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \cdots + x_n\,y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i.$$

Ejemplo 2.1.4. Si $A \in M_n(\mathbb{k})$, definimos $A^* := \overline{A}^t$, es decir si $A = (a_{ij})$ y $A^* = (b_{ij})$, es $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ es $A^* = A^t$). Definimos $\langle\ ,\ \rangle : M_n(\mathbb{k}) \times M_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$ por $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}\,(A\,B^*) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\overline{b_{ij}}$.

Ejemplo 2.1.5. Sea $C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\ :\ f \text{ es continua}\}$, definimos $\langle\ ,\ \rangle : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$ por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$.

Observación 2.1.6. Observar que si $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{k}$ es un producto interno en V y $r \in \mathbb{R}^+$, entonces $\langle\ ,\ \rangle_r : V \times V \to \mathbb{k}$ definido por $\langle u, v\rangle_r := r\langle u, v\rangle$ es otro producto interno en V.

De ahora en adelante $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interno.

Proposición 2.1.7. *Vale:*

1. $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$, *para todo* $u, v, w \in V$.
2. $\langle u, a\,v\rangle = \overline{a}\langle u, v\rangle$, *para todo* $u, v \in V$ *y* $a \in \mathbb{k}$.
3. $\langle v, v\rangle = 0$ *si y solo si* $v = 0$.
4. *Si* $\langle v, u\rangle = 0$ *para todo* $v \in V$, *entonces* $u = 0$.
5. *Si* $\langle v, u\rangle = \langle v, w\rangle$ *para todo* $v \in V$, *entonces* $u = w$.

Dem.

1. $\langle u, v + w\rangle = \overline{\langle v + w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.
2. $\langle u, a\,v\rangle = \overline{\langle a\,v, u\rangle} = \overline{a\,\langle v, u\rangle} = \overline{a}\,\overline{\langle v, u\rangle} = \overline{a}\,\langle u, v\rangle$.
3. Si $v \neq 0$, entonces es $\langle v, v\rangle > 0$ y por lo tanto $\langle v, v\rangle \neq 0$; luego $\langle v, v\rangle = 0$ implica $v = 0$. Recíprocamente, si $v = 0$ es $\langle 0, 0\rangle = \langle 0 + 0, 0\rangle = \langle 0, 0\rangle + \langle 0, 0\rangle \in \mathbb{k}$, luego $\langle v, v\rangle = \langle 0, 0\rangle = 0$.
4. Si $\langle v, u\rangle = 0$ para todo $v \in V$, entonces tomando $v = u$ es $\langle u, u\rangle = 0$ y luego $u = 0$.
5. Si $\langle v, u\rangle = \langle v, w\rangle$ para todo $v \in V$, entonces es $0 = \langle v, u\rangle - \langle v, w\rangle = \langle v, u - w\rangle$ para todo $v \in V$, luego es $u - w = 0$ y resulta $u = w$. □

Observación 2.1.8. De la condición 4 de la definición de producto interno y de la afirmación 3 de la proposición anterior se deduce lo siguiente:

$$\langle v, v\rangle \geq 0,\ \forall v \in V \text{ y } \langle v, v\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0.$$

Definición 2.1.9. Si $v \in V$, definimos su *norma* por $||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$. La norma define una función $||\ || : V \to \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1.10. Si $V = \mathbb{k}^n$ es $||\,(x_1, \ldots, x_n)\,|| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, escribimos $\operatorname{Re}(z) = a$ y $\operatorname{Im}(z) = b$. Observar que es $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$, $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$ y $z\overline{z} = |z|^2$.

Proposición 2.1.11. *Vale la siguiente igualdad:*

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\operatorname{Re}\left(\langle u, v\rangle\right) + ||v||^2, \quad \forall u, v \in V. \tag{2.1}$$

Dem.

$$\begin{aligned}||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = ||u||^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + ||v||^2 \\ &= ||u||^2 + 2\operatorname{Re}(\langle u,v\rangle) + ||v||^2. \quad \square\end{aligned}$$

Observar que si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, la relación (2.1) queda en

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u,v\rangle + ||v||^2, \quad \forall u,v \in V. \tag{2.2}$$

Proposición 2.1.12. *Vale:*

1. $||a\,v|| = |a|\,||v||$, *para todo* $v \in V$ *y* $a \in \mathbb{k}$.
2. $||v|| \geq 0$ *para todo* $v \in V$ *y* $||v|| = 0$ *si y solo si* $v = 0$.
3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz*: para todo* $u,v \in V$ *es* $|\langle u,v\rangle| \leq ||u||\,||v||$ *y vale el símbolo de igual si y solo si* $\{u,v\}$ *es LD.*
4. Desigualdad triangular*: para todo* $u,v \in V$ *es* $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Dem. Las dos primeras afirmaciones se deducen inmediatamente de la definición de norma. Para la desigualdad de Cauchy-Schwarz, si $v = 0$ es $|\langle u,v\rangle| = |\langle u,0\rangle| = 0 = ||u||\,||0|| = ||u||\,||v||$ y el conjunto $\{u,v\} = \{u,0\}$ es LD.
Supongamos hora que $v \neq 0$.

$$\begin{aligned}\left\|u - \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}v\right\|^2 &= ||u||^2 - 2\operatorname{Re}\left(\left\langle u, \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}v\right\rangle\right) + \left\|\frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}v\right\|^2 = ||u||^2 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{||v||^2}\langle u,v\rangle\right) + \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{||v||^4}||v||^2 \\ &= ||u||^2 - 2\frac{|\langle u,v\rangle|^2}{||v||^2} + \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{||v||^2} = ||u||^2 - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{||v||^2}.\end{aligned}$$

Luego

$$0 \leq \left\|u - \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}v\right\|^2 = ||u||^2 - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{||v||^2}. \tag{2.3}$$

De (2.3) se obtiene inmediatamente la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Si $\{u,v\}$ es LD, como $v \neq 0$ entonces existe $a \in \mathbb{k}$ tal que $u = a\,v$, luego

$$|\langle u,v\rangle| = |\langle a\,v,v\rangle| = |a\,\langle v,v\rangle| = |a|\,||v||^2 = |a|\,||v||\,||v|| = ||a\,v||\,||v|| = ||u||\,||v||.$$

Recíprocamente si $|\langle u,v\rangle| = ||u||\,||v||$ y $v \neq 0$ entonces (2.3) implica

$$\left\|u - \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}v\right\|^2 = 0,$$

luego $u = \langle u,v\rangle/||v||^2 v$.

La desigualdad triangular se deduce de:

$$\begin{aligned}||u+v||^2 &= ||u||^2 + 2\operatorname{Re}(\langle u,v\rangle) + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2|\langle u,v\rangle| + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2||u||\,||v|| + ||v||^2 \\ &= (||u|| + ||v||)^2.\end{aligned}$$

$\square$

Aplicación 2.1.1. *En el caso particular de* $V = \Bbbk^n$ *la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular nos dan las siguientes relaciones:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{y_i}\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Definición 2.1.13. Dos vectores u y v se dicen *ortogonales* si $\langle u, v\rangle = 0$, en esta situación escribimos $u \perp v$. Un subconjunto S de V se dice un conjunto *ortogonal* si para todo u, v en S, $u \neq v$, es $u \perp v$. Un subconjunto S de V se dice un conjunto *ortonormal* si es ortogonal y $||v|| = 1$ para todo v en S. Observar que si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces S es ortonormal si y solo si $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ para todo i, j. Una *base ortonormal* es una base que además es un conjunto ortonormal.

Ejemplo 2.1.14. La base canónica de $\Bbbk^n$ es una base ortonormal.

Ejemplo 2.1.15. El conjunto $S = \{(1,1,0),\ (1,-1,1),\ (-1,1,2)\}$ es un subconjunto ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que no es ortonormal.

Proposición 2.1.16. *Sea* $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *un conjunto ortogonal de vectores no nulos y* $u \in [v_1, \ldots, v_n]$.

$$\textit{Si } u = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i, \ \textit{entonces } a_i = \frac{\langle u, v_i\rangle}{||v_i||^2},\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Dem.

$$u = \sum_{j=1}^{n} a_j\, v_j \qquad \Rightarrow \qquad \langle u, v_i\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j\, v_j, v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \langle v_j, v_i\rangle = a_i ||v_i||^2 \qquad \Rightarrow \qquad a_i = \frac{\langle u, v_i\rangle}{||v_i||^2}.$$

□

Corolario 2.1.17. *Si* S *es un subconjunto ortogonal (finito o infinito) de* V *formado por vectores no nulos, entonces* S *es LI.*

Dem. Si $v_1, \ldots, v_n \in S$ y $a_1, \ldots, a_n \in \Bbbk$ son tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i = 0$ entonces $a_i = \frac{\langle 0, v_i\rangle}{||v_i||^2} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. □

Corolario 2.1.18. *Si* V *tiene dimensión finita y* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *es una base ortonormal de* V, *entonces*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i\rangle\, v_i, \quad \forall u \in V. \quad \square \tag{2.4}$$

Definición 2.1.19. Sea $\mathcal{B}$ un conjunto (posiblemente infinito) ortonormal en V. Si $w \in V$, llamamos *coeficientes de Fourier* de w respecto a $\mathcal{B}$ a los escalares $\langle w, v\rangle$ con $v \in \mathcal{B}$.

Teorema 2.1.20 (Método de Gram-Schmidt). *Sea $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto LI. Definimos $S' = \{w_1, \dots, w_n\}$ mediante:*

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{||w_1||^2} w_1 \\
w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{||w_1||^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{||w_2||^2} w_2 \\
&\ \vdots \\
w_n &= v_n - \frac{\langle v_n, w_1\rangle}{||w_1||^2} w_1 - \cdots - \frac{\langle v_n, w_{n-1}\rangle}{||w_{n-1}||^2} w_{n-1}.
\end{aligned}$$

Entonces S' es un conjunto ortogonal de vectores no nulos que verifica $[S'] = [S]$.

Dem. Demostraremos por inducción en m, siendo $S_m = \{v_1, \dots, v_m\}$ y $S'_m = \{w_1, \dots, w_m\}$ con $1 \leq m \leq n$, que si S_m es un conjunto LI, entonces S'_m es un conjunto ortogonal de vectores no nulos que verifica $[S'_m] = [S_m]$.

Para $m = 1$ es $S_1 = S'_1 = \{v_1\}$ y se cumple la tesis. Supongamos que vale para $m-1$. Si S_m es un conjunto LI, entonces S_{m-1} es un conjunto LI y se aplica la hipótesis de inducción, por lo cual S'_{m-1} es un conjunto ortogonal de vectores no nulos que verifica $\left[S'_{m-1}\right] = [S_{m-1}]$.
Consideremos w_m. Si fuese $w_m = 0$ entonces sería $v_m \in [S'_{m-1}] = [S_{m-1}]$ y $S_m = S_{m-1} \cup \{v_m\}$ resultaría LD contradiciendo que S es LI. Luego es $w_m \neq 0$.
El conjunto $S'_{m-1} = \{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ es ortogonal. Afirmamos que w_m es ortogonal a $w_1, \dots, w_{m-1}$:

$$\begin{aligned}
\langle w_m, w_i\rangle &= \langle v_m, w_i\rangle - \frac{\langle v_m, w_1\rangle}{||w_1||^2} \langle w_1, w_i\rangle - \cdots - \frac{\langle v_m, w_{m-1}\rangle}{||w_{m-1}||^2} \langle w_{m-1}, w_i\rangle \\
&= \langle v_m, w_i\rangle - \frac{\langle v_m, w_i\rangle}{||w_i||^2} \langle w_i, w_i\rangle = 0, \qquad \forall i = 1, \dots, m-1.
\end{aligned}$$

Luego $S'_m = \{w_1, \dots, w_{m-1}, w_m\}$ es ortogonal.
De $\left[S'_{m-1}\right] = [S_{m-1}]$ se deduce que $w_1, \dots, w_{m-1} \in [S_{m-1}] \subset [S_m]$. Por otro lado tenemos que $w_m \in [w_1, \dots, w_{m-1}, v_m] \subset S_m$, luego $[S'_m] \subset [S_m]$. Como S'_m es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, es LI y S_m también es LI, luego $\dim[S'_m] = \dim[S_m] = m$ lo cual termina la prueba de $[S'_m] = [S_m]$. ☐

Observación 2.1.21. Observar que si aplicamos el método de Gram-Schmidt a un conjunto LI de la forma $S = \{v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_n\}$ con $\{v_1, \dots, v_l\}$ un conjunto ortonormal entonces es $w_i = v_i$ para todo $i = 1, \dots, l$.

Corolario 2.1.22. *Si la dimensión de V es finita, entonces V admite una base ortonormal.*

Dem. Sea $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base cualquiera de V. Aplicando el método de Gram-Schmidt obtenemos una base ortogonal $\mathcal{C}' = \{u_1, \dots, u_n\}$. Si definimos $w_i = u_i/||u_i||$, $i = 1 \dots, n$, entonces $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ es una base ortonormal de V. ☐

Observación 2.1.23. Sea V de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Sean $v = \sum_{i=1}^n x_i\, v_i$ y $w = \sum_{i=1}^n y_i\, v_i$, entonces vale:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\, \overline{y_i}, \quad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

En efecto,

$$\langle v, w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i\, v_i, \sum_{j=1}^n y_j\, v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i\, \overline{y_j}\ \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i\, \overline{y_j}\, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i\, \overline{y_i}.$$

De la observación anterior y la fórmula (2.4) se obtiene:

Proposición 2.1.24 (Identidad de Parseval)**.** *Sea V de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V. Entonces*

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i\rangle\, \overline{\langle w, v_i\rangle}, \quad \forall v, w \in V.$$

En particular, $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i\rangle|^2$. □

Aplicando (2.1) se obtiene imediatamente el siguiente.

Proposición 2.1.25 (Teorema de Pitágoras)**.** *Si u y v son ortogonales, es* $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$. □

Corolario 2.1.26. *Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal en V, es* $||\sum_{i=1}^n v_i||^2 = \sum_{i=1}^n ||v_i||^2$.

Dem. Lo demostramos por inducción en n. Si $n = 2$ es el teorema de Pitágoras. Supongamos que vale para n y consideremos un conjunto ortogonal $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$. Como v_{n+1} es ortogonal a $v_1, \ldots, v_n$ entonces resulta ortogonal a $\sum_{i=1}^n v_i$. Luego aplicando Pitágoras y la hipótesis de inducción obtenemos:

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n+1} v_i\right|\right|^2 = \left|\left|\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) + v_{n+1}\right|\right|^2 = \left|\left|\sum_{i=1}^n v_i\right|\right|^2 + ||v_{n+1}||^2 = \sum_{i=1}^n ||v_i||^2 + ||v_{n+1}||^2 = \sum_{i=1}^{n+1} ||v_i||^2.$$

□

Definición 2.1.27. Si S es un subconjunto cualquiera de V, el conjunto

$$S^\perp := \{v \in V :\ v \perp w,\ \forall w \in S\}$$

se llama el *complemento ortogonal* de S.

Observación 2.1.28. Observar que $S^\perp$ es un subespacio de V (aunque S no lo sea) y que $S^\perp = [S]^\perp$. En particular, si W es un subespacio de V y S es un generador de W, entonces $v \in W^\perp$ si y solo si $v \perp w$ para todo w en S.

Ejemplo 2.1.29. $\{0\}^\perp = V$ y $V^\perp = \{0\}$.

Teorema 2.1.30. *Sea W un subespacio de dimensión finita de V, entonces $V = W \oplus W^\perp$.*

Dem. Sea $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base ortonormal de W, si $v \in V$ es

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, w_i\rangle\ w_i + v - \sum_{i=1}^n \langle v, w_i\rangle\ w_i.$$

Observar que $\langle v - \sum_{i=1}^n \langle v, w_i\rangle\ w_i, w_j\rangle = \langle v, w_j\rangle - \sum_{i=1}^n \langle v, w_i\rangle\ \langle w_i, w_j\rangle = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, luego por la observación anterior es $v - \sum_{i=1}^n \langle v, w_i\rangle\ w_i \in W^\perp$ y claramente $\sum_{i=1}^n \langle v, w_i\rangle\ w_i \in W$, de donde $V = W + W^\perp$. Por otro lado si $w \in W \cap W^\perp$ es $w \perp w$ y luego $w = 0$ lo cual prueba que $W \cap W^\perp = \{0\}$. □

Corolario 2.1.31. *Si la dimensión de V es finita y W es un subespacio de V es* $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$. □

Observación 2.1.32. Si la dimensión de V es finita y $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es un subconjunto ortonormal de V, entonces completando S a una base cualquiera de V y aplicándole a esta el método de Gram-Schmidt obtenemos:

1. Existen vectores $v_{m+1}, \ldots, v_n$ en V tales que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de V.

2. Si $W = [v_1, \ldots, v_m]$, entonces $W^\perp = [v_{m+1}, \ldots, v_n]$.

Definición 2.1.33. Sea W un subespacio de dimensión finita de V. Sean $P_W \in \mathcal{L}(V)$ y $P_{W^\perp} \in \mathcal{L}(V)$ las proyecciones asociadas a la descomposición $V = W \oplus W^\perp$, siendo $\operatorname{Im} P_W = W$ y $\operatorname{Im} P_{W^\perp} = W^\perp$. La proyección P_W se llama la *proyección ortogonal* sobre el espacio W. Observar que si $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base ortonormal de W, entonces

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle \; w_i, \quad P_{W^\perp}(v) = v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle \; w_i, \quad \forall v \in V.$$

Corolario 2.1.34. *Sea W un subespacio de dimensión finita de V, $P_W \in \mathcal{L}(V)$ la proyección ortogonal sobre W y $v \in V$. Entonces:*

1. $\forall w \in W$ es
$$||v - w|| \geq ||v - P_W(v)||. \tag{2.5}$$

2. Si $w_0 \in W$ verifica
$$||v - w|| \geq ||v - w_0||, \tag{2.6}$$
$\forall w \in W$, entonces $w_0 = P_W(v)$.

Dem. Observar que si $w \in W$, es $v - P_W(v) \in W^\perp$ y $P_W(v) - w \in W$, luego aplicando el teorema de Pitágoras resulta

$$||v - w||^2 = ||v - P_W(v) + P_W(v) - w||^2 = ||v - P_W(v)||^2 + ||P_W(v) - w||^2 \geq ||v - P_W(v)||^2 . \tag{2.7}$$

Esto implica la primera afirmación. Para la segunda afirmación, tomando $w = P_W(v)$ en (2.6) resulta $||v - P_W(v)|| \geq ||v - w_0||$. Por otro lado tomando $w = w_0$ en (2.5) resulta $||v - w_0|| \geq ||v - P_W(v)||$. Luego $||v - w_0|| = ||v - P_W(v)||$. Teniendo en cuenta esta última relación, tomando $w = w_0$ en (2.7) deducimos $||P_W(v) - w_0|| = 0$ y luego $P_W(v) = w_0$. □

Definición 2.1.35. 1. Sean v y w en V, definimos la *distancia* entre v y w por $d(v, w) = \|v - w\|$.

2. Sea S un subconjunto no vacío de V y $v \in V$. Se define la *distancia* de v a S por

$$d(v, S) := \text{ínf}\{d(v, w) : \; w \in S\}.$$

Observación 2.1.36. Notar que si escribimos la relación (2.5) en términos de distancias, es

$$d(v, w) \geq d\left(v, P_W(v)\right), \quad \forall w \in W.$$

Esto implica que $d\left(v, P_W(v)\right)$ es una cota inferior para $\{d(v, w) : \; w \in W\}$, pero como $P_W(v) \in W$, resulta

$$d\left(v, P_W(v)\right) = \text{mín}\{d(v, w) : \; w \in W\} = d(v, W).$$

La relación (2.6) nos dice que $P_W(v)$ es el único elemento de W que realiza la distancia de v a W.

Corolario 2.1.37 (Desigualdad de Bessel)**.** *Sea $\{v_1,\dots,v_n\}$ un subconjunto ortonormal de V, entonces*

$$||v||^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i\rangle|^2, \quad \forall v \in V.$$

Dem. Sea $W=[v_1,\dots,v_n]$. Aplicando el teorema de Pitágoras se deduce

$$||v||^2 = ||P_W(v)+v-P_W(v)||^2 = ||P_W(v)||^2 + ||v-P_W(v)||^2 \geq ||P_W(v)||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i\rangle|^2.$$

$\square$

2.2. Operadores en espacios con producto interno

En esta sección V será siempre un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita.

Teorema 2.2.1 (Riesz)**.** *Si $\alpha \in V^*$, entonces existe un único $w \in V$ tal que $\alpha(v)=\langle v,w\rangle$, para todo $v \in V$.*

Dem. Sea $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base ortonormal de V y $\alpha \in V^*$, consideremos $w=\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha(v_i)}\,v_i$.
Si $v \in V$, aplicando (2.4) es $v=\sum_{j=1}^{n}\langle v,v_j\rangle v_j$, luego

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n}\langle v,v_j\rangle v_j, w\right\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle v,v_j\rangle \left\langle v_j, \sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha(v_i)}\,v_i\right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle v,v_j\rangle\ \alpha(v_i)\,\langle v_j,v_i\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle v,v_j\rangle\alpha(v_i)\,\delta_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\langle v,v_j\rangle\alpha(v_j) = \alpha\left(\sum_{j=1}^{n}\langle v,v_j\rangle v_j\right) = \alpha(v), \qquad \forall j=1,\dots,n.\end{aligned}$$

Luego $\alpha(v)=\langle v,w\rangle$. Si otro vector $u \in V$ verifica $\alpha(v)=\langle v,u\rangle$, para todo $v \in V$, entonces

$$\langle v,w\rangle = \langle v,u\rangle, \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow \quad w=u. \quad \square$$

Teorema 2.2.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Existe un único $T^* \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\langle T(v),w\rangle = \langle v,T^*(w)\rangle$, $\forall v,w \in V$.*

Dem. Existencia: Sea $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base ortonormal de V, definimos $T^*: V \to V$ mediante

$$T^*(w) = \sum_{i=1}^{n}\langle w, T(v_i)\rangle\, v_i, \quad \forall w \in V. \tag{2.8}$$

Es inmediato el probar que T^* es lineal. Operando obtenemos

$$\begin{aligned}\langle v,T^*(w)\rangle &= \left\langle v, \sum_{i=1}^{n}\langle w,T(v_i)\rangle\, v_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\overline{\langle w,T(v_i)\rangle}\,\langle v,v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle T(v_i),w\rangle\,\langle v,v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle v,v_i\rangle\,\langle T(v_i),w\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n}\langle v,v_i\rangle\, T(v_i), w\right\rangle = \left\langle T\left(\sum_{i=1}^{n}\langle v,v_i\rangle\, v_i\right), w\right\rangle = \langle T(v),w\rangle, \qquad \forall v,w \in V.\end{aligned}$$

Observar que para la última igualdad aplicamos (2.4).

Unicidad: Si $S \in \mathcal{L}(V)$ verifica $\langle T(v), w\rangle = \langle v, S(w)\rangle$, $\forall v, w \in V$, entonces

$$\langle v, T^*(w)\rangle = \langle v, S(w)\rangle,\ \forall v, w \in V \quad \Rightarrow \quad T^*(w) = S(w),\ \forall w \in V \quad \Rightarrow \quad T^* = S. \quad \square$$

Observación 2.2.3. La unicidad en el teorema anterior implica que la definición de T^* no depende de la elección de la base ortonormal $\mathcal{B}$. Un comentario análogo vale para la definición de w en el teorema de Riesz.

Definición 2.2.4. El operador T^* se llama el *operador adjunto* de T.

Proposición 2.2.5. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces $\langle v, T(w)\rangle = \langle T^*(v), w\rangle$, $\forall v, w \in V$.*

Dem. $\langle v, T(w)\rangle = \overline{\langle T(w), v\rangle} = \overline{\langle w, T^*(v)\rangle} = \langle T^*(v), w\rangle$. $\square$

Proposición 2.2.6. *Sean $T, S \in \mathcal{L}(V)$ y $a \in \Bbbk$. Entonces:*

$$(aT + S)^* = \bar{a}T^* + S^*, \qquad (T \circ S)^* = S^* \circ T^*, \qquad (T^*)^* = T, \qquad \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}\,.$$

Dem.
Las pruebas se basan en la unicidad del operador adjunto.

Prueba de $(aT + S)^* = \bar{a}T^* + S^*$:

$$\begin{aligned}\langle (aT + S)(v), w\rangle &= \langle aT(v) + S(v), w\rangle = a\langle T(v), w\rangle + \langle S(v), w\rangle = a\langle v, T^*(w)\rangle + \langle v, S^*(w)\rangle \\ &= \langle v, (\bar{a}T^* + S^*)(w)\rangle \quad, \forall v, w \in V.\end{aligned}$$

Prueba de $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$:

$$\langle (T \circ S)(v), w\rangle = \langle T(S(v)), w\rangle = \langle S(v), T^*(w)\rangle = \langle v, S^*(T^*(w))\rangle = \langle v, (S^* \circ T^*)(w)\rangle \quad, \forall v, w \in V.$$

Prueba de $(T^*)^* = T$: por definición de $(T^*)^*$ es $\langle T^*(v), w\rangle = \langle v, (T^*)^*(w)\rangle$, $\forall v, w \in V$ y por la proposición anterior es $\langle T^*(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$, $\forall v, w \in V$.
Prueba de $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$: $\langle \mathrm{Id}(v), w\rangle = \langle v, w\rangle = \langle v, \mathrm{Id}(w)\rangle$, $\forall v, w \in V$. $\square$

Definición 2.2.7. Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, definimos $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ y $A^* = \overline{A}^t$; en particular si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es $A^* = A^t$.

La prueba de la siguiente proposición consiste simplemente en realizar el cálculo y queda como ejercicio.

Proposición 2.2.8. *Si $A, B \in M_n(\Bbbk)$ y $a \in \Bbbk$, entonces se cumple:*

$$(A + aB)^* = A^* + \bar{a}B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*, \quad (A^*)^* = A, \quad I^* = I. \quad \square$$

Proposición 2.2.9. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de V y $[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$. Entonces $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$.*

Dem. Si $[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$ es $T(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}v_j$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Como $\mathcal{B}$ es ortonormal, aplicando la fórmula (2.4) obtenemos $a_{ji} = \langle T(v_i), v_j\rangle$. $\square$

Proposición 2.2.10. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V entonces $[T^*]_{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}})^*$.*

Dem. Sea $[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$ y $[T^*]_{\mathcal{B}} = (c_{ij})$. Entonces

$$a_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle = \langle v_j, T^*(v_i)\rangle = \overline{\langle T^*(v_i), v_j\rangle} = \overline{c_{ji}} \quad \Rightarrow \quad [T^*]_{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}})^*. \quad \square$$

Corolario 2.2.11. *Sea $A \in M_n(\Bbbk)$, consideremos el producto interno usual en $\Bbbk^n$ y $L_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ definida por $L_A(v) = Av$, $\forall v \in \Bbbk^n$. Entonces $(L_A)^* = L_{A^*}$.*

Dem. La base canónica $\mathcal{B}$ es ortonormal respecto al producto interno usual de $\Bbbk^n$, luego $[(L_A)^*]_{\mathcal{B}} = ([L_A]_{\mathcal{B}})^* = A^* \Rightarrow (L_A)^* = L_{A^*}$. □

Ejemplo 2.2.12. Consideremos $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual, $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$ y $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(x, y) = (2ix + 3y, x - y)$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [T^*]_{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}})^* = \overline{\begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t} = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

luego $T^*(x, y) = (-2ix + y, 3x - y)$.

Definición 2.2.13. Decimos que un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ es *normal* si $T \circ T^* = T^* \circ T$.
Una matriz $A \in M_n(\Bbbk)$ se dice *normal* si $A\,A^* = A^*\,A$

Proposición 2.2.14. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V, entonces T es normal si y solo si $[T]_{\mathcal{B}}$ es normal.*

Dem. Como $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V es $[T^*]_{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}})^*$, luego $[T \circ T^*]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\,[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\,([T]_{\mathcal{B}})^*$ y análogamente $[T^* \circ T]_{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}})^*[T]_{\mathcal{B}}$. Entonces es claro que $T \circ T^* = T^* \circ T$ si y solo si $[T]_{\mathcal{B}}\,([T]_{\mathcal{B}})^* = ([T]_{\mathcal{B}})^*\,[T]_{\mathcal{B}}$. □

Definición 2.2.15.

1. Un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ es *autoadjunto* si $T^* = T$. Observar que T es autoadjunto si y solo si
$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle, \quad \forall u, v \in V.$$
2. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es *simétrica* si $A^t = A$.
3. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es *hermitiana* si $A^t = \overline{A}$ o, equivalentemente, si $\overline{A^t} = A$.

Notar que la condición $A^* = A$ equivale a decir que A es simétrica si $\Bbbk = \mathbb{R}$ o hermitiana si $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Proposición 2.2.16. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{B}$ base ortonormal de V y $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Entonces T es autoadjunto si y solo si A es simétrica en el caso $\Bbbk = \mathbb{R}$ o hermitiana en el caso $\Bbbk = \mathbb{C}$.*

Dem. Como $\mathcal{B}$ es una base ortonormal y $A = [T]_{\mathcal{B}}$, entonces $A^* = [T^*]_{\mathcal{B}}$. Luego $T = T^*$ si y solo si $A = A^*$. □

Observación 2.2.17. Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunto, entonces T es normal:

$$T \circ T^* = T \circ T = T^* \circ T.$$

El recíproco es falso como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.18. Sea $0 < \theta < \pi$ y $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Es $A\,A^* = A^*\,A = \mathrm{Id}$, luego A es normal. Por otro lado es $A^* = A^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \neq A$ y A no es simétrica.

Si consideramos en $\mathbb{R}^2$ el producto interno usual, $T = R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ y $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$, es $[T]_\mathcal{B} = A$, luego T es un ejemplo de un operador que es normal y no es autoadjunto.

Nuestro principal objetivo en esta sección es probar el siguiente:

Teorema 2.2.19. *Sea T un operador en un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Entonces T es diagonalizable en una base ortonormal si y solo si T es normal en el caso complejo o autoadjunto en el caso real.* $\square$

Empezamos probando el directo.

Teorema 2.2.20. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Si T es diagonalizable en una base ortonormal de V, entonces T es normal en el caso complejo o autoadjunto en el caso real.*

Dem. Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V tal que $[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, es

$$[T^*]_\mathcal{B} = ([T]_\mathcal{B})^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Si $\Bbbk = \mathbb{R}$ es $\overline{\lambda_i} = \lambda_i,\ \forall i = 1, \dots, n$, luego $[T^*]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B}$ y esto equivale a $T^* = T$.

En general es

$$[T^*]_\mathcal{B}\, [T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = [T]_\mathcal{B}\, [T^*]_\mathcal{B},$$

luego $[T^* \circ T]_\mathcal{B} = [T \circ T^*]_\mathcal{B}$ y por lo tanto $T^* \circ T = T \circ T^*$. $\square$

Para probar el recíproco empezamos estudiando algunas de la propiedades de los operadores normales, las cuales también tiene interés en sí mismas.

Proposición 2.2.21. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Si λ es un valor propio de T, entonces $\overline{\lambda}$ es un valor propio de T^**

Dem. Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V y $A = [T]_\mathcal{B}$. Sabemos que $[T^*]_\mathcal{B} = A^*$, luego si $\lambda \in \Bbbk$ es

$$\chi_{T^*}\left(\overline{\lambda}\right) = \chi_{A^*}(\overline{\lambda}) = \det\left(A^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}\right) = \det[(A - \lambda\,\mathrm{Id})^*] = \overline{\det(A - \lambda\,\mathrm{Id})} = \overline{\chi_A(\lambda)} = \overline{\chi_T(\lambda)}.$$

Entonces si λ es valor propio de T es $\chi_{T^*}(\overline{\lambda}) = \overline{\chi_T(\lambda)} = \overline{0} = 0$. $\square$

Proposición 2.2.22. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal. Entonces*

1. $||T(v)|| = ||T^*(v)||,\ \forall v \in V$.
2. $T - \lambda\,\mathrm{Id}$ *es normal,* $\forall \lambda \in \Bbbk$.
3. *Si v es vector propio de T correspondiente al valor propio λ, entonces v es vector propio de T^* correspondiente al valor propio $\overline{\lambda}$.*
4. *Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son valores propios de T con vectores propios correspondientes v_1 y v_2, entonces $v_1 \perp v_2$.*

Dem.

1. $||T(v)||^2 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^*(T(v))\rangle = \langle v, T(T^*(v))\rangle = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = ||T^*(v)||^2$.

2.
$$\begin{aligned}(T-\lambda\,\mathrm{Id})\circ(T-\lambda\,\mathrm{Id})^* &= (T-\lambda\,\mathrm{Id})\circ(T^*-\overline{\lambda}\,\mathrm{Id}) = T\circ T^* - \lambda\, T^* - \overline{\lambda}\, T + |\lambda|^2\,\mathrm{Id}\\ &= T^*\circ T - \lambda\, T^* - \overline{\lambda}\, T + |\lambda|^2\,\mathrm{Id} = (T-\lambda\,\mathrm{Id})^*\circ(T-\lambda\,\mathrm{Id}).\end{aligned}$$

3. Es $0 = ||T(v)-\lambda v|| = ||(T-\lambda\,\mathrm{Id})(v)|| = ||(T-\lambda\,\mathrm{Id})^*(v)||$, por 1) y 2). Luego $\left\|T^*(v)-\overline{\lambda}v\right\| = ||(T-\lambda\,\mathrm{Id})^*(v)|| = 0$ y es $T^*(v) = \overline{\lambda}\, v$.

4. $\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle = \langle T(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, T^*(v_2)\rangle = \langle v_1, \overline{\lambda_2} v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle$ y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ resulta $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. □

Lema 2.2.23. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $W \subset V$ un subespacio que es T-invariante y T^*-invariante. Si consideramos la restricción $T|_W \in \mathcal{L}(W)$, entonces $(T|_W)^* = T^*|_W$. Si además T es normal, entonces también lo es $T|_W$.*

Dem. Si $w_1, w_2 \in W$, es

$$\langle T|_W(w_1), w_2\rangle = \langle T(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, T^*(w_2)\rangle = \langle w_1, T^*|_W(w_2)\rangle,\ \forall w_1, w_2 \in W.$$

Luego $(T|_W)^* = T^*|_W$ y por lo tanto si T es normal, es

$$T|_W\circ(T|_W)^* = T|_W\circ T^*|_W = (T\circ T^*)|_W = (T^*\circ T)|_W = T^*|_W\circ T|_W = (T|_W)^*\circ T|_W. \quad \square$$

Para probar el recíproco del teorema 2.2.19 veremos primero el caso complejo y luego el real.

Teorema 2.2.24. *Si $\Bbbk = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ es normal, entonces T es diagonalizable en una base ortonormal*

Dem. La prueba es por inducción en $n = \dim V$.

Para $n = 1$: Si $0 \neq v \in V$ entonces $\left\{\frac{v}{||v||}\right\}$ es una base ortonormal de V formada por vectores propios de T (en este caso todo vector es vector propio, pues si $\dim V = 1$ toda transformación lineal de V en V es de la forma $T(v) = \lambda\, v$ para algún $\lambda \in \Bbbk$).

Sea ahora $n > 1$ y supongamos razonando inductivamente que si tenemos un operador normal en un espacio de dimensión $n-1$, entonces existe una base ortonormal del espacio formada por vectores propios del operador.

Como $\Bbbk = \mathbb{C}$ existe λ valor propio de T. Sea v un vector propio de T correspondiente a λ y consideremos $W := [v]^\perp = \{w \in V \mid \langle w, v\rangle = 0\}$. Sabemos que W es un subespacio de V y que $\dim W = n-1$. Sea $w \in W$,

$$\begin{aligned}\langle T(w), v\rangle &= \langle w, T^*(v)\rangle = \left\langle w, \overline{\lambda}\, v\right\rangle = \lambda\,\langle w, v\rangle = \lambda\, 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad T(w) \in W,\\ \langle T^*(w), v\rangle &= \langle w, T(v)\rangle = \langle w, \lambda\, v\rangle = \overline{\lambda}\,\langle w, v\rangle = \overline{\lambda}\, 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad T^*(w) \in W.\end{aligned}$$

Luego W es T y T^*-invariante, como T es normal, el lema anterior implica que $T|_W \in \mathcal{L}(W)$ es normal. Tenemos que $T|_W \in \mathcal{L}(W)$ normal y que $\dim W = n-1$ entonces por la hipótesis inductiva existe $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ base ortonormal de W formada por vectores propios de $T|_W$ (y por lo tanto vectores propios de T). Sea $v_n = \frac{v}{||v||}$, como $v_1, \ldots, v_{n-1} \in W = [v]^\perp$ y $v_n \in [v]$ es $v_i \perp v_n$, $\forall i = 1, \ldots, n-1$. Luego $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$ es una base ortonormal de V formada por vectores propios de T. □

Veremos dos pruebas del recíproco del teorema 2.2.19 para el caso real. La primera la deducimos del teorema 2.2.24 mientras que la segunda es una modificación de la prueba de este teorema. Esta segunda prueba es medio repetitiva porque en el fondo es la misma prueba del teorema 2.2.24, pero tiene la virtud de que puede adaptarse para no usar números complejos en la misma. Es un tema de gustos o intereses con cual prueba quedarse.

Primer prueba.

Proposición 2.2.25. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunto y $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de T, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Dem. Sea $v \in V$ un vector propio correspondiente a λ. Es

$$\lambda\, v = T(v) = T^*(v) = \overline{\lambda}\, v$$

ya que como T es autoadjunto, es normal. Entonces $\lambda\, v = \overline{\lambda}\, v$ y $v \neq 0$, de donde $\overline{\lambda} = \lambda$; luego $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Teorema 2.2.26. *Si $\Bbbk = \mathbb{R}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunto, entonces T es diagonalizable en una base ortonormal.*

Dem. Observar que como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, es $M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$. Luego si $A \in M_n(\mathbb{R})$, entonces el teorema 5.2.3 nos prueba que el rango de A es el mismo si consideramos A en $M_n(\mathbb{R})$ o en $M_n(\mathbb{C})$.

Sea $\mathcal{C}$ una base ortonormal de V. La matriz $A = [T]_{\mathcal{C}} \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica real. Pensando $A \in M_n(\mathbb{C})$, como A es simétrica, entonces es hermitiana y por lo tanto es normal. Esto implica que $L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ es normal, luego L_A es diagonalizable y por lo tanto A es diagonalizable en $M_n(\mathbb{C})$. Entonces $\chi_A(t)$ escinde en $\mathbb{C}$

$$\chi_A(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_k)^{n_k} \tag{2.9}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios distintos de A en $\mathbb{C}$ y $MG(\lambda_i) = MA(\lambda_i)$, $\forall i = 1, \ldots, k$, es decir

$$n - \operatorname{rango}(A - \lambda_i \operatorname{Id}) = n_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k. \tag{2.10}$$

Como $A \in M_n(\mathbb{C})$ es hermitiana, entonces $L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ es autoadjunta y entonces la proposición 2.2.25 implica que los valores propios de A (que son los de L_A) son reales. Luego $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Entonces la igualdad (2.9) nos dice que $\chi_A(t)$ escinde en $\mathbb{R}$ y la igualdad (2.10) nos prueba que $MG(\lambda_i) = MA(\lambda_i)$, $\forall i = 1, \ldots, k$ (recordar la observación al principio de la prueba); luego A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable.

Al ser $T \in \mathcal{L}(V)$ diagonalizable, sabemos que $V = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$, donde E_{λ_i} es el subespacio propio correspondiente a λ_i, $i = 1, \ldots, k$, siendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los valores propios distintos de T. Como T es autoadjunto, es normal, entonces la Proposición 2.2.22 implica que $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$ si $i \neq j$. Luego si $\mathcal{B}_i$ base ortonormal de E_{λ_i}, $i = 1, \ldots, k$, entonces $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ es una base ortonormal de V formada por vectores propios de T. $\square$

Segunda prueba. Empezamos enunciando un teorema que prueba que toda matriz simétrica real tiene algún valor propio real. La prueba se encuentra en el Apéndice (teorema 5.5.1).

Teorema 2.2.27. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces A tiene algún valor propio real.* $\square$

Corolario 2.2.28. *Si $\Bbbk = \mathbb{R}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunto, entonces T tiene algún valor propio (real).*

Dem. Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V y $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Como $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunto y $\Bbbk = \mathbb{R}$, entonces A es una matriz simétrica real y se aplica el teorema anterior[1]. $\square$

Teorema 2.2.29. *Si $\Bbbk = \mathbb{R}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunto, entonces T es diagonalizable en una base ortonormal.*

Dem. La prueba es por inducción en $n = \dim V$. Para $n = 1$ la prueba es trivial porque en ese caso todo vector es vector propio de T.

[1]Si no se quiere usar el teorema 5.5.1, entonces observar que pensando $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$, obtenemos que el polinomio característico $\chi_T = \chi_A$ tiene alguna raíz λ en $\mathbb{C}$ y aplicando la proposición 2.2.25 deducimos $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sea ahora $n > 1$ y supongamos razonando inductivamente que si tenemos un operador autoadjunto en un espacio de dimensión $n-1$, entonces existe una base ortonormal del espacio formada por vectores propios del operador. Como T es autoadjunto, entonces el corolario anterior implica que existe λ valor propio de T.

Sea v un vector propio de T correspondiente a λ y consideremos $W := [v]^\perp = \{w \in V \mid \langle w, v\rangle = 0\}$. Sabemos que W es un subespacio de V de dimensión $n-1$. Sea $w \in W$,

$$\langle T(w), v\rangle = \langle w, T(v)\rangle = \langle w, \lambda\, v\rangle = \lambda \langle w, v\rangle = \lambda\, 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad T(w) \in W.$$

Luego W es T-invariante y como T es autoadjunto se deduce que $T|_W \in \mathcal{L}(W)$ es autoadjunto. Aplicando la hipótesis inductiva a $T|_W$, deducimos que existe $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ base ortonormal de W formada por vectores propios de T. Sea $v_n = \frac{v}{||v||}$, como $v_1, \ldots, v_{n-1} \in W = [v]^\perp$ y $v_n \in [v]$ es $v_i \perp v_n$, $\forall i = 1, \ldots, n-1$. Luego $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$ es una base ortonormal de V formada por vectores propios de T. $\square$

Corolario 2.2.30. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces A es diagonalizable.* $\square$

2.3. El teorema espectral

En esta sección V será siempre un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita.

Recordar que si W es un subespacio de V, entonces P_W denota la proyección ortogonal sobre W.

Proposición 2.3.1. *1. Si $W \subset V$ es un subespacio, entonces P_W es un operador autoadjunto.*

2. Si $P \in \mathcal{L}(V)$ es una proyección que además es un operador autoadjunto, entonces P es la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Im} P$.

Dem. (1): Sean $v_1, v_2 \in V$ arbitrarios. Escribimos $v_1 = w_1 + w_1'$ y $v_2 = w_2 + w_2'$, donde $w_i \in W$, $w_i' \in W^\perp$, $i = 1, 2$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle P_W(v_1), v_2\rangle &= \langle w_1, w_2 + w_2'\rangle = \langle w_1, w_2\rangle + \langle w_1, w_2'\rangle = \langle w_1, w_2\rangle, \\ \langle v_1, P_W(v_2)\rangle &= \langle w_1 + w_1', w_2\rangle = \langle w_1, w_2\rangle + \langle w_1', w_2\rangle = \langle w_1, w_2\rangle. \end{aligned}$$

Luego $\langle P_W(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, P_W(v_2)\rangle$, $\forall v_1, v_2 \in V$ y esto equivale a $P_W^* = P_W$.

(2): La relación $P^2 = P$ implica $V = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$ y P es la proyección sobre $\operatorname{Im}(P)$ en la dirección de $\operatorname{Ker} P$. Sean $u \in \operatorname{Im} P$ (luego $P(u) = u$) y $v \in \operatorname{Ker} P$, es

$$\langle u, v\rangle = \langle P(u), v\rangle = \langle u, P(v)\rangle = \langle u, 0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker} P \subset (\operatorname{Im} P)^\perp.$$

De $V = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$ y $V = \operatorname{Im} P \oplus (\operatorname{Im} P)^\perp$ se deduce que $\dim \operatorname{Ker} P = \dim(\operatorname{Im} P)^\perp$, luego la relación $\operatorname{Ker} P \subset (\operatorname{Im} P)^\perp$ implica $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^\perp$. Luego $P = P_W$, siendo $W = \operatorname{Im} P$. $\square$

Definición 2.3.2. Sea $P \in \mathcal{L}(V)$, decimos P es una *proyección ortogonal* si $P^2 = P = P^*$. La proposición anterior prueba que toda proyección ortogonal es la proyección ortogonal sobre algún subespacio.

Teorema 2.3.3 (Teorema espectral)**.** *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ es un operador normal si $\Bbbk = \mathbb{C}$ o autoadjunto si $\Bbbk = \mathbb{R}$. Entonces existen únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Bbbk$ distintos y $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{L}(V)$ no nulos, tales que:*

1. *$P_i^2 = P_i = P_i^*$, $\forall i = 1, \ldots, k$ (las P_i son proyecciones ortogonales).*

2. *$P_i \circ P_j = 0$ si $i \neq j$.*

3. $\mathrm{Id} = \sum_{i=1}^k P_i$.

4. $T = \sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i$.

Dem. Como T es normal si $\Bbbk = \mathbb{C}$ o autoadjunto si $\Bbbk = \mathbb{R}$, entonces el teorema 2.2.19 implica que T es diagonalizable en una base ortonormal.

Al ser T diagonalizable, entonces el teorema 1.5.1 implica que existen únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Bbbk$ distintos y $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{L}(V)$ no nulos, tales que se verifican las propiedades 1,2,3,4, salvo eventualmente la condición $P_i = P_i^*$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

Afirmación: En este caso vale $E_{\lambda_i}^{\perp} = \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}$, $\forall i = 1, \ldots, k$. En efecto, como T es normal ($\Bbbk = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$), es

$$E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j},\ \forall j \neq i \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} E_{\lambda_j} \subset E_{\lambda_i}^{\perp},\ \forall j \neq i \quad \Rightarrow \quad \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j} \subset E_{\lambda_i}^{\perp} \\ dim(\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}) = dimV - dimE_{\lambda_i} = dimE_{\lambda_i}^{\perp} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad E_{\lambda_i}^{\perp} = \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}.$$

Pero entonces $V = E_{\lambda_i} \oplus \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j} = E_{\lambda_i} \oplus E_{\lambda_i}^{\perp}$, y P_i es la proyección asociada a esta descomposición, es decir $P_i = P_{E_{\lambda_i}}$. Luego P_i es una proyección ortogonal.

La unicidad de la descomposición se deduce inmediatamente de la unicidad en el caso clásico (el caso de V sin producto interno y T un operador diagonalizable en V). □

Teorema 2.3.4. *Sean $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{L}(V)$ que verifican:*

1. $P_i^2 = P_i = P_i^*$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

2. $P_i \circ P_j = 0$ *si* $i \neq j$.

3. $\mathrm{Id} = \sum_{i=1}^k P_i$.

Dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Bbbk$ arbitrarios, definimos $T \in \mathcal{L}(V)$ mediante $T = \sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i$. Entonces T es normal si $\Bbbk = \mathbb{C}$ o autoadjunto si $\Bbbk = \mathbb{R}$.

Dem. Como $T = \sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i$, es $T^* = \sum_{i=1}^k \overline{\lambda_i}\, P_i^* = \sum_{i=1}^k \overline{\lambda_i}\, P_i$.

- Si $\Bbbk = \mathbb{R}$ es $\overline{\lambda_i} = \lambda_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$, luego $T^* = T$.
- Si $\Bbbk = \mathbb{C}$ es

$$\begin{aligned} T \circ T^* &= \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^k \overline{\lambda_j}\, P_j\right) = \sum_{i,j=1}^k \lambda_i\, \overline{\lambda}_j\, P_i \circ P_j = \sum_{i=1}^k |\lambda_i|^2\, P_i^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^k \overline{\lambda}_i\, \lambda_j\, P_i \circ P_j = \left(\sum_{i=1}^k \overline{\lambda}_i\, P_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j\, P_j\right) = T^* \circ T. \end{aligned}$$

□

Observación 2.3.5. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ normal si $\Bbbk = \mathbb{C}$ o autoadjunto si $\Bbbk = \mathbb{R}$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los valores propios distintos de T y $P_1, \ldots, P_k$ las proyecciones ortogonales sobre los subespacios propios correspondientes. Recordemos que la descomposición

$$T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$$

se llama la descomposición espectral de T y $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ es el *espectro* de T. Recordar que en la Proposición 1.22 probamos que cada P_i es un polinomio en T.

Corolario 2.3.6. *Sea $\Bbbk = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces T es normal si y solo si $T^* = p(T)$ para algún $p \in \mathbb{C}[x]$.*

Dem. Si $T^* = p(T)$ con $p = \sum_{i=0}^n a_i\, x^i$, entonces

$$T^* \circ T = p(T) \circ T = \left(\sum_{i=0}^n a_i\, T^i\right) \circ T = \sum_{i=0}^n a_i\, T^{i+1} = T \circ \sum_{i=0}^n a_i\, T^i = T \circ p(T) = T \circ T^*,$$

luego T es normal.

Si T es normal y $T = \sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i$ es la descomposición espectral de T, entonces $T^* = \sum_{i=1}^k \overline{\lambda_i}\, P_i$. Como $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son distintos entre sí, la proposición 5.1.2 del Apéndice implica que existe $p \in \Bbbk[x]$ tal que $p(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Entonces

$$p(T) = p\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i\right) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^k p(\lambda_i)\, P_i = \sum_{i=1}^k \overline{\lambda_i}\, P_i = T^*,$$

luego $T^* = p(T)$.

$(*)$ Esta igualdad es un ejercicio del práctico 2. $\square$

Corolario 2.3.7. *Sea $\Bbbk = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal. Entonces T es autoadjunto si y solo si todos los valores propios de T son reales.*

Dem. Lo único que hay que probar es el recíproco. Sea $T = \sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i$ la descomposición espectral de T, entonces $T^* = \sum_{i=1}^k \overline{\lambda_i}\, P_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i = T$. $\square$

2.4. Isometrías

En esta sección V será siempre un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita.

Definición 2.4.1. Sean $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ y $(W, \langle\ ,\ \rangle_W)$ dos espacios con producto interno. Una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, W)$ se dice una *isometría* si verifica:

$$\langle T(u), T(v)\rangle_W = \langle u, v\rangle_V, \quad \forall u, v \in V.$$

Si $V = W$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ es una isometría, se dice que T es un *operador ortogonal* si $\Bbbk = \mathbb{R}$ o que es un *operador unitario* si $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Proposición 2.4.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es una isometría.*
2. *$T \circ T^* = \mathrm{Id} \quad \Leftrightarrow \quad T^* \circ T = \mathrm{Id} \quad \Leftrightarrow \quad T$ es invertible y $T^{-1} = T^*$.*

Dem. La última equivalencia es porque $T : V \to V$ y V tiene dimensión finita.
Observar que

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^*(T(v))\rangle = \langle u, (T^* \circ T)(v)\rangle, \quad \forall u, v \in V.$$

Luego T es una isometría si y solo si

$$\langle u, (T^* \circ T)(v)\rangle = \langle u, v\rangle, \quad \forall u, v \in V \quad \Leftrightarrow \quad (T^* \circ T)(v) = v, \quad \forall v \in V \quad \Leftrightarrow \quad T^* \circ T = \mathrm{Id}\,. \quad \square$$

Teorema 2.4.3. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es una isometría.*

2. *Para toda base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, $T(\mathcal{B})$ es una base ortonormal de V.*

3. *Existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que $T(\mathcal{B})$ es una base ortonormal de V.*

4. *$\|T(v)\| = \|v\|$, $\forall v \in V$.*

Dem. $(1 \Rightarrow 2)$: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V, es $\langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, luego $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es una base ortonormal de V.

$(2 \Rightarrow 3)$: Esto es obvio, dado que V siempre admite una base ortonormal.

$(3 \Rightarrow 4)$: Consideremos $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ una base ortonormal de V tal que $T(\mathcal{B}) = \{T(w_1), \dots, T(w_n)\}$ es también una base ortonormal de V.

Sea $v \in V$. Como $\mathcal{B}$ es una base de V, entonces existen únicos $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$ tales que $v = \sum_{i=1}^n a_i\, w_i$, luego $T(v) = \sum_{i=1}^n a_i\, T(w_i)$. Como $\mathcal{B}$ es una base ortonormal es $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$ y como $T(\mathcal{B})$ es una base ortonormal es $\|T(v)\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$, luego $\|T(v)\| = \|v\|$, $\forall v \in V$.

$(4 \Rightarrow 1)$: Esto se deduce de la linealidad de T y las fórmulas de polarización

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right), \ \Bbbk = \mathbb{R}; \quad \langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=3} i^k \left\|u + i^k v\right\|^2, \quad \Bbbk = \mathbb{C}; \quad \forall u, v \in V.$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\langle T(u), T(v)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|T(u)+T(v)\|^2 - \|T(u)-T(v)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|T(u+v)\|^2 - \|T(u-v)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) = \langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

El caso complejo es análogo. □

Observación 2.4.4.

1. Si T es una isometría, es $T \circ T^* = T^* \circ T = \mathrm{Id}$, luego T es normal.

2. Si T es una isometría y $\lambda \in \Bbbk$ es un valor propio de T, entonces $|\lambda| = 1$:

$$\text{Sea } 0 \neq v \in V : T(v) = \lambda\, v \quad \Rightarrow \quad \|v\| = \|T(v)\| = |\lambda|\,\|v\| \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

   En particular, si $\Bbbk = \mathbb{R}$ es $\lambda = \pm 1$.

3. Si T es una isometría, entonces $|\det(T)| = 1$:

$$1 = \det(\mathrm{Id}) = \det(T \circ T^*) = \det(T)\,\det(T^*) = \det(T)\,\overline{\det(T)} = |\det(T)|^2 \quad \Rightarrow \quad |\det(T)| = 1.$$

   En particular, si $\Bbbk = \mathbb{R}$ es $\det T = \pm 1$.

4. Sea T una isometría. Si $\Bbbk = \mathbb{C}$, como T es normal, entonces T es diagonalizable en una base ortonormal. Si $\Bbbk = \mathbb{R}$ esto no es cierto. Por ejemplo, la rotación de ángulo θ ($\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) es una isometría y no es diagonalizable.

Proposición 2.4.5. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$.*

1. *Si $\Bbbk = \mathbb{C}$ y T es normal, entonces T es una isometría si y solo si y $|\lambda| = 1$ para todo valor propio λ de T.*

2. *Si $\Bbbk=\mathbb{R}$ y T es autoadjunta, entonces T es una isometría si y solo si y $\lambda=\pm 1$ para todo valor propio λ de T.*

Dem. Lo único que hay que probar son los recíprocos.

1. Sea $T=\sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i$ la descomposición espectral de T, entonces

$$T\circ T^*=\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\, P_i\right)\circ\left(\sum_{j=1}^k \overline{\lambda_j}\, P_j\right)=\sum_{i,j=1}^k \lambda_i\,\overline{\lambda_j}\,P_i\circ P_j=\sum_{i=1}^k |\lambda_i|^2 P_i=\sum_{i=1}^k P_i=\mathrm{Id}\,.$$

   Luego $T\circ T^*=\mathrm{Id}$ y la proposición 2.4.2 implica que T es una isometría.

2. Vale la misma prueba del caso 1. □

Definición 2.4.6. Sea $\Bbbk$ un cuerpo cualquiera, una matriz $A\in M_n(\Bbbk)$ se dice *ortogonal* si

$$A^t A=A\,A^t=\mathrm{Id}\quad\Leftrightarrow\quad \exists A^{-1}=A^t.$$

Una matriz $A\in M_n(\mathbb{C})$ se dice *unitaria* si

$$A^* A=A\,A^*=\mathrm{Id}\quad\Leftrightarrow\quad \exists A^{-1}=A^*.$$

Observar que si a una matriz real la consideramos como matriz compleja, entonces es unitaria si y solo si es ortogonal.

Proposición 2.4.7. *Sea $T\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V y $A=[T]_{\mathcal{B}}$. Entonces T es una isometría si y solo si A es ortogonal en el caso real o unitaria en el caso complejo.*

Dem.

$$\begin{aligned} T\circ T^*=T^*\circ T=\mathrm{Id}\quad &\Leftrightarrow\quad [T\circ T^*]_{\mathcal{B}}=[T^*\circ T]_{\mathcal{B}}=[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\quad\Leftrightarrow\quad [T]_{\mathcal{B}}\,[T^*]_{\mathcal{B}}=[T^*]_{\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Id}\\ &\Leftrightarrow\quad [T]_{\mathcal{B}}\,([T]_{\mathcal{B}})^*=([T]_{\mathcal{B}})^*\,[T]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Id}\quad\Leftrightarrow\quad A\,A^*=A^*\,A=\mathrm{Id}\,.\end{aligned}$$

□

Proposición 2.4.8. *Sea $A\in M_n(\Bbbk)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La matriz A es unitaria en el caso de $\Bbbk=\mathbb{C}$ u ortogonal en el caso de $\Bbbk=\mathbb{R}$.*
2. *Las filas de A forman una base ortonormal de $\Bbbk^n$.*
3. *Las columnas de A forman una base ortonormal de $\Bbbk^n$.*

Dem.

Sea $A=[a_{ij}]=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=[A_1|\ldots|A_n]$, siendo $A_i=\begin{pmatrix} a_{1i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{pmatrix}$ y $A^*=(b_{ij})$, siendo $b_{ij}=\overline{a_{ji}}$.

Si $A^*A=(c_{ij})$, entonces

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^n b_{ik}\,a_{kj}=\sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}}\,a_{kj}=\langle A_j,A_i\rangle$$

Luego

$$A^*A=\mathrm{Id}\quad\Leftrightarrow\quad c_{ij}=\delta_{ij},\ \forall i,j\quad\Leftrightarrow\quad \langle A_j,A_i\rangle=\delta_{ij},\ \forall i,j\quad\Leftrightarrow\quad \langle A_i,A_j\rangle=\delta_{ij},\ \forall i,j.$$

Entonces $A^*A=\mathrm{Id}$ si y solo si $\{A_1,\ldots,A_n\}$ es una base ortonormal de $\Bbbk^n$.

Análogamente se prueba que $A\,A^* = \mathrm{Id}$ si y solo si las filas de A forman una base ortonormal de $\mathbb{k}^n$. $\square$

El vínculo entre bases ortonormales y matrices ortogonales o unitarias viene dado por la siguiente proposición. La prueba de la misma es un ejercicio del práctico 5.

Proposición 2.4.9. *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases de $\mathbb{k}^n$ y $A = {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}}$. Entonces:*

1. *Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases ortonormales, entonces A es unitaria si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, u ortogonal si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.*
2. *Si $\mathcal{B}$ o $\mathcal{C}$ es una base ortonormal y A es unitaria si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ u ortogonal si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, entonces la otra base es también ortonormal.* $\square$

Definición 2.4.10. 1. Dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ son *unitariamente equivalentes* si existe una matriz unitaria $Q \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = QBQ^*$.

2. Dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ son *ortogonalmente equivalentes* si existe una matriz ortogonal $Q \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = QBQ^t$.

Ejercicio 2.4.11. Probar que la relación "ser unitariamente equivalentes" es de equivalencia en $M_n(\mathbb{C})$ y que "ser ortogonalmente equivalentes" lo es en $M_n(\mathbb{R})$.

Teorema 2.4.12. *1. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es normal si y solo si A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal.*

2. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica si y solo si A es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal.

Dem.

1. ($\Rightarrow$): Consideremos $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Como A es normal, entonces L_A es normal, luego existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ tal que $[L_A]_{\mathcal{B}} = D$, siendo D una matriz diagonal.
   Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{C}^n$ y $Q = {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$. Es
   $$A = [L_A]_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}\, [L_A]_{\mathcal{B}}\, {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = QDQ^{-1}.$$
   Como C y $\mathcal{B}$ son bases ortonormales de $\mathbb{C}^n$ y $Q = {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$, entonces Q es unitaria y $A = QDQ^*$.

   ($\Leftarrow$): Sean Q y D en $M_n(\mathbb{C})$, con Q unitaria y D diagonal tales que $A = QDQ^*$. Observar que $A^* = (QDQ^*)^* = Q^{**}\, D^*\, Q^* = Q\overline{D}Q^*$, luego
   $$A\,A^* = (QDQ^*)\left(Q\overline{D}Q^*\right) = QD\overline{D}Q^* \quad \text{y} \quad A^*A = \left(Q\overline{D}Q^*\right)(QDQ^*) = Q\overline{D}DQ^*.$$
   Como $D\overline{D} = \overline{D}D$, es $AA^* = A^*A$.
2. ($\Rightarrow$): Es la misma idea que en 1. Como A es simétrica, $L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es autoadjunta y luego diagonalizable en una base ortonormal. El resto sigue igual.

   ($\Leftarrow$): Sea $A = QDQ^t$, con Q ortogonal y D diagonal. Es $A^t = \left(QDQ^t\right)^t = Q^{tt}D^tQ^t = QDQ^t = A$, luego $A^t = A$. $\square$

Ejemplo 2.4.13. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Como A es una matriz simétrica real, sabemos que es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal. Vamos a hallar una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que $A = QDQ^t$.

Es un ejercicio el verificar que $\chi_A(t) = -(t-2)^2(t-8)$ y que los subespacios propios son

$$E_2 = [(-1,1,0),(-1,0,1)], \quad E_8 = [(1,1,1)].$$

Aplicando Gram-Schmidt a la base $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ de E_2 obtenemos

$$E_2 = [(-1/2,1,-1/2),(-1,0,1)] = [(-1,2,-1),(-1,0,1)]\,.$$

Luego $\{(-1,2,-1),(-1,0,1),(1,1,1)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, normalizando obtenemos

$$\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

que es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

Entonces si $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, es $A = QDQ^t$; es decir

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Capítulo 3

Formas bilineales simétricas

3.1. Formas multilineales

Sea $\Bbbk$ un cuerpo arbitrario, V un $\Bbbk$-espacio vectorial y n un entero positivo. Una *n-forma multilineal* en V es una función $\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \to \Bbbk$ que verifica:

$$\alpha\,(v_1, \ldots, a\,v_i + w_i, \ldots, v_n) = a\,\alpha\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \alpha\,(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_n)$$

para todo $a \in \Bbbk$, $v_1, \ldots, v_n, w_i \in V$ y todo $i = 1, \ldots, n$.

Observar que una forma multilineal es una función que es lineal en cada variable, en particular una 1-forma multilineal es simplemente un elemento del espacio dual V^*.

Es un ejercicio el verificar que el conjunto de las n-formas multilineales es un subespacio del espacio de las funciones con dominio $V \times \cdots \times V$ y codominio $\Bbbk$, en el cual las operaciones se definen punto a punto:

$$(f+g)(v_1, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_n) + g(v_1, \ldots, v_n), \quad (a\,f)(v_1, \ldots, v_n) = a\,f(v_1, \ldots, v_n).$$

Luego el conjunto de las n-formas multilineales es un espacio vectorial.

3.2. Formas bilineales

Una *forma bilineal* es una 2-forma multilineal, es decir una función $\varphi : V \times V \to \Bbbk$ que verifica

$$\begin{aligned} \varphi(a\,u + v, w) &= a\,\varphi(u, w) + \varphi(v, w), \\ \varphi(w, a\,u + v) &= a\,\varphi(w, u) + \varphi(w, v), \end{aligned}$$

para todo $a \in \Bbbk$, $u, v, w \in V$. Denotaremos por $\operatorname{Bil}(V)$ al espacio vectorial de las formas bilineales en V.

Ejemplos de formas bilineales son los siguientes:

Ejemplo 3.2.1. Un producto interno real $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2.2. La función $\varphi : \Bbbk^2 \times \Bbbk^2 \to \Bbbk$ definida por $\varphi\big(\,(x, y)\,, (x', y')\,\big) = 2\,x\,x' + 3\,x\,y' + 4\,y\,x' - y\,y'$.

Ejemplo 3.2.3. Este ejemplo generaliza el anterior. Si $A \in M_n(\Bbbk)$, definimos $\beta_A : \Bbbk^n \times \Bbbk^n \to \Bbbk$ por $\beta_A(x,y) = x^t\, A\, y$, siendo

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Explícitamente

$$\beta_A\big((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\big) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j, \tag{3.1}$$

para todo $(x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n) \in \Bbbk^n$.

Proposición 3.2.4. *Sean $\varphi : V \times V \to \Bbbk$ una forma bilineal, W un espacio vectorial y $T, S : W \to V$ dos transformaciones lineales. Si definimos $\varphi' : W \times W \to \Bbbk$ mediante*

$$\varphi'(w_1,w_2) = \varphi(T(w_1),S(w_2)), \quad \forall w_1,w_2 \in W,$$

Entonces φ' es una forma bilineal en W.

Dem.

$$\begin{aligned}\varphi'(w_1 + a\, w_1', w_2) &= \varphi(T(w_1 + a\, w_1'), S(w_2)) = \varphi(T(w_1) + a\, T(w_1'), S(w_2)) \\ &= \varphi(T(w_1),S(w_2)) + a\, \varphi(T(w_1'),S(w_2)) = \varphi'(w_1,w_2) + a\, \varphi'(w_1',w_2).\end{aligned}$$

Esto prueba que φ' es lineal en la primer variable y análogamente se prueba que es lineal en la segunda variable. □

Definición 3.2.5. Si V tiene dimensión finita n, $\mathcal{B} = \{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de V y $\varphi \in \operatorname{Bil}(V)$, definimos $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ la *matriz asociada* a la forma bilineal φ en la base $\mathcal{B}$ mediante

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) := \left(\varphi\left(v_i,v_j\right)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \varphi\left(v_1,v_1\right) & \cdots & \varphi\left(v_1,v_n\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi\left(v_n,v_1\right) & \cdots & \varphi\left(v_n,v_n\right) \end{pmatrix} \in M_n(\Bbbk).$$

Ejemplo 3.2.6. En el Ejemplo 3.2.2, si $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, es $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposición 3.2.7. *Sea V un espacio de dimensión finita n y $\mathcal{B} = \{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V. Entonces*

$$\varphi(u,v) = \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u)^t M_{\mathcal{B}}(\varphi) \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v), \quad \forall u,v \in V. \tag{3.2}$$

Dem. Sean $u = \sum_{i=1}^n x_i\, v_i$ y $v = \sum_{j=1}^n y_j\, v_j$. Entonces por la bilinealidad de φ es

$$\varphi(u,v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i\, v_i, \sum_{j=1}^n y_j\, v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i\, y_j\, \varphi\left(v_i,v_j\right).$$

Por otro lado teniendo en cuenta (3.1) es

$$\begin{aligned}\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u)^t M_{\mathcal{B}}(\varphi) \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u) &= (x_1,\ldots,x_n)^t\, M_{\mathcal{B}}(\varphi)\ (y_1,\ldots,y_n) = \beta_{M_{\mathcal{B}}(\varphi)}\big(\left(x_1,\ldots,x_n\right),\left(y_1,\ldots,y_n\right)\big) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \varphi\left(v_i,v_j\right) x_i\, y_j. \quad \square\end{aligned}$$

Observación 3.2.8. Notar que (3.2) implica que si $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, entonces

$$\varphi(u,v) = \beta_A\big(\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u), \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v)\big), \quad \forall u, v \in V. \tag{3.3}$$

Teorema 3.2.9. *Sea V un espacio de dimensión finita n y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. La función $M_{\mathcal{B}} : \operatorname{Bil}(V) \to M_n(\Bbbk)$ que a cada forma bilineal φ le asocia la matriz $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es un isomorfismo.*

Dem. Sean $\varphi, \varphi' \in \operatorname{Bil}(V)$ y $a \in \Bbbk$. Es

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}\left(a\,\varphi + \varphi'\right) &= \big(\left(a\,\varphi + \varphi'\right)(v_i, v_j)\big)_{i,j} = \big(a\,\varphi\,(v_i, v_j) + \varphi'\,(v_i, v_j)\big)_{i,j} = a\,\left(\varphi\,(v_i, v_j)\right)_{i,j} + \left(\varphi'\,(v_i, v_j)\right)_{i,j} \\ &= a\,M_{\mathcal{B}}(\varphi) + M_{\mathcal{B}}\left(\varphi'\right). \end{aligned}$$

Luego $M_{\mathcal{B}}$ es lineal.

Si $\varphi \in \operatorname{Bil}(V)$ es tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = 0$, entonces la fórmula (3.2) implica $\varphi = 0$. Luego $\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}} = \{0\}$ y por lo tanto $M_{\mathcal{B}}$ es inyectiva.

Si $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\Bbbk)$, definimos $\varphi : V \times V \to \Bbbk$ mediante (3.3). La proposición 3.2.4 nos prueba que $\varphi \in \operatorname{Bil}(V)$ y operando obtenemos

$$\varphi(v_i, v_j) = \beta_A(e_i, e_j) = a_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad M_{\mathcal{B}}(\varphi) = A.$$

Luego $M_{\mathcal{B}}$ es sobreyectiva. ☐

Corolario 3.2.10. *Si V es un espacio de dimensión finita n, entonces la dimensión de* $\operatorname{Bil}(V)$ *es n^2.* ☐

Corolario 3.2.11. *Si V es un espacio de dimensión finita n, $\mathcal{B}$ es una base de V y $\varphi \in \operatorname{Bil}(V)$, entonces una matriz $A \in M_n(\Bbbk)$ verifica*

$$\varphi(u,v) = \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u)^t A \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v), \quad \forall u, v \in V.$$

si y solo si $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. ☐

Corolario 3.2.12. *Si $\varphi \in \operatorname{Bil}\left(\Bbbk^n\right)$ entonces existe una única matriz $A \in M_n(\Bbbk)$ tal que $\varphi = \beta_A$.*

Dem. Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\Bbbk^n$ y $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, entonces aplicando (3.2) obtenemos

$$\varphi(u,v) = \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u)^t M_{\mathcal{B}}(\varphi) \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = u^t A\, v = \beta_A(u,v), \quad \forall u, v \in V. \quad \square$$

Ejemplo 3.2.13. Si consideramos la forma bilineal $\varphi : \Bbbk^2 \times \Bbbk^2 \to \Bbbk$ definida en el ejemplo 3.2.2, es

$$\varphi\left((x,y), (x',y')\right) = 2\,x\,x' + 3\,x\,y' + 4\,y\,x' - y\,y' = (x,y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \forall (x,y), (x',y') \in \Bbbk^2.$$

De ahora en adelante supondremos que V es un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita n.

Proposición 3.2.14. *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ dos bases de V y $\varphi \in \operatorname{Bil}(V)$. Entonces*

$$M_{\mathcal{C}}(\varphi) = \left({}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}}\right)^t M_{\mathcal{B}}(\varphi)\, {}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}}.$$

Dem. Sean $u, v \in V$,

$$\begin{aligned} \varphi(u,v) &= \left(\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u)\right)^t M_{\mathcal{B}}(\varphi) \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = \left({}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}} \operatorname{coord}_{\mathcal{C}}(u)\right)^t M_{\mathcal{B}}(\varphi) \left({}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}} \operatorname{coord}_{\mathcal{C}}(v)\right) \\ &= \left(\operatorname{coord}_{\mathcal{C}}(u)\right)^t \left({}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}}\right)^t M_{\mathcal{B}}(\varphi)\, {}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}} \operatorname{coord}_{\mathcal{C}}(v). \end{aligned}$$

Luego el Corolario 3.2.11 implica $M_{\mathcal{C}}(\varphi) = \left({}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}}\right)^t M_{\mathcal{B}}(\varphi)\, {}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}}$. ☐

Definición 3.2.15. Dos matrices A y B en $M_n(\Bbbk)$ se dicen *congruentes* si existe una matriz invertible Q en $M_n(\Bbbk)$ tal que $A = Q^t\, B\, Q$.

Ejercicio 3.2.16. Probar que la congruencia es una relación de equivalencia en $M_n(\Bbbk)$.

Teorema 3.2.17. *Sea $\varphi \in \operatorname{Bil}(V)$ y $\mathcal{B}$ una base de V. Si $A \in M_n(\Bbbk)$ es congruente con $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, entonces existe $\mathcal{C}$ base de V tal que $M_{\mathcal{C}}(\varphi) = A$.*

Dem. Sea $Q = (q_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$ invertible tal que $A = Q^t\, M_{\mathcal{B}}(\varphi)\, Q$. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, definimos $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$ mediante

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\, v_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Como Q es invertible, resulta que $\mathcal{C}$ es una base de V y ${}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}} = Q$. Luego

$$A = Q^t\, M_{\mathcal{B}}(\varphi)\, Q = \left({}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}}\right)^t\, M_{\mathcal{B}}(\varphi)\, {}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}(\varphi). \quad \square$$

Corolario 3.2.18. *Dos matrices son congruentes si y solo si representan a una misma forma bilineal.*

Dem. Sean A y A' en $M_n(\Bbbk)$ dos matrices congruentes. Si consideramos la forma bilineal $\beta_{A'} \in \operatorname{Bil}(\Bbbk^n)$ y $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\Bbbk^n$ es $A' = M_{\mathcal{B}}(\beta_{A'})$. Luego A es congruente con $M_{\mathcal{B}}(\beta_{A'})$ y el teorema anterior implica que $A = M_{\mathcal{C}}(\beta_{A'})$ para alguna base $\mathcal{C}$ de $\Bbbk^n$. El recíproco es la Proposición 3.2.14. $\square$

3.3. Formas bilineales simétricas

Sea $\Bbbk$ un cuerpo arbitrario, decimos que el cuerpo tiene *característica* 2 y escribimos $\operatorname{car} \Bbbk = 2$ si en $\Bbbk$ se verifica $1 + 1 = 0$. Un ejemplo es el conjunto $\mathbb{F}_2$ formado por dos elementos que llamamos 0 y 1, en el cual definimos una suma y un producto mediante:

$$\begin{array}{cccc} 0+0=0, & 1+1=0, & 0+1=1, & 1+0=1, \\ 0\cdot 0=0, & 0\cdot 1=0, & 1\cdot 0=0, & 1\cdot 1=1. \end{array}$$

Es un ejercicio el verificar que $\mathbb{F}_2$ con estas operaciones es un cuerpo y claramente $\operatorname{car} \mathbb{F}_2 = 2$. Otro ejemplo es el cuerpo de expresiones racionales con coeficientes en $\mathbb{F}_2$, es decir los cocientes de polinomios con coeficientes en $\mathbb{F}_2$.

Ejemplos de cuerpos con característica distinta de 2 son $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. En un cuerpo $\Bbbk$ con $\operatorname{car} \Bbbk \neq 2$ es $2 := 1 + 1 \neq 0$ y luego 2 es invertible en $\Bbbk$.

En este sección V será siempre un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $\operatorname{car} \Bbbk \neq 2$.

Definición 3.3.1. Una forma bilineal φ se dice *simétrica* si

$$\varphi(u, v) = \varphi(v, u), \quad \forall u, v \in V.$$

Es un ejercicio el verificar que $\operatorname{Bil}_S(V) := \{\varphi \in \operatorname{Bil}(V) : \ \varphi \text{ es simétrica}\}$ es un subespacio de $\operatorname{Bil}(V)$.

Proposición 3.3.2. *Sea $\varphi \in \operatorname{Bil}(V)$. Son equivalentes:*

1. *$\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$.*
2. *Para toda base $\mathcal{B}$ de V es $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ simétrica.*
3. *Existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es simétrica.*

Dem. $1 \Rightarrow 2$: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{ij})$, entonces

$$a_{ij} = \varphi(v_i, v_j) = \varphi(v_j, v_i) = a_{ji}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

luego $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{ij})$ es simétrica.

$2 \Rightarrow 3$: Esto es obvio.

$3 \Rightarrow 1$: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es simétrica, esto último equivale a $\varphi(v_i, v_j) = \varphi(v_j, v_i)$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. Sean $u, v \in V$, entonces existen escalares $a_i, b_i \in \mathbb{k}$, $i = 1, \dots, n$ tales que $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ y $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Luego

$$\begin{aligned}\varphi(u,v) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j \varphi(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_j \varphi(v_j, v_i) \\ &= \varphi\left(\sum_{j=1}^n b_j v_j, \sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \varphi(v,u).\end{aligned}$$

Como u y v son arbitrarios, se deduce que $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$. □

Corolario 3.3.3. *Si* $\dim(V) = n$, *entonces* $\dim \operatorname{Bil}_S(V) = \frac{n(n+1)}{2}$. □

Definición 3.3.4. Sea $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$. La función $\Phi : V \to \mathbb{k}$ definida por $\Phi(v) = \varphi(v,v)$, $\forall v \in V$ se llama la *forma cuadrática* asociada a φ.

Proposición 3.3.5. *Las formas cuadráticas en V forman un subespacio de las funciones de V en $\mathbb{k}$.*

Dem. Es claro que la función nula es una forma cuadrática (correspondiente a la forma bilineal nula). Si Φ y Ψ son dos formas cuadráticas y $a \in \mathbb{k}$, entonces existen φ y ψ en $\operatorname{Bil}_S(V)$ tales que $\Phi(v) = \varphi(v,v)$ y $\Psi(v) = \psi(v,v)$, $\forall v \in V$, luego

$$(a\,\Phi + \Psi)(v) = a\,\Phi(v) + \Psi(v) = a\,\varphi(v,v) + \psi(v,v) = (a\,\varphi + \psi)(v,v), \ \forall v \in V \text{ y } a\,\varphi + \psi \in \operatorname{Bil}_S(V).$$

Esto prueba que $a\,\Phi + \Psi$ es una forma cuadrática. □

Proposición 3.3.6. *Sea $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$ y $\Phi : V \to \mathbb{k}$ la forma cuadrática asociada a φ. Entonces:*

1. $\Phi(a\,v) = a^2\,\Phi(v)$, $\forall a \in \mathbb{k}$, $v \in V$.
2. $\Phi(0) = 0$.
3. $\Phi(u+v) = \Phi(u) + 2\,\varphi(u,v) + \Phi(v)$, $\forall u, v \in V$.

Dem.

1. $\Phi(a\,v) = \varphi(a\,v, a\,v) = a^2\,\varphi(v,v) = a^2\,\Phi(v)$.
2. Se deduce de la fórmula anterior tomando $a = 0$.
3. $\Phi(u+v) = \varphi(u+v, u+v) = \varphi(u,u) + \varphi(u,v) + \varphi(v,u) + \varphi(v,v) = \Phi(u) + 2\,\varphi(u,v) + \Phi(v)$. □

Observación 3.3.7. Despejando[1] $\varphi(u,v)$ en la tercer igualdad de la proposición anterior obtenemos la *fórmula de polarización*

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{2}\big(\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\big), \quad \forall u, v \in V.$$

Notar que esta fórmula permite escribir una forma bilineal simétrica en función de su forma cuadrática asociada.

[1] Para poder hacer este despeje es necesaria la condición $\operatorname{car} \mathbb{k} \neq 2$.

Definición 3.3.8. Un polinomio en las indeterminadas $x_1,\ldots,x_n$ se dice que es *homogéneo de grado 2* si es de la forma

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij}\, x_i\, x_j.$$

Observar que estos polinomios forman un subespacio de $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$.

Ejemplo 3.3.9. Si $n=2$, un polinomio homogéneo de grado 2 en las indeterminadas x,y es un polinomio de la forma

$$ax^2+bxy+cy^2, \quad a,b,c\in\Bbbk.$$

Si $n=3$, un polinomio homogéneo de grado 2 en las indeterminadas x,y,z es un polinomio de la forma

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz, \quad a,b,\ldots,f\in\Bbbk.$$

Proposición 3.3.10. *Los siguientes espacios vectoriales son isomorfos.*

1. *El espacio de las matrices simétricas $n\times n$ con coeficientes en $\Bbbk$.*
2. *El espacio de las formas bilineales simétricas en $\Bbbk^n$.*
3. *El espacio de las formas cuadráticas en $\Bbbk^n$.*
4. *El espacio de los polinomios homogéneos de grado 2 en las indeterminadas $x_1,\ldots,x_n$ con coeficientes en $\Bbbk$.*

Dem. Nosotros habíamos visto anteriormente que la correspondencia que a una matriz A le hace corresponder la forma bilineal φ definida por $\varphi(u,v)=u^t\,A\,v$ establece un isomorfismo entre las matrices $n\times n$ con coeficientes en $\Bbbk$ y las formas bilineales en $\Bbbk^n$. La Proposición 3.3.2 nos dice que este isomorfismo restringido a las matrices simétricas $n\times n$ nos da un isomorfismo entre las matrices simétricas y las formas bilineales simétricas.

El isomorfismo entre formas bilineales simétricas y formas cuadráticas viene dado por las fórmulas siguientes:

$$\Phi(v)=\varphi(v,v), \quad \varphi(u,v)=\frac{1}{2}\big(\Phi(u+v)-\Phi(u)-\Phi(v)\big). \tag{3.4}$$

Si $A=(a_{ij})\in M_n(\Bbbk)$ es una matriz simétrica, le asociamos el polinomio p en las indeterminadas $x_1,\ldots,x_n$ definido por

$$p=\sum_{i\le j} b_{ij}\, x_i\, x_j, \quad b_{ij}=\begin{cases} a_{ii} & \text{si } i=j,\\ 2\,a_{ij} & \text{si } i<j.\end{cases}$$

Es claro que que p es un polinomio homogéneo de grado 2 en las indeterminadas $x_1,\ldots,x_n$ y que esta correspondencia es un isomorfismo entre las matrices simétricas y los polinomios homogéneos de grado dos. $\square$

Ejemplo 3.3.11. Si $A=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ b & c\end{smallmatrix}\right)$, entonces la forma bilineal simétrica, la forma cuadrática y el polinomio homogéneo que corresponden a A son:

$$\begin{aligned}\varphi\left((x,y),(x',y')\right)=(x,y)\cdot\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix} &= a\,x\,x'+b\,x\,y'+b\,x'\,y+c\,y\,y',\\ \Phi(x,y)=\varphi\left((x,y),(x,y)\right) &= a\,x^2+2\,b\,x\,y+c\,y^2,\\ p &= a\,x^2+2\,b\,x\,y+c\,y^2.\end{aligned}$$

Observar que la única diferencia ente Φ y p es que Φ es una función de $\Bbbk\times\Bbbk$ en $\Bbbk$, mientras que p es un polinomio en dos variables.

De ahora en adelante V es un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita, $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$ y $\Phi : V \to \Bbbk$ es la forma cuadrática asociada a φ.

Definición 3.3.12. Dos vectores u y v en V son *φ-ortogonales* si $\varphi(u,v)=0$. Dos subespacios U y W de V son *φ-ortogonales* si $\varphi(u,w)=0$ para todo $u\in U$ y $w\in W$. Una base $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ de V se dice *φ-ortogonal* si $\varphi(v_i,v_j)=0$ si $i\neq j$ y se dice *φ-ortonormal* si además $\Phi(v_i)\in\{-1,0,1\}$, $\forall i=1,\dots,n$.

Observación 3.3.13.

1. Sea $\mathcal{B}$ una base de V. Notar que es equivalente que $\mathcal{B}$ sea una base φ-ortogonal de V con que la matriz $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ sea diagonal y que $\mathcal{B}$ sea una base φ-ortonormal de V con que la matriz $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ sea diagonal y sus entradas diagonales sean 0, 1 o -1.

2. Si $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ es una base φ-ortogonal de V, es
$$M_{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{pmatrix}\Phi(v_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Phi(v_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \Phi(v_n)\end{pmatrix}.$$
Luego si $u=\sum_{i=1}^n x_i\,v_i$ y $v=\sum_{i=1}^n y_i\,v_i$ son dos vectores de V, es
$$\varphi(u,v)=\sum_{i=1}^n \Phi\left(v_i\right)\,x_i\,y_i,\quad \Phi(u)=\sum_{i=1}^n \Phi\left(v_i\right)\,x_i^2. \tag{3.5}$$

Ejemplo 3.3.14. Consideremos la forma cuadrática $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $\Phi(x,y,z)=x^2-y^2$ y sea $\varphi\in\operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{R}^3\right)$ la forma bilineal correspondiente. Si $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es
$$M_{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$
Luego $\mathcal{B}$ es una base φ-ortonormal.

Ejemplo 3.3.15. Sea $\varphi\in\operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{Q}^2\right)$ tal que $\Phi(x,y)=2x^2$. Entonces la base canónica $\{e_1,e_2\}$ es φ-ortogonal. Observar que no existe ningún vector v de $\mathbb{Q}^2$ tal que $\Phi(v)=\pm1$, luego no existe ninguna base φ-ortonormal de $\mathbb{Q}^2$.

Definición 3.3.16. Si W es un subespacio de V, la *restricción de φ a W* es la función $\varphi|_{W\times W}:W\times W\to\Bbbk$. Claramente $\varphi|_{W\times W}\in\operatorname{Bil}_S(W)$.

De las fórmulas (3.4) se deduce inmediatamente el siguiente:

Lema 3.3.17. *Una forma bilineal simétrica es nula si y solo si su forma cuadrática asociada es nula.* $\square$

Teorema 3.3.18. *Existe una base φ-ortogonal de V.*

Dem. Lo probaremos por inducción en $n=\dim V$.

Si $n=1$, toda base $\mathcal{B}=\{v\}$ de V es φ-ortogonal. Supongamos ahora que vale la tesis si la dimensión del espacio es $n-1$ y sea $\varphi\in\operatorname{Bil}_S(V)$ con $\dim V=n$. Si $\varphi=0$, entonces toda base de V es φ-ortogonal. Supongamos ahora que $\varphi\neq0$. Por el lema anterior es $\Phi\neq0$, luego existe $u\in V$ tal que $\Phi(u)\neq0$.

Definimos $\alpha\in V^*$ mediante $\alpha(v)=\varphi(v,u)$, $\forall v\in V$. Observar que $\alpha(u)=\varphi(u,u)=\Phi(u)\neq0$, luego $\alpha\neq0$ y entonces $\dim\operatorname{Ker}\alpha=n-1$. Aplicando la hipótesis de inducción a φ restringida a $\operatorname{Ker}\alpha$ tenemos que existe $\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$ base de $\operatorname{Ker}\alpha$ tal que $\varphi(v_i,v_j)=0$ si $i\neq j$.

Como $u \notin \operatorname{Ker} \alpha = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$, entonces el conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}, u\}$ es LI y al tener n elementos es base de V. Como $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\} \subset \operatorname{Ker} \alpha$ resulta que $v_1, \ldots, v_{n-1}$ son φ-ortogonales con u y luego $\mathcal{B}$ es una base φ-ortogonal de V. □

Definición 3.3.19. Llamamos *radical* o *núcleo* de φ a

$$V_0 := \{v \in V : \ \varphi(v,u) = 0, \ \forall u \in V\} = \{v \in V : \ \varphi(u,v) = 0, \ \forall u \in V\}.$$

Ejercicio 3.3.20. Probar que V_0 es un subespacio de V.

Definición 3.3.21. Decimos que φ es *no degenerada* si $V_0 = \{0\}$, es decir si

$$\varphi(u,v) = 0, \forall v \in V \Rightarrow u = 0.$$

Si W es un subespacio de V, decimos que φ es *no degenerada en* W si la restricción de φ a W es no degenerada.

Ejemplo 3.3.22. Consideremos la matriz identidad $I \in M_n(\Bbbk)$ y $\beta_I \in \operatorname{Bil}_S(\Bbbk^n)$, $\beta_I(u,v) = u^t I \, v = u^t v$, $\forall u, v \in \Bbbk^n$. Explícitamente

$$\beta_I((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = x_1 \, y_1 + \cdots + x_n \, y_n.$$

Sea $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \Bbbk^n$,

$$v \in V_0 \Leftrightarrow u^t v = 0, \ \forall u \in V \Leftrightarrow e_i^t v = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow v_i = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow v = 0,$$

luego β_I es no degenerada.

Proposición 3.3.23. *Si $A \in M_n(\Bbbk)$ simétrica y consideramos $\beta_A \in \operatorname{Bil}_S(\Bbbk^n)$, entonces el radical de β_A es el núcleo de L_A.*

Dem. $v \in V_0 \Leftrightarrow u^t A \, v = 0, \ \forall u \in V \Leftrightarrow \beta_I(u, A\, v) = 0, \ \forall u \in V \Leftrightarrow A\, v = 0 \Leftrightarrow v \in \operatorname{Ker}(L_A)$. □

Teorema 3.3.24. *Si $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$, entonces existe un subespacio W de V tal que $V = V_0 \oplus W$ y φ es no degenerada en W.*

Dem. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base φ-ortogonal de V y supongamos que ordenamos $\mathcal{B}$ de forma tal que

$$\begin{aligned} \Phi(v_i) &\neq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, r, \\ \Phi(v_i) &= 0, \quad \forall i = r+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Probaremos que $V_0 = [v_{r+1}, \ldots, v_n]$ y que si definimos $W = [v_1, \ldots, v_r]$, entonces $V = V_0 \oplus W$ y φ es no degenerada en W.

Sean $u = \sum_{i=1}^n x_i \, v_i$ y $v = \sum_{j=1}^n y_i \, v_i$, aplicando (3.5) obtenemos

$$\varphi(u,v) = \sum_{i=l}^{r} \Phi\left(v_i\right) \, x_i \, y_i. \tag{3.6}$$

Si $u \in V_0$, tomando $v = v_j$, $j = 1, \ldots, r$ en (3.6), deducimos $x_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, r$, luego $u \in [v_{r+1}, \ldots, v_n]$. Recíprocamente, si $u \in [v_{r+1}, \ldots, v_n]$ es $x_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, r$ y de (3.6) se deduce $\varphi(u,v) = 0$ para todo $v \in V$, es decir $u \in V_0$. Esto completa la prueba de $V_0 = [v_{r+1}, \ldots, v_n]$.

Como $V_0 = [v_{r+1}, \ldots, v_n]$, resulta

$$V = [v_1, \ldots, v_r] \oplus [v_{r+1}, \ldots, v_n] = W \oplus V_0 = V_0 \oplus W.$$

Supongamos ahora que $u, v \in W$, esto equivale a $x_i = y_i = 0$, para todo $i = r+1, \ldots, n$. Si $\varphi(u,v) = 0$ para todo $v \in W$, entonces tomando $v = v_j$, $j = 1, \ldots, r$ en (3.6), deducimos $x_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, r$, luego $u = 0$. Esto prueba que φ es no degenerada en W. $\square$

Observación 3.3.25. El espacio W en la descomposición anterior no es único. Por ejemplo, si $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{R}^2\right)$ está definida mediante $\varphi((x,y),(x',y')) = x\,x'$, entonces el radical de φ es el eje Oy y podemos tomar como W a cualquier recta por el origen distinta de Oy.

Definición 3.3.26. Llamamos *rango* de φ al rango de $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, siendo $\mathcal{B}$ una base cualquiera de V. Esta definición tiene sentido porque dos matrices congruentes siempre tienen el mismo rango.

Proposición 3.3.27. *La forma bilineal φ es no degenerada si y solo si* $\operatorname{rango}(\varphi) = n$*, siendo $n = \dim V$.*

Dem. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base φ-ortogonal de V y supongamos que ordenamos $\mathcal{B}$ de forma tal que

$$\begin{aligned} \Phi(v_i) &\neq 0, \quad \forall i = 1, \ldots r, \\ \Phi(v_i) &= 0, \quad \forall i = r+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

En el teorema anterior probamos que $V_0 = [v_{r+1}, \ldots, v_n]$, luego φ es no degenerada si y solo si $r = n$.

Por otro lado es

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \Phi(v_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \Phi(v_r) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

luego $\operatorname{rango}(\varphi) = \operatorname{rango}\left(M_{\mathcal{B}}(\varphi)\right) = r$. Esto implica que $\operatorname{rango}(\varphi) = n$ si y solo si $r = n$. $\square$

Ejemplo 3.3.28. Sea $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(\mathbb{R}^3)$ tal que su forma cuadrática asociada es

$$\Phi(x,y,z) = -7x^2 - 2y^2 + 7z^2 + 8xy + 2xz - 4yz, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Luego si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es

$$M_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Para calcular el rango de φ, realizamos opreaciones elementales en sus columnas (sección 5.3). Observar que si primero le sumamos a la primer columna la segunda multiplicada por 2 y luego a la tercer fila le sumamos la primera multiplicada por 3, tenemos:

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Luego el rango de φ coincide con el rango de la última matriz que claramente es 2. En particular esto nos dice que φ degenera.

3.4. Diagonalización de una forma bilineal simétrica.

En el teorema 3.3.18 probamos que para toda forma bilineal simétrica existe una base del espacio en la cual la matriz asociada es diagonal. El problema es que la prueba no es constructiva, luego no nos sirve para encontrarla. A continuación usando matrices elementales (sección 5.3) veremos un algoritmo para hallar una base de este tipo.

Sea $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$. Empezamos tomando una base cualquiera $\mathcal{C}$ de V y considerando la matriz asociada $A = M_{\mathcal{C}}(\varphi)$. Entonces una matriz simétrica D es la matriz asociada a φ en alguna base $\mathcal{B}$ si y solo si existe una matriz invertible Q tal que $D = Q^t A\, Q$. El método consiste en ingeniárselas para hallar Q de forma tal que D sea diagonal.

La operación que nos interesa consiste en transformar una matriz simétrica A en una de la forma $Q^t A\, Q$, siendo Q una matriz invertible. Observar que si Q es una matriz elemental de tipo I, II o III, entonces $Q^t A\, Q$ es la matriz que se obtiene realizando la operación elemental correspondiente en las filas y columnas de A. Por ejemplo sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$E_1^t A\, E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 7 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2^t A\, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 11 \\ 3 & 6 & 8 & 15 \\ 6 & 11 & 15 & 20 \end{pmatrix}.$$

Nuestro objetivo es obtener una forma diagonal para la matriz asociada a la forma bilineal simétrica $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$, lo cual equivale a hallar una base φ-ortogonal de V.

Mostraremos el método mediante un ejemplo. Consideremos $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(\mathbb{R}^3)$ definida en el Ejemplo 3.3.28. Primero sumamos a la tercer columna de $A = M_{\mathcal{C}}(\varphi)$ la segunda multiplicada por -1 y luego sumamos a la tercer fila la segunda multiplicada por -1.

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Ahora le sumamos a la primer columna la segunda multiplicada por 2 y luego sumamos a la primer fila la segunda multiplicada por 2.

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Finalmente le sumamos a la tercer columna la primera multiplicada por 3 y luego sumamos a la tercer fila la primera multiplicada por 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D. \tag{3.9}$$

Observar que la matriz obtenida en (3.7) corresponde a calcular $E_1^t\, A\, E_1$ siendo

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz obtenida en (3.8) corresponde a calcular $E_2^t\, E_1^t\, A\, E_1\, E_2$, siendo

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la matriz obtenida en (3.9) corresponde a calcular $E_3^t\, E_2^t\, E_1^t\, A\, E_1\, E_2\, E_3$, siendo

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego es $D = Q^t\, A\, Q$, siendo

$$Q = E_1\, E_2\, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos dice que si

$$\mathcal{B} = \{(1,2,0),\ (0,1,0),\ (3,5,1)\}$$

entonces $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = D$ y $\mathcal{B}$ es una base φ-ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Un método para obtener la matriz Q es el siguiente, escribimos a la izquierda la matriz A y a la derecha la matriz identidad I, luego realizamos operaciones elementales en A y cada vez que hacemos una operación elemental en las colummnas de A, también la hacemos en las columnas de I, pero cuando hacemos operaciones elementales en las filas de A no hacemos nada en la matriz I. Al finalizar el algoritmo, cuando en la izquierda obtenemos la matriz diagonal D, en la derecha está la matriz de congruencia Q. Veamos esto en el ejemplo anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \text{ luego } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5. Formas bilineales simétricas reales

En esta sección el cuerpo de base $\Bbbk$ es $\mathbb{R}$ y V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Definición 3.5.1. Sean $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$ y Φ la forma cuadrática asociada a φ.

1. Φ es *definida positiva* si $\Phi(v) > 0$, $\forall v \neq 0$.
2. Φ es *definida negativa* si $\Phi(v) < 0$, $\forall v \neq 0$.
3. Φ es *definida* si es definida positiva o es definida negativa.
4. Φ es *semidefinida positiva* si $\Phi(v) \geq 0$, $\forall v \in V$ y existe $0 \neq v_0 \in V$ tal que $\Phi(v_0) = 0$.
5. Φ es *semidefinida negativa* si $\Phi(v) \leq 0$, $\forall v \in V$ y existe $0 \neq v_0 \in V$ tal que $\Phi(v_0) = 0$.
6. Φ es *semidefinida* si es semidefinida positiva o es semidefinida negativa.
7. Φ es *no definida* si existen v_1 y v_2 en V tales que $\Phi(v_1) > 0$ y $\Phi(v_2) < 0$.
8. Φ es *no degenerada* si lo es φ, es decir si $\varphi(u, v) = 0,\ \forall v \in V \Rightarrow u = 0$.

Decimos que una forma bilineal simétrica verifica una propiedad de las anteriores si la verifica su forma cuadrática asociada.

Observación 3.5.2. Notar que una forma bilineal simétrica definida positiva es lo mismo que un producto interno real.

Ejemplo 3.5.3. Consideremos las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$.

1. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, es definida positiva.
2. $\Phi(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2$, es definida negativa.
3. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2$, es semidefinida positiva.
4. $\Phi(x, y, z) = -x^2 - y^2$, es semidefinida negativa.
5. $\Phi(x, y, z) = x^2 - y^2$, es no definida y degenerada.
6. $\Phi(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$, es no definida y no degenerada.

Definición 3.5.4. Sea $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$. Decimos que dos subespacios V_+ y V_- forman una *φ-descomposición* de V si verifican

1. Φ es definida positiva en V_+ y Φ es definida negativa en V_-.
2. V_+ y V_- son φ-ortogonales.
3. $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$.

En el teorema 3.5.6 probaremos que siempre existe una φ-descomposición de V.

Observación 3.5.5. Sea $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$ y $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$ una φ-descomposición de V, entonces:

1. Si $V_0 \neq \{0\}$, entonces Φ es semidefinida positiva en $V_0 \oplus V_+$ y Φ es semidefinida negativa en $V_0 \oplus V_-$.
2. Φ es definida positiva si y solo si $V_- = V_0 = \{0\}$.

3. Φ es definida negativa si y solo si $V_+ = V_0 = \{0\}$.

4. Φ es semidefinida positiva si y solo si $V_- = \{0\}$ y $V_0 \neq \{0\}$.

5. Φ es semidefinida negativa si y solo si $V_+ = \{0\}$ y $V_0 \neq \{0\}$.

6. Φ es no definida si y solo si $V_- \neq \{0\}$ y $V_+ \neq \{0\}$.

7. Φ es no degenerada si y solo si $V_0 = \{0\}$.

En particular de las partes 4, 5 y 7 se deduce que si Φ es semidefinida entonces degenera.

El siguiente teorema refina el teorema 3.3.24 para el caso de $\Bbbk = \mathbb{R}$.

Teorema 3.5.6. *Dada $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$, existe una φ-descomposición de V.*

Dem. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base φ-ortogonal de V. Podemos suponer $\mathcal{B}$ ordenada de forma tal que

$$\begin{aligned} \Phi(v_i) &= a_i, \quad \forall i = 1, \ldots, p \\ \Phi(v_i) &= -a_i, \quad \forall i = p+1, \ldots, r \\ \Phi(v_i) &= 0, \quad \forall i = r+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

siendo $a_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, r$. Por la prueba del teorema 3.3.24 sabemos que $V_0 = [v_{r+1}, \ldots, v_n]$ y que φ es no degenerada en $[v_1, \ldots, v_r]$. Sean

$$V_+ = [v_1, \ldots, v_p], \quad V_- = [v_{p+1}, \ldots, v_r].$$

Es claro que $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$. Además los vectores de $\mathcal{B}$ son φ-ortogonales dos a dos, luego V_+ y V_- son φ-ortogonales. Por otro lado observemos que si $v = \sum_{i=1}^n x_i\, v_i \in V$, con $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, entonces aplicando (3.5) obtenemos

$$\Phi(v) = \sum_{i=1}^n \Phi(v_i)\, x_i^2 = \sum_{i=1}^p a_i\, x_i^2 - \sum_{i=p+1}^r a_i\, x_i^2.$$

Si $w \in V_+$ y $w \neq 0$, es $w = \sum_{i=1}^p y_i\, v_i$, con $y_1, \ldots, y_p \in \mathbb{R}$ y algún $y_i \neq 0$, luego $\Phi(w) = \sum_{i=1}^p a_i\, y_i^2 > 0$. Esto prueba que Φ es definida positiva en V_+. Análogamente se prueba que Φ es definida negativa en V_-. $\square$

Ejemplo 3.5.7. Sea $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$, $V = \mathbb{R}^2$, tal que $\Phi(x,y) = x^2 - y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$. Es fácil de probar que el rango de φ es 2, luego φ es no degenerada y $V_0 = \{0\}$. Observar que las bases

$$\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\} \text{ y } \mathcal{B} = \{(2,1),(1,2)\}.$$

son φ-ortogonales. Esto da lugar a dos descomposiciones del tipo $V = V_+ \oplus V_-$:

$$\mathbb{R}^2 = [(1,0)] \oplus [(0,1)] \text{ y } \mathbb{R}^2 = [(2,1),(1,2)].$$

Luego no hay unicidad respecto a los subespacios V_+ y V_-.

Observación 3.5.8. Si $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$ y $\mathcal{B}$ es una base φ-ortogonal de V como en la prueba del teorema 3.5.6, entonces la matriz asociada a φ es

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_p & & & & & & \\ & & & -a_{p+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -a_r & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Notar que de la prueba del teorema se deduce que si $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$ es la φ-descomposición correspondiente, entonces la dimensión de V_+ es la cantidad de entradas diagonales positivas de $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ y la dimensión de V_- es la cantidad de entradas diagonales negativas de $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

El siguiente teorema muestra que la dimensión de V_+ y de V_- no depende de la elección de la φ-descomposición.

Teorema 3.5.9. *Sea* $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$. *Consideremos* $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$ *y* $V = V_0 \oplus W_+ \oplus W_-$ *dos* φ*-descomposiciones de* V*, es decir*

1. V_+ *y* V_- *son* φ*-ortogonales,* Φ *es definida positiva en* V_+ *y definida negativa en* V_-.
2. W_+ *y* W_- *son* φ*-ortogonales,* Φ *es definida positiva en* W_+ *y definida negativa en* W_-.

Entonces $\dim V_+ = \dim W_+$ *y* $\dim V_- = \dim W_-$.

Dem. Sea $v \in W_- \cap (V_+ \oplus V_0)$. Como $v \in V_+ \oplus V_0$, entonces existen únicos $v_0 \in V_0$ y $v_+ \in V_+$ tales que $v = v_+ + v_0$. Luego

$$\Phi(v) = \Phi(v_+ + v_0) = \Phi(v_+) + 2\,\varphi(v_+, v_0) + \Phi(v_0) = \Phi(v_+) \geq 0.$$

Por otro lado, como $v \in W_-$, si fuese $v \neq 0$ sería $\Phi(v) < 0$ lo cual nos lleva a una contradicción. Entonces la única posibilidad es $v = 0$ y resulta $W_- \cap (V_+ \oplus V_0) = \{0\}$. Como es

$$V_0 \oplus V_+ \oplus V_- = V \supset W_- + (V_+ \oplus V_0) = W_- \oplus (V_+ \oplus V_0),$$

deducimos

$$\dim V_0 + \dim V_+ + \dim V_- \geq \dim W_- + \dim V_+ + \dim V_0.$$

Luego es $\dim V_- \geq \dim W_-$. Razonando análogamente con $V_- \cap (W_+ \oplus V_0)$ deducimos que $\dim W_- \geq \dim V_-$ y resulta $\dim V_- = \dim W_-$. Finalmente tomando dimensiones en $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$ y $V = V_0 \oplus W_+ \oplus W_-$ deducimos que $\dim V_+ = \dim W_+$. □

Del teorema anterior y la observación 3.5.8 se deduce inmediatamente el siguiente.

Corolario 3.5.10 (Ley de inercia de Sylvester)**.** *El número de entradas positivas, negativas y nulas de una matriz diagonal asociada a una forma cuadrática no depende de la representación diagonal.* □

Definición 3.5.11. Sean $V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$ una φ-descomposición de V. Llamamos *índice* de Φ a $\dim V_+$ y *signatura* de Φ a $\dim V_+ - \dim V_-$. Por el teorema anterior esta definición no depende de V_+ y V_-. La signatura, el índice y el rango son los *invariantes* de Φ.

Observación 3.5.12. Consideremos $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$ siendo $\dim V = n$ y $\mathcal{B}$ una base φ-ortogonal de V. Sean s la signatura de φ, r el rango de φ, p el número de entradas positivas de $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, q el número de entradas negativas de $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ y t el número de entradas nulas de $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Entonces el índice de Φ es p y tenemos las siguientes relaciones

$$s = p - q, \quad r = p + q$$
$$p = \frac{1}{2}(r+s), \quad q = \frac{1}{2}(r-s), \quad t = n - r.$$

En particular es $2p = r + s$, luego los tres invariantes quedan determinados conociendo dos de ellos.

Teorema 3.5.13. *Sea $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$, siendo V un espacio vectorial real con producto interno de dimensión finita. Entonces existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es diagonal.*

Dem. Sea $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base ortonormal cualquiera de V y $A = M_{\mathcal{C}}(\varphi)$. La matriz A es simétrica real, luego existen matrices D y $Q = (q_{ij})$ en $M_n(\mathbb{R})$ tales que D es diagonal, Q es ortogonal y

$$D = Q^{-1} A\, Q = Q^t A\, Q.$$

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ el conjunto definido por $v_j = \sum_{i=1}^n q_{ij}\, w_i$, $j = 1, \ldots, n$. Como la matriz Q es ortogonal y la base $\mathcal{C}$ es ortonormal, entonces el conjunto $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V y $Q = {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{id}\,]_{\mathcal{B}}$. Luego

$$D = Q^t A\, Q = \left({}_{\mathcal{C}}[\mathrm{id}\,]_{\mathcal{B}}\right)^t M_{\mathcal{C}}(\varphi)\, {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{id}\,]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}(\varphi).$$

□

Corolario 3.5.14. *Sea $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$, $\mathcal{B}$ una base de V y $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Entonces la cantidad de entradas diagonales positivas, negativas y nulas de una representación matricial diagonal cualquiera de φ coincide respectivamente con la cantidad de valores propios positivos, negativos y nulos de A.*

Dem. Por la Ley de Inercia de Sylvester, basta probar que se cumple el enunciado para alguna representación matricial diagonal de φ.

Sea $\langle\ ,\ \rangle$ el único producto interno de V que hace que $\mathcal{B}$ sea una base ortonormal de V. Aplicando el teorema anterior sabemos que existe una base ortonormal $\tilde{\mathcal{B}}$ de V tal que $D = M_{\tilde{\mathcal{B}}}(\varphi)$ es diagonal. Luego es

$$A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = Q^t M_{\tilde{\mathcal{B}}}(\varphi)\, Q = Q^t\, D\, Q, \quad Q = {}_{\tilde{\mathcal{B}}}[\mathrm{id}\,]_{\mathcal{B}}.$$

Como $\mathcal{B}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$ son dos bases ortonormales, entonces $Q = {}_{\tilde{\mathcal{B}}}[\mathrm{id}\,]_{\mathcal{B}}$ es una matriz ortogonal *i.e.* $Q^t = Q^{-1}$. Luego $A = Q^{-1} D\, Q$ y resulta que A y D tienen los mismos valores propios. Por otro lado, como D es una matriz diagonal, tenemos que los valores propios de D coinciden con sus entradas diagonales. Luego la cantidad de entradas diagonales positivas, negativas y nulas de D es la cantidad de valores propios positivos, negativos y nulos de D y estos coinciden con los de A. □

Capítulo 4

Polinomio minimal y forma de Jordan

En este tema V será siempre un $\Bbbk$-espacio vectorial no nulo de dimensión finita.

4.1. Subespacios invariantes

Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Recordemos que un subespacio W de V se dice T-*invariante* si verifica $T(W) \subset W$. En esta situación escribimos $T|_W : W \to W$ a la restricción de T a W, es decir $T|_W(w) = T(w)$ para todo $w \in W$. Notar que si W es T-invariante, entonces $T|_W \in \mathcal{L}(W)$.

Ejemplo 4.1.1. Si $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ está definida por $T(x,y,z) = (x+y, y+z, 0)$, entonces los subespacios $W_1 = \{(x,y,0) : \ x,y \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(x,0,0) : \ x \in \mathbb{R}\}$ son T-invariantes.

Ejercicio 4.1.2. Probar que si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces $\{0\}$, V, $\operatorname{Ker}(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$ son subespacios T-invariantes.

Proposición 4.1.3. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y supongamos que tenemos una descomposición $V = W_1 \bigoplus \cdots \bigoplus W_h$ en que cada W_i es T-invariante. Si $\mathcal{B}_i$ es una base de W_i, $i = 1, \ldots, h$, entonces en $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_h$ se verifica:*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_h \end{pmatrix}, \quad \textit{siendo } A_i = [T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i}, \ \forall i = 1, \ldots, h.$$

Dem. Sea $\mathcal{B}_i = \left\{v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i\right\}$, $\forall i = 1, \ldots, h$. Como W_i es T-invariante, es $T\left(v_j^i\right) \in W_i$ y por lo tanto es $T\left(v_j^i\right) = T|_W\left(v_j^i\right) = a_{1j}\, v_1^i + \cdots + a_{n_i j}\, v_{n_i}^i$, $\forall j = 1, \ldots, n_i$. Luego

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}\left(T\left(v_j^i\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{1j} \\ \vdots \\ a_{n_i j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \forall j = 1, \ldots, n_i \text{ y } \ [T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n_i 1} & \cdots & a_{n_i n_i} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Proposición 4.1.4. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y W es un subespacio T-invariante de V, entonces $X_{T|_W}(t)$ divide a $\chi_T(t)$ en $\Bbbk[t]$.*

Dem. Sea $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de W, como el conjunto $\mathcal{B}_W$ es LI, sabemos que existen $w_{m+1}, \ldots, w_n$ en V tales que $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ es una base de V. Como $T(w_i) \in W$, $\forall i = 1, \ldots, m$, es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,m} & a_{1\,m+1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,m} & a_{m\,m+1} & \cdots & a_{m\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m+1\,m+1} & \cdots & a_{m+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n\,m+1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

siendo $A = [T|_W]_{\mathcal{B}_W}$. Luego

$$\chi_T(t) = \begin{vmatrix} A - t\,I & B \\ 0 & D - t\,I \end{vmatrix} = |A - t\,I|\,|D - t\,I| = \chi_{T|_W}(t)\,p(t),$$

siendo $p(t) = |D - t\,I|$. □

Ejemplo 4.1.5. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ definida por

$$T(x, y, z, t) = (x + y + 2z - t, y + t, 2z - t, z + t).$$

Consideremos el subespacio $W = \{(x, y, 0, 0) :\ x, y \in \mathbb{R}\}$. Observar que $T(x, y, 0, 0) = (x + y, y, 0, 0) \in W$, luego W es T-invariante. Si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$, entonces $\mathcal{B}_W = \{e_1, e_2\}$ es base de W y obtenemos

$$[T|_W]_{\mathcal{B}_W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego[1] $\chi_{T|_W}(t) = (1 - t)^2$ y $\chi_T(t) = (1 - t)^2\left(t^2 - 3t + 3\right)$.

Definición 4.1.6. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $v \in V$. Llamamos *subespacio T-cíclico* generado por v a

$$S_{v,T} := \left[v, T(v), T^2(v), \ldots\right] = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i\,T^i(v) :\ a_i \in \Bbbk,\ i = 0, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Proposición 4.1.7. *$S_{v,T}$ es el menor subespacio T-invariante de V que contiene a v.*

Dem. Es claro que $v \in S_{v,T}$. Por otro lado $T\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\,T^i(v)\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i\,T^{i+1}(v)$, luego $S_{v,T}$ es T-invariante.

Sea W un subespacio T-invariante que contiene a v. Como W es T-invariante y $v \in W$, entonces $T(v) \in W$. Luego $T^2(v) = (T \circ T)(v) = T(T(v)) \in W$ y por inducción se prueba que $T^n(v) \in W$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como W es un subespacio, esto implica $S_{v,T} = \left[v, T(v), T^2(v), \ldots\right] \subset W$. □

Ejemplo 4.1.8. Si $T \in \mathcal{L}(V)$, un vector $v \neq 0$ es un vector propio de T si y solo si $S_{v,T} = [v]$.

[1] No confundir la variable t en $\chi_{T|_W}(t)$ y $\chi_T(t)$ con la variable t en (x, y, z, t).

Ejemplo 4.1.9. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ definida por $T(x,y,z) = (-y+z, x+z, 3z)$. Observar que $T\left(e_1\right) = e_2$ y $T\left(e_2\right) = -e_1$, luego $T^n\left(e_1\right),\ T^n\left(e_2\right) \in \{\pm e_1, \pm e_2\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$S_{e_1,T} = S_{e_2,T} = \{(x,y,0):\ x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Por otro lado, es

$$T(e_3) = e_1 + e_2 + 3\,e_3, \quad T^2(e_3) = T(e_1 + e_2 + 3\,e_3) = 2\,e_1 + 4\,e_2 + 9\,e_3,$$

luego $\left\{e_3, T(e_3), T^2(e_3)\right\} = \{e_3, e_1 + e_2 + 3\,e_3, 2\,e_1 + 4\,e_2 + 9\,e_3\}$ y este conjunto es LI, luego es base de $\mathbb{R}^3$. Así $S_{e_3,T}$ contiene una base del espacio, luego $S_{e_3,T} = \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4.1.10. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_3[x]\right)$ definida por $T(p(x)) = p'(x)$ y consideremos $v = x^2$. Es

$$T\left(x^2\right) = 2\,x, \quad T^2\left(x^2\right) = 2, \quad T^3\left(x^2\right) = 0,$$

luego $S_{x^2,T} = \left[x^2, 2\,x, 2, 0, \ldots\right] = \left[x^2, 2\,x, 2\right] = \mathbb{R}_2[x] \subset \mathbb{R}_3[x]$.

Teorema 4.1.11. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $0 \neq v \in V$, $W = S_{v,T}$ y $h = \dim W$. Entonces:*

1. *El conjunto $\left\{v, T(v), \ldots, T^{h-1}(v)\right\}$ es base de W.*
2. *Si $T^h(v) = a_0\,v + a_1\,T(v) + \cdots + a_{h-1}T^{h-1}(v)$, es*

$$\chi_{T|_W}(t) = (-1)^h\left(t^h - a_{h-1}\,t^{h-1} - \cdots - a_1\,t - a_0\right).$$

Dem. Sea $j = \min\left\{i \in \mathbb{Z}^+ :\ \left\{v, T(v), \ldots, T^i(v)\right\} \text{ es LD}\right\}$, como $v \neq 0$, es $j \geq 1$. Observar que $\left\{v, T(v), \ldots, T^{j-1}(v)\right\}$ es LI y $\left\{v, T(v), \ldots, T^{j-1}(v), T^j(v)\right\}$ es LD, luego $T^j(v) \in \left[v, T(v), \ldots, T^{j-1}(v)\right]$.

Afirmación: Para todo $p \in \mathbb{N}$ se cumple que $T^{j+p}(v) \in \left[v, T(v), \ldots, T^{j-1}(v)\right]$.

Lo probaremos por inducción en p. Si $p = 0$ sabemos que es cierto. Supongamos que $T^{j+p}(v) \in \left[v, T(v), \ldots, T^{j-1}(v)\right]$. Entonces

$$T^{j+p+1}(v) = \left(T \circ T^{j+p}\right)(v) = T\left(T^{j+p}(v)\right) \in \left[T(v), T^2(v), \ldots, T^j(v)\right].$$

Como es $\left\{T(v), T^2(v), \ldots, T^{j-1}(v), T^j(v)\right\} \subset \left[v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{j-1}(v)\right]$, deducimos que $T^{j+p+1}(v) \in \left[v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{j-1}(v)\right]$.

Luego $W = \left[v, T(v), \ldots, T^{j-1}(v)\right]$, $j = h = \dim W$ y el conjunto $\mathcal{B} = \left\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{h-1}(v)\right\}$ es base de W. Sea $T^h(v) = a_0\,v + a_1\,T(v) + \cdots + a_{h-1}T^{h-1}(v)$, entonces

$$[T|_W]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{h-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{h-1} \end{pmatrix}.$$

Es un ejercicio del práctico probar que en este caso es $\chi_{T|_W}(t) = (-1)^h\left(t^h - a_{h-1}\,t^{h-1} - \cdots - a_1\,t - a_0\right)$. $\square$

Ejemplo 4.1.12. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ definida por $T(x,y,z) = (-y+z, x+z, 3\,z)$, ya vimos en el ejemplo 4.1.9 que

$$T(e_1) = e_2 \text{ y } T(e_2) = -e_1 \Rightarrow T^2(e_1) = -e_1 = -e_1 - 0\,T(e_1).$$

Luego $\{e_1, T(e_1)\} = \{e_1, e_2\}$ es base de $W = S_{e_1,T}$ y $\chi_{T|_W}(t) = (-1)^2\left(1 + 0\,t + t^2\right) = 1 + t^2$.

4.2. Polinomios y transformaciones lineales

Si $T \in \mathcal{L}(V)$, definimos $T^n \in \mathcal{L}(V)$, $n = 0, 1, \ldots$, mediante

$$T^0 = \mathrm{Id}, \quad T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n}, \ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Si $p = \sum_{i=0}^n a_i\, x^i \in \Bbbk[x]$, definimos $p(T) \in \mathcal{L}(V)$ mediante

$$p(T) = \sum_{i=0}^n a_i T^i = a_n\, T^n + a_{n-1}\, T^{n-1} + \cdots + a_1\, T + a_0 \,\mathrm{Id}\,.$$

Análogamente, si $A \in M_n(\Bbbk)$ y $p = \sum_{i=0}^n a_i\, x^i \in \Bbbk[x]$, definimos $p(A) \in M_n(\Bbbk)$ mediante

$$p(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i = a_n\, A^n + a_{n-1}\, A^{n-1} + \cdots + a_1\, A + a_0 I.$$

Ejemplo 4.2.1. Si consideramos el polinomio constante $1 \in \Bbbk[x]$, resulta $1(T) = \mathrm{Id}$ y $1(A) = I$ para todo $T \in \mathcal{L}(V)$, $A \in M_n(\Bbbk)$.

Proposición 4.2.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces $[p(T)]_{\mathcal{B}} = p\left([T]_{\mathcal{B}}\right)$, $\forall p \in \Bbbk[x]$.*

Dem. Si $p = \sum_{i=0}^n a_i\, x^i$, es $[p(T)]_{\mathcal{B}} = \left[\sum_{i=0}^n a_i\, T^i\right]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=0}^n a_i\, \left([T]_{\mathcal{B}}\right)^i = p\left([T]_{\mathcal{B}}\right).$ □

Corolario 4.2.3. *Si $A \in M_n(\Bbbk)$, es $p\left(L_A\right) = L_{p(A)} \in \mathcal{L}(\Bbbk^n)$ para todo $p \in \Bbbk[x]$.*

Dem. Si $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\Bbbk^n$, es $A = [L_A]_{\mathcal{B}}$. Aplicando la proposición anterior obtenemos $[p\left(L_A\right)]_{\mathcal{B}} = p(A)$, luego $p\left(L_A\right) = L_{p(A)}$. □

Ejemplo 4.2.4. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ definida por $T(x,y) = (x, 2x+y)$ y consideremos $p = x^3+x^2-x+2 \in \mathbb{R}[x]$. Es $T = L_A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Luego $p(A) = A^3 + A^2 - A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $p(T)(x,y) = (3x, 8x+3y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Observación 4.2.5. La proposición 4.2.2 y el corolario 4.2.3 nos permiten deducir propiedades de polinomios aplicados a operadores de propiedades de polinomios aplicados a matrices y viceversa. La siguiente proposición es una muestra de esto. Por eso es que general probaremos las proposiciones en uno solo de los dos casos, entendiendo que la prueba del otro se deduce aplicando la proposición 4.2.2 o el corolario 4.2.3, según corresponda.

Proposición 4.2.6. *Sean $T \in \mathcal{L}(V)$, $A \in M_n(\Bbbk)$, $\lambda \in \Bbbk$ y $p, q \in \Bbbk[x]$. Vale:*

1. $(\lambda\, p + q)(A) = \lambda\, p(A) + q(A)$, $(p\, q)(A) = p(A)\, q(A)$.
2. $(\lambda\, p + q)(T) = \lambda\, p(T) + q(T)$, $(p\, q)(T) = p(T) \circ q(T)$.

Dem. Podemos suponer $p = \sum_{i=0}^n a_i\, x^i$ y $q = \sum_{i=0}^n b_i\, x^i$ (puede ser $a_n = 0$ o $b_n = 0$).

Es $\lambda\, p + q = \sum_{i=0}^n \left(\lambda\, a_i + b_i\right)\, x^i$, luego

$$(\lambda\, p + q)(A) = \sum_{i=0}^n \left(\lambda\, a_i + b_i\right) A^i = \sum_{i=0}^n \lambda\, a_i\, A^i + \sum_{i=0}^n b_i\, A^i = \lambda\, p(A) + q(A).$$

Es $p\, q = a_n\, b_n\, x^{2n} + \left(a_{n-1}\, b_1 + a_1\, b_{n-1}\right) x^{2n-1} + \cdots + \left(a_1\, b_0 + a_0\, b_1\right) x + a_0\, b_0$, luego

$$\begin{aligned}(p\, q)(A) &= a_n\, b_n\, A^{2n} + \left(a_{n-1}\, b_1 + a_1\, b_{n-1}\right) A^{2n-1} + \cdots + \left(a_1\, b_0 + a_0\, b_1\right) A + a_0\, b_0\, I \\ &= \left(\sum_{i=0}^n a_i\, A^i\right)\left(\sum_{i=0}^n b_i\, A^i\right) = p(A)\, q(A).\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{B}$ una base de V. Aplicando la proposición anterior obtenemos:

$$[(\lambda\, p+q)(T)]_{\mathcal{B}} = (\lambda\, p+q)\left([T]_{\mathcal{B}}\right) = \lambda\, p\left([T]_{\mathcal{B}}\right) + q\left([T]_{\mathcal{B}}\right) = \lambda\,[p(T)]_{\mathcal{B}} + [q(T)]_{\mathcal{B}} = [\lambda\, p(T)+q(T)]_{\mathcal{B}}\,,$$

luego $(\lambda\, p+q)(T) = \lambda\, p(T)+q(T)$. La otra relación se prueba en forma análoga. $\square$

Como el producto de polinomios es conmutativo, de la proposición anterior se deduce:

Corolario 4.2.7. *Si $p,q \in \Bbbk[x]$, $A \in M_n(\Bbbk)$ y $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces*

$$p(A)\, q(A) = q(A)\, p(A) \quad y \quad p(T)\circ q(T) = q(T)\circ p(T). \qquad \square$$

Proposición 4.2.8. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y $p \in \Bbbk[x]$, entonces $\operatorname{Ker} p(T)$ e $\operatorname{Im}\, p(T)$ son subespacios T-invariantes.*

Dem. Sea $v \in \operatorname{Ker} p(T)$, es $p(T)(T(v)) = (p(T)\circ T)(v) = (T\circ p(T))(v) = T(p(T)(v)) = T(0) = 0$, luego $T(v) \in \operatorname{Ker} p(T)$.

Sea $v = p(T)(w) \in \operatorname{Im}\, p(T)$, es $T(v) = T\left(p(T)(w)\right) = \left(T\circ p(T)\right)(w) = \left(p(T)\circ T\right)(w) = p(T)\left(T(w)\right)$, luego $T(v) \in \operatorname{Im}\, p(T)$. $\square$

Corolario 4.2.9. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y λ es un valor propio de T, entonces el subespacio propio $E_\lambda = \operatorname{Ker}(T-\lambda\,\mathrm{Id})$ es T-invariante.*

Dem. Si $p = x-\lambda \in \Bbbk[x]$, entonces $E_\lambda = \operatorname{Ker} p(T)$. $\square$

Teorema 4.2.10 (Cayley-Hamilton)**.** *Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces $\chi_T(T) = 0$.*

Dem. Lo que tenemos que probar es que el operador $\chi_T(T) : V \to V$ verifica $\chi_T(T)\,(v) = 0$ para todo v en V.

Sea $v \in V$ arbitrario fijo. Si $v = 0$ es $\chi_T(T)(v) = \chi_T(T)(0) = 0$. Supongamos ahora que $v \neq 0$ y sea $W = S_{v,T}$. Como W es T-invariante, $\chi_{T|_W}$ divide a χ_T. Sea $p \in \Bbbk[x]$ tal que $\chi_T(x) = p(x)\,\chi_{T|_W}(x)$. Sea $h = \dim W$ y $T^h(v) = a_0\, v + a_1\, T(v) + \cdots + a_{h-1}\, T^{h-1}(v)$, ya sabemos que en este caso es $\chi_{T|_W}(x) = (-1)^h\left(x^h - a_{h-1}\, x^{h-1} - a_1\, x - \cdots - a_0\right)$. Luego

$$\chi_{T|_W}(T)\,(v) = (-1)^h\left(T^h(v) - a_{h-1}\, T^{h-1}(v) - \cdots a_1\, T(v) - a_0\, v\right) = 0.$$

Entonces

$$\chi_T(T)\,(v) = \left(p(T)\circ\chi_{T|_W}(T)\right)\,(v) = p(T)\,\left(\chi_{T|_W}(T)\,(v)\right) = p(T)\,(0) = 0. \quad \square$$

Corolario 4.2.11. *Si $A \in M_n(\Bbbk)$, entonces $\chi_A(A) = 0$.* $\square$

Lema 4.2.12. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $p(x) \in \Bbbk[x]$ tal que $p(T) = 0$. Si $p(x)$ admite una factorización de la forma $p(x) = p_1(x)\, p_2(x)$ con $\operatorname{mcd}\left(p_1(x), p_2(x)\right) = 1$, entonces*

$$V = \operatorname{Ker}(p_1(T)) \oplus \operatorname{Ker}(p_2(T)).$$

Dem. Como $\operatorname{mcd}\left(p_1(x), p_2(x)\right) = 1$, entonces (proposición 5.1.5) existen $m_1(x)$ y $m_2(x)$ en $\Bbbk[x]$ tales que $m_1(x)\, p_1(x) + m_2(x)\, p_2(x) = 1$, luego

$$\mathrm{Id} = m_1(T)\circ p_1(T) + m_2(T)\circ p_2(T) = p_1(T)\circ m_1(T) + p_2(T)\circ m_2(T).$$

Sea $v \in V$, entonces $v = \mathrm{Id}(v) = p_1(T)\big(m_1(T)(v)\big) + p_2(T)\big(m_2(T)(v)\big)$ luego

$$V = \mathrm{Im}(p_1(T)) + \mathrm{Im}(p_2(T)).$$

Como $p(x) = p_1(x)\, p_2(x)$ es $0 = p(T) = p_1(T) \circ p_2(T)$. Entonces para todo v en V es $0 = p_1(T)(p_2(T)(v))$ y resulta $\mathrm{Im}\, p_2(T) \subset \mathrm{Ker}\, p_1(T)$. Análogamente de $p(x) = p_2(x)\, p_1(x)$ se deduce $\mathrm{Im}\, p_1(T) \subset \mathrm{Ker}\, p_2(T)$. Luego

$$V = \mathrm{Im}\, p_1(T) + \mathrm{Im}\, p_2(T) \subset \mathrm{Ker}\, p_2(T) + \mathrm{Ker}\, p_1(T) \subset V,$$

de donde deducimos

$$V = \mathrm{Ker}\, p_1(T) + \mathrm{Ker}\, p_2(T).$$

Si $v \in \mathrm{Ker}\, p_1(T) \cap \mathrm{Ker}\, p_2(T)$ es $p_1(T)(v) = p_2(T)(v) = 0$, entonces

$$v = \mathrm{Id}(v) = m_1(T)(p_1(T)(v)) + m_2(T)(p_2(T)(v)) = m_1(T)(0) + m_2(T)(0) = 0.$$

Luego $\mathrm{Ker}\, p_1(T) \cap \mathrm{Ker}\, p_2(T) = \{0\}$. □

Teorema 4.2.13. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $p(x) \in \Bbbk[x]$ tal que $p(T) = 0$. Si $p(x)$ admite una factorización de la forma $p(x) = p_1(x) \cdots p_h(x)$ con $\operatorname{mcd}(p_i(x), p_j(x)) = 1$, $\forall i \neq j$, entonces*

$$V = \mathrm{Ker}(p_1(T)) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(p_h(T)).$$

Dem. Lo demostraremos por inducción en h. Para $h = 2$ es el lema anterior.

Supongamos que se cumple para $h-1$ y sea $p(x) = p_1(x) \cdots p_{h-1}(x)\, p_h(x)$ con $\operatorname{mcd}(p_i(x), p_j(x)) = 1$, $\forall i \neq j$.

Consideremos $q(x) = p_1(x) \cdots p_{h-1}(x) \in \Bbbk[x]$, entonces $p(x) = q(x)\, p_h(x)$ y $\operatorname{mcd}(q(x), p_h(x)) = 1$. El lema anterior aplicado a $q(x)$ y $p_h(x)$ implica que

$$V = \mathrm{Ker}(q(T)) \oplus \mathrm{Ker}(p_h(T)).$$

Sea $W = \mathrm{Ker}\, q(T)$. El subespacio W es T-invariante. Consideremos $T|_W \in \mathcal{L}(W)$, es $q(T|_W) = q(T)|_W = q(T)|_{\mathrm{Ker}\, q(T)} = 0$, entonces $q(T|_W) = 0$ y podemos aplicar la hipótesis inductiva a $T|_W \in \mathcal{L}(W)$ y $q(x) \in \Bbbk[x]$, para concluir que $W = \bigoplus_{i=1}^{h-1} \mathrm{Ker}(p_i(T|_W))$. Entonces es $V = \bigoplus_{i=1}^{h-1} \mathrm{Ker}(p_i(T|_W)) \oplus \mathrm{Ker}(p_h(T))$.

Para $i = 1, \ldots, h-1$ es

$$\mathrm{Ker}\, p_i(T|_W) = \mathrm{Ker}(p_i(T)|_W) = \mathrm{Ker}\, p_i(T) \cap W = \mathrm{Ker}\, p_i(T),$$

La última igualdad se deduce de que si $v \in \mathrm{Ker}\, p_i(T)$, entonces

$$q(T)(v) = (p_1(T) \circ \cdots \circ p_{h-1}(T))(v) = (p_1(T) \circ \cdots \circ p_{i-1}(T) \circ p_{i+1}(T) \circ \cdots \circ p_{h-1}(T))(p_i(T)(v)) = 0.$$

Luego

$$\mathrm{Ker}(p_i(T)) \subset \mathrm{Ker}(q(T)) = W \Rightarrow \mathrm{Ker}(p_i(T)) \cap W = \mathrm{Ker}(p_i(T))$$

Entonces $V = \bigoplus_{i=1}^{h-1} \mathrm{Ker}(p_i(T)) \oplus \mathrm{Ker}\, p_h(T) = \bigoplus_{i=1}^{h} \mathrm{Ker}(p_i(T))$. □

4.3. Polinomio minimal

Definición 4.3.1. Un polinomio $p(x)$ es *mónico* si es no nulo y el coeficiente de su término de mayor grado es 1, es decir si es de la forma $p(x) = x^m + a_{m-1}\,x^{m-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$, con $m \geq 1$.

Lema 4.3.2. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces existe un polinomio $m(x)$ que verifica:*

1. *$m(T) = 0$.*

2. *$m(x)$ es de grado mínimo entre los polinomios no nulos que anulan a T.*

3. *$m(x)$ es mónico.*

Dem. Sea $\mathcal{I} = \{p(x) \in \Bbbk[x] :\ p(x) \neq 0 \text{ y } p(T) = 0\}$. El teorema de Cayley-Hamilton implica $\chi_T(x) \in \mathcal{I}$ y por lo tanto $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Luego existe $\tilde{m}(x) \in \mathcal{I}$ no nulo de grado mínimo entre los polinomios de $\mathcal{I}$. Definimos $m(x) := \frac{1}{a}\tilde{m}(x)$ siendo a el coeficiente del término de mayor grado de $\tilde{m}(x)$. Entonces $m(x)$ verifica las condiciones 1, 2 y 3. □

Observación 4.3.3. En la prueba del lema anterior, para ver que vale $\mathcal{I} \neq \emptyset$ sin usar Cayley-Hamilton se puede observar que como $\mathcal{L}(V)$ tiene dimensión finita, entonces el conjunto $\{\mathrm{Id}, T, T^2, T^3, \dots\}$ es LD y por lo tanto existe una cantidad finita de escalares no todos nulos $a_0, a_1, \dots, a_n$ tal que $a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n = 0$; luego es $p(T) = 0$, siendo $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.

Lema 4.3.4. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$.*

a. *Si un polinomio $m(x) \in \Bbbk[x]$ verifica las condiciones 1, 2 y 3 del Lema 4.3.2 y $q(x) \in \Bbbk[x]$ verifica $q(T) = 0$, entonces $m(x)$ divide a $q(x)$.*

b. *Existe un único polinomio $m(x) \in \Bbbk[x]$ que verifica las condiciones 1, 2, y 3 del lema 4.3.2.*

Dem. **a**: Sea $q(x) \in \Bbbk[x]$ que verifique $q(T) = 0$. Dividimos $q(x)$ por $m(x)$ y es $q(x) = m(x)\,d(x) + r(x)$ con $r(x) = 0$ o $r(x) \neq 0$ y gr $r(x) <$ gr $m(x)$. Teniendo en cuenta la condición 1 obtenemos:

$$r(T) = q(T) - m(T) \circ d(T) = 0 - 0 \circ d(T) = 0.$$

Si fuese $r(x) \neq 0$ tendríamos una contradicción con la minimalidad del grado de $m(x)$, luego necesariamente es $r(x) = 0$ y $m(x)$ divide a $q(x)$.

b: Si $p(x)$ es otro polinomio que verifica las condiciones 1, 2 y 3, entonces como $p(x)$ verifica la condición 1 sabemos que $m(x)$ divide a $p(x)$. Cambiando los roles de $p(x)$ y $m(x)$ obtenemos también que $p(x)$ divide a $m(x)$, luego existe una constante $a \in \Bbbk$ tal que $p(x) = a\,m(x)$. Como $p(x)$ y $m(x)$ son mónicos deducimos $a = 1$ y por lo tanto $p(x) = m(x)$. □

Definición 4.3.5. El polinomio del lema 4.3.2 se llama el *polinomio minimal* de T y se escribe $m_T(x)$.

Podemos resumir los lemas anteriores en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.6. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces el polinomio minimal $m_T(x) \in \Bbbk[x]$ es el único polinomio que verifica:*

1. *$m_T(T) = 0$.*

2. *$m_T(x)$ es de grado mínimo entre los polinomios no nulos que anulan a T.*

3. *$m_T(x)$ es mónico.*

Este polinomio cumple además que si $q(x) \in \Bbbk[x]$ es tal que $q(T) = 0$, entonces $m_T(x)$ divide a $q(x)$. □

Observación 4.3.7. Si $T \in \mathcal{L}(V)$ sabemos que $\chi_T(T) = 0$; luego $m_T(x)$ divide a $\chi_T(x)$.

Ejemplo 4.3.8.

1. Si $T = 0 \in \mathcal{L}(V)$, entonces $m_0(x) = x$.
2. Si $T = \mathrm{Id} \in \mathcal{L}(V)$, entonces $m_{\mathrm{Id}}(x) = x - 1$.

Definición 4.3.9. Sea $A \in M_n(\Bbbk)$, llamamos *polinomio minimal* de A al polinomio $m_A(x) \in \Bbbk[x]$ que verifica:

1. $m_A(A) = 0$.
2. $m_A(x)$ es de grado mínimo entre los polinomios no nulos que anulan a A.
3. $m_A(x)$ es mónico.

Análogamente al caso de $T \in \mathcal{L}(V)$, se prueba que este polinomio existe y es el único polinomio que verifica dichas condiciones. Además cumple que si $q(x) \in \Bbbk[x]$ verifica $q(A) = 0$, entonces $m_A(x)$ divide a $q(x)$; en particular $m_A(x)$ divide a $\chi_A(x)$.

Ejemplo 4.3.10. Consideremos una matriz escalar $A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\Bbbk)$. Es $A = \lambda I$, luego $A - \lambda I = 0$ y $m_A(x) = x - \lambda$. Observar que vale también el recíproco, si $m_A(x) = x - \lambda$, entonces es $A = \lambda I$.

Proposición 4.3.11. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{B}$ una base de V y $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Entonces $m_T(x) = m_A(x)$.*

Dem.

$$0 = m_A(A) = m_A\left([T]_{\mathcal{B}}\right) = [m_A(T)]_{\mathcal{B}} \Rightarrow m_A(T) = 0 \Rightarrow m_T(x) | m_A(x),$$
$$m_T(A) = m_T\left([T]_{\mathcal{B}}\right) = [m_T(T)]_{\mathcal{B}} = [0]_{\mathcal{B}} = 0 \Rightarrow m_T(A) = 0 \Rightarrow m_A(x) | m_T(x).$$

Luego existe $a \in \Bbbk$ tal que $m_T(x) = a\, m_A(x)$. Como ambos polinomios son mónicos la única posibilidad es $a = 1$ y $m_T(x) = m_A(x)$. □

Corolario 4.3.12. *Si $A \in M_n(\Bbbk)$, es $m_{L_A}(x) = m_A(x)$.*

Dem. Se deduce inmediatamente de la proposición anterior, dado que si $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\Bbbk^n$, entonces $[L_A]_{\mathcal{B}} = A$. □

Lema 4.3.13. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $p(x) \in \Bbbk[x]$ y v un vector propio de T correspondiente a un valor propio λ, entonces*

$$p(T)\,(v) = p(\lambda)\, v.$$

Dem. Observar que $T(v) = \lambda\, v$ implica

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda\, v) = \lambda\, T(v) = \lambda^2\, v.$$

Razonando por inducción se prueba que $T^n(v) = \lambda^n\, v$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego si $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i\, x^i$ es

$$p(T)\,(v) = \left(\sum_{i=0}^n a_i\, T^i\right)(v) = \sum_{i=0}^n a_i\, T^i(v) = \sum_{i=0}^n a_i\, \lambda^i\, v = \left(\sum_{i=0}^n a_i\, \lambda^i\right) v = p(\lambda)\, v.$$

□

Teorema 4.3.14. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces $m_T(x)$ y $\chi_T(x)$ tienen las mismas raíces.*

Dem. Como $m_T(x)$ divide a $\chi_T(x)$, entonces existe un polinomio $g(x)$ tal que $\chi_T(x) = g(x)\, m_T(x)$. Sea $\alpha \in \Bbbk$ tal que $m_T(\alpha) = 0$, entonces $\chi_T(\alpha) = g(\alpha)\, m_T(\alpha) = g(\alpha)\, 0 = 0$, luego $\chi_T(\alpha) = 0$.

Sea $\lambda \in \Bbbk$ tal que $\chi_T(\lambda) = 0$. El escalar λ es un valor propio de T, luego existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda\, v$. Por el lema anterior es $m_T(\lambda)\, v = m_T(T)\,(v) = 0(v) = 0$ y como $v \neq 0$ es $m_T(\lambda) = 0$. □

Observación 4.3.15. Este teorema implica que si $T \in \mathcal{L}(V)$ y χ_T escinde

$$\chi_T(t) = (-1)^n\,(t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_h)^{n_h}\,,\ \text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j,$$

entonces

$$m_T(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_h)^{m_h}\,,\ \text{con } 1 \leq m_i \leq n_i,\ i = 1,\dots,h.$$

Corolario 4.3.16. *Sea $A \in M_n(\Bbbk)$. Entonces $m_A(x)$ y $\chi_A(x)$ tienen las mismas raíces.*

Dem. Se deduce del teorema anterior porque $m_A(x) = m_{L_A}(x)$ y $\chi_A(x) = \chi_{L_A}(x)$. □

Ejemplo 4.3.17. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definida por $T(x,y) = (2x+5y, 6x+y)$. Es $\chi_T(t) = (t-7)(t+4)$, luego necesariamente es $m_T(t) = (t-7)(t+4)$.

Ejemplo 4.3.18. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Es $\chi_A(t) = -(t-2)^2(t-3)$, luego $m_A(t) = \begin{cases} (t-2)(t-3) \\ (t-2)^2(t-3) \end{cases}$. Calculando es $(A-2I)(A-3I) = 0$, luego $m_A(t) = (t-2)(t-3)$.

Observación 4.3.19. Sea $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_h \end{pmatrix}$ una matriz en bloques, siendo $A_i \in M_{n_i}(\Bbbk)$, $i = 1,\dots,h$.

Por ejemplo si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{es } A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}, \text{ siendo}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = (6), \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Es un ejercicio el probar que vale $A^l = \begin{pmatrix} A_1^l & & \\ & \ddots & \\ & & A_h^l \end{pmatrix}$, $\forall l \in \mathbb{N}$. Luego se deduce

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(A_h) \end{pmatrix}, \quad \forall\, p(x) \in \Bbbk[x].$$

Teorema 4.3.20. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces T es diagonalizable si y solo si $m_T(t)$ es de la forma*

$$m_T(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_h)\,,$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Dem. $(\Rightarrow)$: Supongamos que existe $\mathcal{B}$ base de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_h & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_h \end{pmatrix}, \text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j.$$

Entonces $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ son las raíces de $\chi_T(t)$ y por lo tanto de $m_T(t)$. Sea $p(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_h)$.

$$p([T]_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & p(\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & p(\lambda_h) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & p(\lambda_h) \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p(T) = 0.$$

Luego $m_T(t) | p(t)$ y como $m_T(t)$ tiene raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ deducimos $m_T(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_h)$.

$(\Leftarrow)$: Supongamos que $m_T(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_h)$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Sabemos que $m_T(T) = 0$ y como $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, es $\operatorname{mcd}(t - \lambda_i, t - \lambda_j) = 1$ si $i \neq j$. Entonces aplicando el teorema 4.2.13 a $p(t) = m_T(t)$ obtenemos

$$V = \operatorname{Ker}(T - \lambda_1 \operatorname{Id}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(T - \lambda_h \operatorname{Id}) = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_h},$$

luego T es diagonalizable. $\square$

Corolario 4.3.21. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Si existe un polinomio $p(t) \in \Bbbk[t]$ de la forma $p(t) = a(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_k)$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ y $a \in \Bbbk \setminus \{0\}$ tal que $p(T) = 0$, entonces T es diagonalizable.*

Dem. Como $p(T) = 0$, entonces $m_T(t)$ divide a $p(t)$ y por lo tanto verifica las hipótesis del teorema anterior. $\square$

Corolario 4.3.22. *Sea $A \in M_n(\Bbbk)$.*

1. *A es diagonalizable si y solo si su polinomio minimal es de la forma $m_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_h)$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.*

2. *Si existe un polinomio $p(t) \in \Bbbk[t]$ de la forma $p(t) = a(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_k)$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ y $a \in \Bbbk \setminus \{0\}$ tal que $p(A) = 0$, entonces A es diagonalizable.*

Dem. Se deduce de lo anterior porque A es diagonalizable si y solo si L_A es diagonalizable y $m_A(t) = m_{L_A}(t)$. $\square$

Ejemplo 4.3.23. En el ejemplo 4.3.18 es $m_A(t) = (t-2)(t-3)$ y en el ejemplo 4.3.17 es $m_T(t) = (t-7)(t+4)$, luego A y T son diagonalizables. Por otro lado en el ejemplo 4.4.5 es $m_T(t) = t^3$, luego T no es diagonalizable.

Ejemplo 4.3.24. Si T es una proyección, entonces T verifica $T^2 = T$. Luego es $p(T) = 0$, siendo $p(t) = t^2 - t = t(t-1)$ y T es diagonalizable. De hecho si $m_T(t) = t - 1$, es $T = \mathrm{Id}$. Si $m_T(t) = t$, es $T = 0$. Si $m_T(t) = t(t-1)$ entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.3.25. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^3 = A$. Entonces $p(A) = 0$, siendo $p(t) = t^3 - t$. Observar que $p(t) = t^3 - t = t(t-1)(t+1)$, luego el corolario anterior implica que A es diagonalizable.

Ejemplo 4.3.26. Veamos cómo hallar las matrices reales 2×2 que verifican $A^2 - 3A + 2I = 0$.

Sea $p(t) = t^2 - 3t + 2$, es $p(A) = 0$, luego $m_A(t)$ divide a $p(t)$. Como $p(t) = (t-1)(t-2)$, entonces $m_A(t)$ puede ser $t-1$, $t-2$ o $(t-1)(t-2)$. Si $m_A(t) = t-1$, entonces $A = I$. Si $m_A(t) = t-2$, entonces $A = 2I$. Si $m_A(t) = (t-1)(t-2)$, entonces A es diagonalizable con valores propios 1 y 2, luego es semejante a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

4.4. Forma de Jordan

En el primer capítulo estudiamos los operadores diagonalizables y vimos que para que un operador sea diagonalizable es necesario que su polinomio característico escinda y que para cada uno de sus valores propios la multiplicidad geométrica coincida con la algebraica. En este capítulo estudiaremos el caso de los operadores que verifican que su polinomio característico escinde, pero la multiplicidad geométrica de sus valores propios no coincide necesariamente con la algebraica.

En lo que sigue, si A es una matriz $n \times n$, diremos que n es el *tamaño* de A.

4.4.1. Operadores nilpotentes

Empezamos nuestro estudio considerando un caso que es en cierto sentido lo opuesto a ser diagonalizable.

Definición 4.4.1. Un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ se dice *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $T^k = 0$. Al menor k tal que $T^k = 0$ le llamamos el *orden* de nilpotencia de T. Luego T es nilpotente de orden p si y solo si $T^p = 0$ y $T^{p-1} \neq 0$.

Análogamente, decimos que una matriz $A \in M_n(\Bbbk)$ es *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $A^k = 0$ y su *orden* de nilpotencia es el menor k tal que $A^k = 0$.

Observación 4.4.2. Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B}$ es una base de V, entonces es claro que T es nilpotente si y solo si $[T]_{\mathcal{B}}$ es nilpotente y en ese caso T y $[T]_{\mathcal{B}}$ tienen el mismo orden de nilpotencia.

Observación 4.4.3. Notar que el único operador nilpotente de orden 1 es el operador nulo. En lo que sigue en general asumiremos que los operadores nilpotentes tienen orden mayor que 1.

Observación 4.4.4. Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es nilpotente de orden p, entonces de $T^p = 0$ y $T^{p-1} \neq 0$ se tiene que el polinomio minimal de T es $m_T(t) = t^p$. Como el polinomio minimal y característico tienen las mismas raíces, se deduce que el único valor propio de T es 0.

Ejemplo 4.4.5. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ definida por $T(p(x)) = p'(x)$. Observar que

$$T\left(a\,x^2 + b\,x + c\right) = 2a\,x + b, \quad T^2\left(a\,x^2 + b\,x + c\right) = 2a, \quad T^3\left(a\,x^2 + b\,x + c\right) = 0.$$

Luego T es un operador nilpotente. Además vimos que $T^3 = 0$ y $T^2 \neq 0$, entonces $m_T(t) = t^3$ y por lo tanto $\chi_T(t) = -t^3$

La proposición siguiente muestra que un operador nilpotente no nulo nunca es diagonalizable.

Proposición 4.4.6. *Si un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ es nilpotente y diagonalizable, entonces es el operador nulo.*

Dem. Si T es diagonalizable, entonces existe una base de V en la cual la matriz asociada a T es una matriz diagonal D en la cual la diagonal principal está formada por los valores propios de T. Por otro lado, vimos en la observación anterior que si T es nilpotente el único valor propio que tiene es 0. Esto implica $D = 0$ y por lo tanto T es el operador nulo. $\square$

Observación 4.4.7. Notar que si $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$ es una matriz en bloques, entonces el rango de A es la suma de los rangos de $A_1, \ldots, A_k$.

El objetivo principal de esta sección es probar que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es nilpotente, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B}$ es una matriz en bloques de la forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_h \end{pmatrix}, \; J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & & & & \\ & \lambda_i & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & & \lambda_i & 0 \\ & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \; i = 1, \ldots, h.$$

Empezamos con una proposición que prueba el recíproco de la afirmación anterior y además brinda información sobre la cantidad de bloques que aparecen en la descomposición.

Proposición 4.4.8. *1. Si $J \in M_n(\Bbbk)$ tiene la forma*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

entonces J es nilpotente de orden n.

2. Si

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} \in M_n(\Bbbk), \quad J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{p_i}(\Bbbk), \; \forall i = 1, \ldots, k. \tag{4.1}$$

siendo $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_k$, entonces

a) *A es nilpotente de orden* p_1.

b) *La cantidad de bloques* J_i *contenidos en* A *es* $k = n - \operatorname{rango}(A)$.

Dem. Operando obtenemos

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \; J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \; J^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; J^n = 0.$$

Eso prueba la primera afirmación. Para la segunda, observar que $J_i^{p_1} = J_i^{p_1 - p_i} \circ J_i^{p_i} = J_i^{p_1 - p_i} \circ 0 = 0$, para todo $i = 1, \ldots, k$, y por lo tanto

$$A^{p_1} = \begin{pmatrix} J_1^{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_k^{p_1} \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A^{p_1} = 0.$$

Luego A es nilpotente de orden menor o igual que p_1. Por otro lado $J_1^{p_1 - 1} \neq 0$, luego $A^{p_1 - 1} \neq 0$ y esto implica que el orden de nilpotencia de A es p_1.

Observar que $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$. Para cada i, la matriz $J_i \in M_{p_i}(\Bbbk)$ tiene rango $p_i - 1$, luego

$$\operatorname{rango}(A) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{rango}(J_i) = \sum_{j=1}^{k} (p_j - 1) = \sum_{j=1}^{k} p_j - k = n - k \quad \Rightarrow \quad k = n - \operatorname{rango}(A). \quad \square$$

A continuación veremos que dado un operador nilpotente, siempre se puede obtener una base del espacio de forma tal que su matriz asociada sea del tipo visto en (4.1). Empezamos con algunos resultados previos.

Proposición 4.4.9. *Sea* $T \in \mathcal{L}(V)$ *un operador nilpotente de orden* p. *Entonces*

$$\{0\} \neq \operatorname{Ker}(T) \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}\left(T^{p-1}\right) \subsetneq \operatorname{Ker}(T^p) = V. \tag{4.2}$$

Dem. Observemos primero que $\operatorname{Ker}(T^m) \subset \operatorname{Ker}\left(T^{m+1}\right)$, $\forall m \in \mathbb{N}$. En efecto, si $w \in \operatorname{Ker}(T^m)$ es

$$T^m(w) = 0 \Rightarrow T^{m+1}(w) = T\left(T^m(w)\right) = T(0) = 0 \Rightarrow w \in \operatorname{Ker}\left(T^{m+1}\right).$$

Afirmación: Si para algún l es $\operatorname{Ker}\left(T^{l+1}\right) = \operatorname{Ker}\left(T^l\right)$, entonces $\operatorname{Ker}\left(T^{l+m}\right) = \operatorname{Ker}\left(T^l\right)$, $\quad \forall m \geq 1$.

Lo probaremos por indución en m. Si $m = 1$ es la hipótesis. Supongamos ahora que para algún $m \geq 1$ es $\operatorname{Ker}\left(T^l\right) = \operatorname{Ker}\left(T^{l+m}\right)$. Queremos probar $\operatorname{Ker}\left(T^l\right) = \operatorname{Ker}\left(T^{l+m+1}\right)$. Por la observación anterior $\operatorname{Ker}\left(T^l\right) = \operatorname{Ker}\left(T^{l+m}\right) \subset \operatorname{Ker}\left(T^{l+m+1}\right)$, así que solo falta probar la otra inclusión. Sea $w \in \operatorname{Ker}\left(T^{l+m+1}\right)$,

$$0 = T^{l+m+1}(w) = T^{l+1}\left(T^m(w)\right) \Rightarrow T^m(w) \in \operatorname{Ker}\left(T^{l+1}\right) = \operatorname{Ker}\left(T^l\right) \Rightarrow$$
$$0 = T^l\left(T^m(w)\right) = T^{l+m}(w) \Rightarrow w \in \operatorname{Ker}\left(T^{l+m}\right) = \operatorname{Ker}\left(T^l\right) \Rightarrow w \in \operatorname{Ker}\left(T^l\right).$$

Esto concluye la prueba de la afirmación.

Observemos que como T es nilpotente de orden p, entonces $T^p = 0$ y $T^{p-1} \neq 0$. Luego $\operatorname{Ker}\left(T^{p-1}\right) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(T^p\right) = V$ y la afirmación anterior implica que necesariamente $\operatorname{Ker}\left(T^{l-1}\right) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(T^l\right)$, para todo $l = 1, 2, \ldots, p-1$. De acá se deduce inmediatamente (4.2). $\square$

Lema 4.4.10. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador nilpotente de orden p.*
Si $2 \leq q \leq p$ y tenemos un conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset \operatorname{Ker}(T^q)$ que es LI y $[v_1, \ldots, v_k] \cap \operatorname{Ker}\left(T^{q-1}\right) = \{0\}$, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\} \subset \operatorname{Ker}\left(T^{q-1}\right)$, es LI y $[T(v_1), \ldots, T(v_k)] \cap \operatorname{Ker}\left(T^{q-2}\right) = \{0\}$.

Dem. Como $v_i \in \operatorname{Ker}\left(T^q\right)$, es

$$0 = T^q\left(v_i\right) = T^{q-1}\left(T\left(v_i\right)\right) \Rightarrow T\left(v_i\right) \in \operatorname{Ker}\left(T^{q-1}\right), \forall i = 1, \ldots, k,$$

luego $\{T\left(v_1\right), \ldots, T\left(v_k\right)\} \subset \operatorname{Ker}\left(T^{q-1}\right)$.

Probaremos que $[T(v_1), \ldots, T(v_k)] \cap \operatorname{Ker}(T^{q-2}) = \{0\}$ y que $\{T(v_1), \ldots, T(v_k)\}$ es LI.

Sea $w \in [T(v_1), \ldots, T(v_k)] \cap \operatorname{Ker}(T^{q-2})$, luego existen $a_i \in \mathbb{k}$, $i = 1, \ldots, k$ tales que $w = \sum_{i=1}^k a_i\, T(v_i)$ y $w \in \operatorname{Ker}\left(T^{q-2}\right)$. Entonces

$$0 = T^{q-2}\left(w\right) = T^{q-2}\left(\sum_{i=1}^k a_i\, T(v_i)\right) = T^{q-1}\left(\sum_{i=1}^k a_i\, v_i\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^k a_i\, v_i \in \operatorname{Ker}\left(T^{q-1}\right) \cap [v_1, \ldots, v_k] = \{0\}.$$

luego $\sum_{i=1}^k a_i\, v_i = 0$ y $w = \sum_{i=1}^k a_i\, T(v_i) = T\left(\sum_{i=1}^k a_i\, v_i\right) = T(0) = 0$.
Esto prueba que $[T(v_1), \ldots, T(v_k)] \cap \operatorname{Ker}(T^{q-2}) = \{0\}$.

Sean $b_i \in \mathbb{k}$, $i = 1, \ldots, k$ tales que $\sum_{i=1}^k b_i\, T(v_i) = 0$. Es

$$0 = T^{q-2}(0) = T^{q-2}\left(\sum_{i=1}^k b_i\, T(v_i)\right) = T^{q-1}\left(\sum_{i=1}^k b_i\, v_i\right),$$

entonces $\sum_{i=1}^k b_i\, v_i \in \operatorname{Ker}\left(T^{q-1}\right) \cap [v_1, \ldots, v_k] = \{0\}$. Luego $\sum_{i=1}^k b_i\, v_i = 0$ y como $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es LI, resulta $b_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Esto prueba que $\{T\left(v_1\right), \ldots, T\left(v_k\right)\}$ es LI. $\square$

Lema 4.4.11. *Supongamos que W es un subespacio de V y $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ es un conjunto LI tales que $W \cap [v_1, \ldots, v_k] = \{0\}$. Entonces existen vectores $u_1, \ldots, u_h \in V$ tales que $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_h\}$ es LI y $V = W \oplus [v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_h]$.*

Dem. Si $\{w_1, \ldots, w_l\}$ es una base de W, entonces $W \cap [v_1, \ldots, v_k] = \{0\}$ implica que el conjunto $\{w_1, \ldots, w_l, v_1, \ldots, v_k\}$ es LI y por lo tanto existen $u_1, \ldots, u_h$ tales que $\{w_1, \ldots, w_l, v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_h\}$ es base de V. Luego

$$V = [w_1, \ldots, w_l] \oplus [v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_h] = W \oplus [v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_h]. \quad \square$$

Teorema 4.4.12. *Si $T \in \mathcal{L}\left(V\right)$, entonces T es nilpotente si y solo si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \ \forall i = 1, \ldots, k. \tag{4.3}$$

Dem. El recíproco es una consecuencia inmediata de la proposición 4.4.8.

Supongamos ahora que T es nilpotente de orden p. Aplicando la proposición 4.4.9 sabemos que

$$\{0\} \neq \operatorname{Ker}(T) \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(T^p) = V.$$

Para simplificar la notación supondremos $p = 3$, pero la demostración es completamente general. Tenemos

$$\{0\} \neq \operatorname{Ker}(T) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(T^2\right) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(T^3\right) = V.$$

Consideremos $\operatorname{Ker}\left(T^2\right) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(T^3\right) = V$. Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto LI tal que

$$\operatorname{Ker}\left(T^3\right) = \operatorname{Ker}\left(T^2\right) \oplus [v_1, \ldots, v_m].$$

Entonces $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es LI y $[v_1, \ldots, v_m] \cap \operatorname{Ker}\left(T^2\right) = \{0\}$, luego el lema 4.4.10 implica

$$\{T(v_1), \ldots, T(v_m)\} \subset \operatorname{Ker}\left(T^2\right), \quad \{T(v_1), \ldots, T(v_m)\} \text{ es LI} \quad \text{y} \quad [T(v_1), \ldots, T(v_m)] \cap Ker(T) = \{0\}.$$

Consideremos $\operatorname{Ker}(T) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(T^2\right)$. Por el lema 4.4.11 sabemos que existen $u_1, \ldots, u_q$ en $\operatorname{Ker}\left(T^2\right)$ tales que:

$$\{T(v_1), \ldots, T(v_m), u_1, \ldots, u_q\} \subset \operatorname{Ker}\left(T^2\right) \text{ es LI y } \operatorname{Ker}\left(T^2\right) = \operatorname{Ker}(T) \oplus [T(v_1), \ldots, T(v_m), u_1, \ldots, u_q].$$

Luego $[T(v_1), \ldots, T(v_m), u_1, \ldots, u_q] \cap \operatorname{Ker}(T) = \{0\}$.

Ahora repetimos el procedimiento anterior con $\{T(v_1), \ldots, T(v_m), u_1, \ldots, u_q\}$ en lugar de $\{v_1, \ldots, v_m\}$:

Primero aplicamos el lema 4.4.10 para deducir que el conjunto $\{T^2(v_1), \ldots, T^2(v_m), T(u_1), \ldots, T(u_q)\}$ está contenido en $\operatorname{Ker}(T)$ y es LI. Luego mediante el lema 4.4.11 deducimos que existen $w_1, \ldots, w_r$ en $\operatorname{Ker}(T)$ tales que

$$\{T^2(v_1), \ldots, T^2(v_m), T(u_1), \ldots, T(u_q), w_1, \ldots, w_r\}$$

es base de $\operatorname{Ker}(T)$. Sean

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \{v_1, \ldots, v_m\}, \\
\mathcal{B}_2 &= \{T(v_1), \ldots, T(v_m), u_1, \ldots, u_q\}, \\
\mathcal{B}_3 &= \{T^2(v_1), \ldots, T^2(v_m), T(u_1), \ldots, T(u_q), w_1, \ldots, w_r\}
\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$V = \operatorname{Ker}\left(T^3\right) = \operatorname{Ker}\left(T^2\right) \oplus [\mathcal{B}_1], \qquad \operatorname{Ker}\left(T^2\right) = \operatorname{Ker}(T) \oplus [\mathcal{B}_2], \qquad \operatorname{Ker}(T) = [\mathcal{B}_3].$$

Luego, $V = [\mathcal{B}_1] \oplus [\mathcal{B}_2] \oplus [\mathcal{B}_3]$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ es base de V. Reordenando la base $\mathcal{B}$ se tiene:

$$\mathcal{B} = \{T^2(v_1), T(v_1), v_1, \ldots, T^2(v_m), T(v_m), v_m, T(u_1), u_1, \ldots, T(u_q), u_q, w_1, \ldots, w_r\}$$

Observar que $\mathcal{B}_3 \subset \operatorname{Ker}(T)$, esto implica:

$$T^3(v_1) = \cdots = T^3(v_m) = 0, \quad T^2(u_1) = \cdots = T^2(u_q) = 0, \quad T(w_1) = \cdots = T(w_r) = 0.$$

Luego

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ & & & & & & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Definición 4.4.13. La matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ en (4.3) es la *forma de Jordan* de T, cada submatriz J_i es un *bloque de Jordan* de T y $\mathcal{B}$ es una *base de Jordan* para T.

Observación 4.4.14. Notar que cada bloque de Jordan J de tamaño l corresponde a un *ciclo* de la base, que es un conjunto $\mathcal{C}$ de la forma

$$\mathcal{C} = \left\{T^{l-1}(v), T^{l-2}(v), \ldots, T^2(v), T(v), v\right\}, \text{ con } T^l(v) = 0.$$

Si escribimos $v_0 = v,\ v_1 = T(v),\ v_2 = T^2(v), \ldots, v_{l-1} = T^{l-1}(v)$ es $\mathcal{C} = \{v_{l-1}, v_{l-2}, \ldots, v_2, v_1, v_0\}$ y

$$T(v_{l-1}) = 0,\ T(v_{l-2}) = v_{l-1},\ T(v_{l-3}) = v_{l-4}, \ldots, T(v_1) = v_2,\ T(v_0) = v_1.$$

Luego v_{l-1} está en el núcleo de T y es el único elemento de $\mathcal{C}$ que lo verifica.

Observación 4.4.15. De acuerdo a la proposición 4.4.8, la cantidad de bloques de $[T]_{\mathcal{B}}$ en (4.3), coincide con $\dim V - \operatorname{rango}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T)$.

Corolario 4.4.16. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\dim V = n$, entonces T es nilpotente si y solo si $\chi_T(t) = (-1)^n t^n$.*

En particular, si T es nilpotente entonces χ_T escinde.

Dem. El recíproco es inmediato a partir del teorema de Cayley-Hamilton. El directo se deduce inmediatamente de (4.3), que muestra que $[T]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior con ceros en la diagonal principal. $\square$

En los ejemplos siguientes aplicaremos la observación 4.4.15 para determinar la cantidad de bloques en la forma de Jordan y la proposición 4.4.8 para determinar la forma de Jordan.

Ejemplo 4.4.17. Consideremos de nuevo $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ definida por $T(p(x)) = p'(x)$ (ejemplo 4.4.5). Observar que

$$\operatorname{Ker}(T) = \{a :\ a \in \mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Ker}\left(T^2\right) = \{ax + b :\ a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Ker}\left(T^3\right) = \mathbb{R}_2[x].$$

Luego es $\{0\} \neq \operatorname{Ker}(T) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(T^2\right) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(T^3\right) = \mathbb{R}_2[x]$. Como $\dim \operatorname{Ker}(T) = 1$, deducimos que la forma de Jordan de T tiene un solo bloque y la base de Jordan está generada por un elemento de $\mathbb{R}_2[x] \setminus \operatorname{Ker}\left(T^2\right)$. Por ejemplo tomando x^2 obtenemos que $\mathcal{B} = \left\{T^2\left(x^2\right),\ T\left(x^2\right),\ x^2\right\} = \left\{2,\ 2x,\ x^2\right\}$ es una base de Jordan para T y $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 4.4.18. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ definida por $T(x,y,z,t) = (3y+2t, 0, 2t, 0)$, para todo $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Observar que $T^2 = 0$, luego es $\{0\} \neq \operatorname{Ker}(T) \subsetneq \operatorname{Ker}\left(T^2\right) = \mathbb{R}^4$. Es $\operatorname{Ker}(T) = \{(x,0,z,0) : \ x,z \in \mathbb{R}\}$. Como $\dim \operatorname{Ker}(T) = 2$, sabemos que la forma de Jordan de T tiene dos bloques que podrían ser de tamaños $(2,2)$ o $(3,1)$. Al ser $T^2 = 0$ deducimos que no hay bloques de tamaño 3; luego la forma de Jordan tiene dos bloques tienen tamaño 2 que están generados por un par de elementos linealmente independientes u, v tales que $[u,v] \cap \operatorname{Ker}(T) = \{0\}$. Por ejemplo si $u = (0,1,0,0)$ y $v = (0,0,0,1)$, es

$$\mathcal{B} = \{T(u), u, T(v), v\} = \{(3,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (2,0,2,0),\ (0,0,0,1)\}, \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.4.19. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ definida por $T(x,y,z,t) = (0, 2z+2t, 2t, 0)$, para todo $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Observar que $T = L_A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^3 = 0.$$

Es $\dim \operatorname{Ker}(T) = 2$. Luego la forma de Jordan de T tiene dos bloques que como en el ejemplo anterior pueden ser de tamaños $(2,2)$ o $(3,1)$. Como A es nilpotente de orden 3 deducimos tenemos un bloque de tamaño 3 y otro bloque de tamaño 1. El bloque de tamaño 1 es generado por un elemento del núcleo de T y el de tamaño 3 corresponde a un ciclo generado por un vector $u \notin \operatorname{Ker}\left(T^2\right)$. Por ejemplo $u = (0,0,0,1) \notin \operatorname{Ker}\left(T^2\right)$ y $T(u) = (0,2,2,0)$, $T^2(u) = (0,4,0,0)$. Luego alcanza con tomar $v \in \operatorname{Ker}(T)$ tal que $\left\{T^2(u), T(u), u, v\right\}$ sea LI. Por ejemplo $v = (1,0,0,0)$ lo verifica y obtenemos

$$\mathcal{B} = \left\{T^2(u), T(u), u, v\right\} = \{(0,4,0,0),\ (0,2,2,0),\ (0,0,0,1),\ (1,0,0,0)\}, \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4.2. Caso general

Recordemos que un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable si y sólo si existe una base $\mathcal{B}$ de V formada por vectores propios de T. En ese caso si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad T(v_i) = \lambda_i\, v_i,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

También vimos que no todo operador es diagonalizable, aún si el polinomio característico escinde. Un ejemplo de esto son los operadores nilpotentes estudiados en la sección anterior (ver la proposición 4.4.6 y el corolario 4.4.16).

Probaremos que si $\chi_T(t)$ escinde en $\Bbbk$, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_h \end{pmatrix}, \ J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \lambda_i & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \ i = 1, \ldots, h.$$

Observar que $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ son los valores propios de T. Cada matriz J_i es un *bloque de Jordan* correspondiente al valor propio λ_i (pueden haber varios bloques correspondientes al mismo valor propio). Cuando ordenamos los bloques que forman $[T]_{\mathcal{B}}$ de forma tal que ponemos juntos los bloques correspondientes a los mismos valores propios y estos los ordenamos en tamaños decrecientes, entonces a $[T]_{\mathcal{B}}$ le llamamos la *forma canónica de Jordan*[2] de T y decimos que $\mathcal{B}$ es una *base de Jordan* para T.

Ejemplo 4.4.20. Una forma canónica de Jordan de un operador es una matriz del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & 3 & 1 & & \\ & & & & 0 & 3 & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

en el cual omitimos los ceros fuera de los bloques de Jordan de A.

Teorema 4.4.21. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces existe una base de Jordan para T si y solo si χ_T escinde en $\Bbbk$.*

Dem. ($\Rightarrow$): Sea $\mathcal{B}$ una base de Jordan para T. Entonces

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_q \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & & & \\ & \mu_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_i & 1 \\ & & & & \mu_i \end{pmatrix} \in M_{m_i}(\Bbbk).$$

Luego $\chi_T(t) = \prod_{i=1}^q \det(J_i - t\,\mathrm{Id}) = \prod_{i=1}^q (\mu_i - t)^{m_i}$ escinde en $\Bbbk$.

($\Leftarrow$): Supongamos que $\chi_T(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_h)^{n_h}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Como $\chi_T(T) = 0$ es $p(T) = 0$ siendo $p(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} \ldots (t-\lambda_h)^{n_h}$ y como $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, es $\operatorname{mcd}\left((t-\lambda_i)^{n_i}, (t-\lambda_j)^{n_j}\right) = 1$ si $i \neq j$, luego aplicando el teorema 4.2.13 obtenemos

$$V = \bigoplus_{i=1}^{h} \operatorname{Ker}(T - \lambda_i\,\mathrm{Id})^{n_i}.$$

Sea $W_i = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i\,\mathrm{Id})^{n_i}$. Observar que $W_i = \operatorname{Ker} p_i(T)$, siendo $p_i(x) = (x-\lambda_i)^{n_i} \in \Bbbk[x]$, luego W_i es un subespacio T-invariante y $V = \bigoplus_{i=1}^h W_i$. En esta situación, la proposición 4.1.3 implica que si $\mathcal{B}_i$ es una base de W_i, entonces $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_h$ es una base de V y la matriz asociada a T en esa base tiene la forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_h \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } A_i = [T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i},\ \forall i = 1, \ldots, h. \tag{4.4}$$

A continuación veremos cómo obtener $\mathcal{B}_i$ en forma adecuada.

[2] Se prueba que la forma de Jordan es única a menos de reordenar los valores propios, lo cual justifica el referirnos a $[T]_{\mathcal{B}}$ como **la** forma de Jordan de T (ver la observación 4.4.24).

Empezamos observando que $(T|_{W_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{W_i})^{n_i} = \left(T - \lambda_i \operatorname{Id}|_{W_i}\right)^{n_i} = (T - \lambda_i \operatorname{Id})^{n_i}|_{W_i} = 0$. Luego $T|_{W_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{W_i} \in \mathcal{L}(W_i)$ es nilpotente. Entonces aplicando el teorema 4.4.12 a $T|_{W_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{W_i}$ deducimos que existe $\mathcal{B}_i$ base de W_i tal que

$$[T|_{W_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{W_i}]_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{J}_{k_i}^i \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \tilde{J}_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \ \forall j = 1, \dots, k_i.$$

Observar que $T|_{W_i} = T|_{W_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{W_i} + \lambda_i \operatorname{Id}_{W_i}$, luego $[T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i} = [T|_{W_i} - \lambda_i \operatorname{Id}_{W_i}]_{\mathcal{B}_i} + \lambda_i I$ y por lo tanto

$$A_i = [T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} J_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_i}^i \end{pmatrix}, \quad \text{donde } J_j^i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \ \forall j = 1, \dots, k_i.$$

Finalmente, si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_h$, es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_h \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} J_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_i}^i \end{pmatrix}, \quad J_j^i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

para todo $i = 1, \dots, h$ y $j = 1, \dots, k_i$. $\square$

Notar que cada bloque de Jordan J corresponde a un subconjunto $\mathcal{C}$ de la base $\mathcal{B}$ de la forma

$$\mathcal{C} = \left\{(T - \lambda \operatorname{Id})^{l-1}(v), (T - \lambda \operatorname{Id})^{l-2}(v), \dots, (T - \lambda \operatorname{Id})^2(v), (T - \lambda \operatorname{Id})(v), v\right\}, \text{ con } (T - \lambda \operatorname{Id})^l(v) = 0.$$

El conjunto $\mathcal{C}$ se dice que es un *ciclo* de T correspondiente al valor propio λ. Luego $\mathcal{B}$ es una base de V que es unión disjunta de ciclos.

Observación 4.4.22. Como en $\mathbb{C}$ todo polinomio escinde, del teorema anterior se deduce que en un espacio vectorial complejo todo operador admite una base de Jordan.

La siguiente proposición simplifica el hallar la forma de Jordan.

Proposición 4.4.23. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que su polinomio característico escinde y $\mathcal{B}$ una base de Jordan para T. Supongamos que*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_h \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

y cada bloque A_i es de la forma

$$A_i = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}, \quad J_l = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \ l = 1, \dots, k, \tag{4.7}$$

siendo $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ los valores propios distintos de T. Entonces para cada $i = 1, \dots, h$ vale

- *El tamaño del bloque A_i es la multiplicidad algebraica de λ_i.*
- *La cantidad de bloques de Jordan contenidos en A_i es la multiplicidad geométrica de λ_i.*

Dem. Sea $n = \dim V$ y n_i el tamaño de A_i, para cada $i = 1, \dots, h$. Observar que cada matriz A_i es triangular superior con λ_i en la diagonal principal, luego

$$\chi_T(t) = \chi_{[T]_{\mathcal{B}}}(t) = \prod_{i=1}^{h} \det(A_i - tI) = \prod_{i=1}^{h} (\lambda_i - t)^{n_i} = (-1)^n \prod_{i=1}^{h} (t - \lambda_i)^{n_i}.$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, deducimos $n_i = MA(\lambda_i)$, para todo $i = 1, \dots, h$. Esto prueba la primer afirmación.

Sea $i \in \{1, \dots, h\}$ arbitrario fijo y supongamos que A_i tiene la forma dada en (4.7). Luego

$$A_i - \lambda_i I = \begin{pmatrix} \tilde{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{J}_k \end{pmatrix}, \quad \tilde{J}_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \ l = 1, \dots, k.$$

Notar que la cantidad y tamaño de bloques de Jordan contenidos en A_i coincide con los de la matriz nilpotente $A_i - \lambda_i I$, luego la última parte de la proposición 4.4.8 implica que la cantidad de bloques de Jordan contenidos en A_i es $k = n_i - \operatorname{rango}(A_i - \lambda_i I)$.

Por otro lado, si $j \neq i$, la matriz $A_j - \lambda_i I$ es triangular superior con $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ en la diagonal principal, luego $A_j - \lambda_i I \in M_{n_j}(\Bbbk)$ es invertible y por lo tanto $\operatorname{rango}(A_j - \lambda_i I) = n_j$, para todo $j \neq i$. Esto implica

$$\begin{aligned} MG(\lambda_i) &= \dim V - \operatorname{rango}(T - \lambda_i \operatorname{Id}) = n - \operatorname{rango}\left([T]_{\mathcal{B}} - \lambda_i I\right) = \sum_{j=1}^{h} n_j - \sum_{j=1}^{h} \operatorname{rango}(A_j - \lambda_i I) \\ &= \sum_{j=1}^{h} n_j - \left(\sum_{j \neq i} \operatorname{rango}(A_j - \lambda_i I) + \operatorname{rango}(A_i - \lambda_i I) \right) = \sum_{j=1}^{h} n_j - \left(\sum_{j \neq i} n_j + \operatorname{rango}(A_i - \lambda_i I) \right) \\ &= n_i - \operatorname{rango}(A_i - \lambda_i I) = k. \end{aligned}$$

Esto prueba la segunda afirmación. □

Observación 4.4.24. Notar que la proposición anterior muestra que en la forma de Jordan de un operador, la cantidad de bloques A_i y la cantidad de sub-bloques de Jordan de cada A_i no depende de la elección de la base de Jordan. También se puede probar que los tamaños de los bloques de Jordan contenidos en A_i no dependen de la base (ver el teorema 5.7.2). Luego la forma de Jordan de un operador es única a menos de reordenar los valores propios.

Ejemplo 4.4.25. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ definida por $T(x, y, z) = (3x + y - 2z, -x + 5z, -x - y + 4z)$. Observar que $T = L_A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Es $\chi_T(t) = \chi_A(t) = -(t-3)(t-2)^2$, luego los valores propios de T son 2 y 3 y la forma de Jordan de T tiene un bloque A_1 de tamaño 1 correspondiente al valor propio 3 y un bloque A_2 de tamaño 2 correspondiente al valor propio 2. Es

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \operatorname{rango}(A - 2I) = 2.$$

Luego $\mathrm{MG}(2)=1$. Esto implica A_2 tiene un solo bloque de Jordan, luego la forma de Jordan de T es

$$J=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora obtendremos una base de Jordan. Sabemos que

$$\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker}(T-3\,\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Ker}(T-2\,\mathrm{Id})^2,$$

siendo $\dim\operatorname{Ker}(T-3\,\mathrm{Id})=1$ y $\dim\operatorname{Ker}(T-2\,\mathrm{Id})^2=2$.

Como ya conocemos J, sabemos que esta base va a estar formada por un vector propio correspondiente al valor propio 3 y un ciclo de longitud 2 correspondiente al valor propio 2. Este ciclo va a estar generado por un vector $v\in\operatorname{Ker}(T-2\,\mathrm{Id})^2\setminus\operatorname{Ker}(T-2\,\mathrm{Id})$. Operando obtenemos

$$\operatorname{Ker}(T-3\,\mathrm{Id})=[(-1,2,1)],\quad \operatorname{Ker}(T-2\,\mathrm{Id})^2=[(1,0,2),(0,1,1)].$$

Observar que $(0,1,1)\in\operatorname{Ker}(T-2\,\mathrm{Id})^2\setminus\operatorname{Ker}(T-2\,\mathrm{Id})$, luego

$$\{(T-2\ \mathrm{Id})(0,1,1),\ (0,1,1)\}=\{(-1,3,1),\ (0,1,1)\}$$

es un ciclo como el que estamos buscando y $\mathcal{B}=\{(-1,2,1),(-1,3,1),(0,1,1)\}$ es una base de Jordan para T tal que $[T]_{\mathcal{B}}=J$.

Ejemplo 4.4.26. Sea $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ definida por $T(p(x))=-p(x)-p'(x)$.

Si $\mathcal{C}=\{x^2,x,1\}$ es

$$A=[T]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego $\chi_T(t)=-(t+1)^3$ y el único valor propio de T es -1 con $\mathrm{MA}(-1)=3$. Observar que $(T+\mathrm{Id})\big(p(x)\big)=-p'(x)$, luego $\operatorname{Ker}(T+\mathrm{Id})=\{a:\ a\in\mathbb{R}\}$ y $\mathrm{MG}(-1)=1$. Esto implica que hay un solo bloque correspondiente al valor propio -1 y la forma de Jordan de T es

$$J=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a la forma de J, deducimos que la base de Jordan es un ciclo de longitud 3 de la forma $\mathcal{B}=\big\{(T+\mathrm{Id})^2(v),(T+\mathrm{Id})(v),v\big\}$, siendo $v\in\mathbb{R}_2[x]\setminus\operatorname{Ker}(T+\mathrm{Id})^2$. Como $(T+\mathrm{Id})^2\big(p(x)\big)=p''(x)$, deducimos que $\operatorname{Ker}(T+\mathrm{Id})^2=\{ax+b:\ a,b\in\mathbb{R}\}$ y por lo tanto $x^2\in\mathbb{R}_2[x]\setminus\operatorname{Ker}(T+\mathrm{Id})^2$. Entonces $\mathcal{B}=\{2,-2x,x^2\}$ es una base de Jordan para T. Observar que las matrices A y J están relacionadas por la fórmula de cambio de base $A=QJQ^{-1}$, siendo

$$Q={}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.4.27. Sea $T\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ definida por $T(x,y,z)=(2x,-y+3z,-3y+5z)$. Es $T=L_A$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Luego $\chi_T(t) = -(t-2)^3$ y 2 es el único valor propio de T. Observar que $MG(2) = 3 - \text{rango}(A - 2I) = 2$, por lo cual T tiene dos bloques de Jordan. Como la suma de los tamaños de los dos bloques tiene que dar 3, deducimos que la forma de Jordan de T es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego la base de Jordan tiene de la forma $\mathcal{B} = \{(T - 2\,\mathrm{Id})(u), u, v\}$ siendo $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id})$ y $v \in \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id})$ tal que $\{(T - 2\,\mathrm{Id})(u), v\}$ es LI. Operando obtenemos

$$\mathrm{Ker}\,(T - 2\,\mathrm{Id}) = [(1,0,0)\,,(0,1,1)].$$

El vector $u = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id})$ y $(T - 2\,\mathrm{Id})\,(u) = (0,3,3) \in \mathrm{Ker}\,(T - 2\,\mathrm{Id})$. Ahora tenemos que encontrar un vector en $v \in \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id})$ que no sea colineal con $(0,3,3)$, por ejemplo $v = (1,0,0)$. Así $\mathcal{B} = \{(0,3,3)\,,(0,0,1)\,,(1,0,0)\}$ es una base de Jordan y $[T]_{\mathcal{B}} = J$.

Observación 4.4.28. Una consecuencia del teorema de existencia de bases de Jordan, es que si el polinomio característico de un operador T escinde, entonces T se escribe de forma única como $T = S + N$, donde S es diagonalizable, N es nilpotente y $S \circ N = N \circ S$. Esta es la *descomposición de Jordan* del operador T. La prueba de este resultado está guiada en un ejercicio de la lista final.

4.4.3. Forma de Jordan y polinomio minimal

Ahora veremos de relacionar la forma de Jordan con el polinomio minimal.

Proposición 4.4.29. *1. Si*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\Bbbk).$$

Entonces $m_J(t) = (t-\lambda)^n$.

2. Si

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} \in M_n(\Bbbk), \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_{p_i}(\Bbbk),$$

con $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_k$. Entonces $m_A(t) = (t-\lambda)^{p_1}$.

3. Si

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_h \end{pmatrix} \in M_n(\Bbbk), \quad A_i = \begin{pmatrix} J_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_i}^i \end{pmatrix} \in M_{n_i}(\Bbbk),\ \forall i = 1,\dots,h,$$

$$J_j^i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{p_j^i}(\Bbbk),\ \forall j = 1,\dots,k_i,$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ *si* $i \neq j$ *y* $p_i = p_1^i \geq p_2^i \geq \cdots \geq p_{k_i}^i$, *para todo* $i = 1, \ldots, h$. *Entonces*

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{p_1} \cdots (t - \lambda_h)^{p_h}.$$

Dem. Las afirmaciones (1) y (2) se deducen de la proposición 4.4.8 considerando $J - \lambda I$ y $A - \lambda I$, respectivamente.

(3): Es $\chi_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_h)^{n_h}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Luego $m_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_h)^{m_h}$, con $1 \leq m_i \leq n_i$, $\forall i = 1, \ldots, h$.

Sea $p(t) = (t - \lambda_1)^{q_1} \cdots (t - \lambda_h)^{q_h}$. Es

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(A_h) \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} p(A) = 0 &\Leftrightarrow p(A_i) = 0, \ \forall i = 1, \ldots, h \\ &\Leftrightarrow m_{A_i}(t) | \, p(t), \ \forall i = 1, \ldots, h \\ &\Leftrightarrow (t - \lambda_i)^{p_i} | \, (t - \lambda_1)^{q_1} \cdots (t - \lambda_h)^{q_h}, \ \forall i = 1, \ldots, h \\ &\Leftrightarrow p_i \leq q_i, \ \forall i = 1, \ldots, h. \end{aligned}$$

Entonces $m_A(t) = (t - \lambda_1)^{p_1} \cdots (t - \lambda_h)^{p_h}$. □

Corolario 4.4.30. *Si el polinomio caratcerístico de un operador escinde, entonces para cada valor propio* λ*, el exponente de* $t - \lambda$ *en la descomposición factorial del polinomio minimal coincide con el tamaño del mayor bloque de Jordan correspondiente a* λ. □

Ejemplo 4.4.31. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ del que se sabe que $(T - 5\,\mathrm{Id})^2 = 0$ y $T \neq 5\,\mathrm{Id}$. Las condiciones anteriores implican que $m_T(t) = (t-5)^2$, luego $\chi_T(t) = -(t-5)^3$. Sabemos que la forma de Jordan tiene tamaño 3 y en la misma solo hay bloques correspondientes al valor propio 5 y de estos el más grande tiene tamaño 2. Luego la forma de Jordan de T es

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.4.32. Sea $A \in M_4(\mathbb{C})$ que verifica $(A - 5I)^2 = 0$, $A \neq 5I$. Estas condiciones implican $m_A(t) = (t-5)^2$, luego $\chi_A(t) = (t-5)^4$. Por la forma del polinomio minimal de A, sabemos que el tamaño del mayor bloque de la forma de Jordan de A es 2, luego las posibles formas de Jordan de A son

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para determinar la forma de Jordan necesitamos algún otro dato. Por ejemplo, si sabemos el rango de $A - 5I$, entonces la forma de Jordan de A es la primera si rango$(A - 5I) = 2$ y es la segunda si rango$(A - 5I) = 1$.

Capítulo 5

Apéndice

5.1. Polinomios

En esta sección $\Bbbk$ es un cuerpo arbitrario.

Polinomios de Lagrange

Proposición 5.1.1. *Si $c_1, \ldots, c_k$ elementos distintos de $\Bbbk$, entonces existen $p_1(x), \ldots, p_k(x) \in \Bbbk[x]$ tales que $p_i(c_j) = \delta_{ij}$, $\forall i, j = 1, \ldots, k$.*

Dem. Definimos $p_1(x), \ldots, p_k(x)$ mediante

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - c_j}{c_i - c_j} = \frac{(x - c_1)}{(c_i - c_1)} \cdots \frac{(x - c_{i-1})}{(c_i - c_{i-1})} \frac{(x - c_{i+1})}{(c_i - c_{i+1})} \cdots \frac{(x - c_k)}{(c_i - c_k)}, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

$$\text{Luego} \quad p_i(c_l) = \prod_{j \neq i} \frac{c_l - c_j}{c_i - c_j} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & l \neq i \\ \prod_{j \neq i} \frac{c_i - c_j}{c_i - c_j} = 1, & l = i \end{array} \right\} = \delta_{il}, \ \forall i, l = 1, \ldots, k.$$

□

Los polinomios $p_1(x), \ldots, p_k(x)$ obtenidos en la proposición anterior se llaman los *polinomios de Lagrange* asociados a $c_1, \ldots, c_k$.

Proposición 5.1.2. *Sean $c_1, \ldots, c_k$ elementos distintos de $\Bbbk$ y $b_1, \ldots, b_k$ elementos de $\Bbbk$. Entonces existe un polinomio $p(x) \in \Bbbk[x]$ tal que $p(c_i) = b_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$.*

Dem. Sea $p(x) = \sum_{i=1}^k b_i\, p_i(x)$, siendo $p_1(x), \ldots, p_k(x)$ los polinomios de Lagrange asociados a $c_1, \ldots, c_k$. Luego $p(c_l) = \sum_{i=1}^k b_i\, p_i(c_l) = \sum_{i=1}^k b_i\, \delta_{il} = b_l$, $\forall l = 1, \ldots, k$. □

Máximo común divisor

Definición 5.1.3. Un polinomio $p(x)$ es *mónico* si es no nulo y el coeficiente de su término de mayor grado es 1, es decir si es de la forma $p(x) = x^m + a_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$, con $m \geq 1$.

Sean $p(x)$ y $q(x)$ en $\Bbbk[x]$ no simultáneamente nulos. Recordemos que el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ es el único polinomio mónico $d(x)$ que verifica $d(x)|p(x)$, $d(x)|q(x)$ y si $m(x) \in \Bbbk[x]$ es tal que $m(x)|p(x)$, $m(x)|q(x)$, entonces $m(x)|d(x)$. En esta situación escribimos $d(x) = \operatorname{mcd}(p(x), q(x))$.

Observar que si $p(x) \neq 0$ entonces $\operatorname{mcd}(p(x), 0) = \frac{1}{a}\, p(x)$, siendo a el coeficiente del término de mayor grado de $p(x)$.

En los cursos de secundaria se prueba que si tenemos $p(x)$ y $q(x)$ en $\mathbb{k}[x]$ con $q(x)$ no nulo y gr $p(x) \geq$ gr $q(x)$, entonces $\operatorname{mcd}(p(x), q(x)) = \operatorname{mcd}(q(x), r(x))$, siendo $r(x)$ el resto de dividir $p(x)$ por $q(x)$. Iterando este proceso obtenemos el *algoritmo de Euclides* que permite obtener el máximo común divisor de dos polinomios:

$$\left.\begin{array}{rcl} p(x) & = & q(x)\, d_1(x) + r_1(x), \quad \text{gr } r_1(x) < \text{gr } q(x) \\ q(x) & = & r_1(x)\, d_2(x) + r_2(x), \quad \text{gr } r_2(x) < \text{gr } r_1(x) \\ r_1(x) & = & r_2(x)\, d_3(x) + r_3(x), \quad \text{gr } r_3(x) < \text{gr } r_2(x) \\ r_2(x) & = & r_3(x)\, d_4(x) + r_4(x), \quad \text{gr } r_4(x) < \text{gr } r_3(x) \\ & \vdots & \\ r_{n-2}(x) & = & r_{n-1}(x)\, d_n(x) + r_n(x), \quad \text{gr } r_n(x) < \text{gr } r_{n-1}(x) \\ r_{n-1}(x) & = & r_n(x)\, d_{n+1}(x), \quad r_{n+1}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{mcd}(p(x), q(x)) = \frac{1}{a} r_n(x). \tag{5.1}$$

siendo a el coeficiente del término de mayor grado de $r_n(x)$.

Ejemplo 5.1.4. Sean $x^8 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ y $x^6 - x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1$ en $\mathbb{R}[x]$.

$$\begin{array}{rcl} x^8 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 & = & (x^6 - x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1)(x^2) + x^3 + x^2 + x + 1 \\ x^6 - x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1 & = & (x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x + 3) + x^2 - x - 2 \\ x^3 + x^2 + x + 1 & = & (x^2 - x - 2)(x + 2) + 5x + 5 \\ x^2 - x - 2 & = & (5\,x + 5)(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}) \end{array}$$

luego $\operatorname{mcd}(x^8 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1, x^6 - x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1) = x + 1$.

Proposición 5.1.5. *Sean $p(x)$ y $q(x)$ en $\mathbb{k}[x]$ no simultáneamente nulos. Entonces existen $a(x)$ y $b(x)$ en $\mathbb{k}[x]$ tales que*

$$\operatorname{mcd}(p(x), q(x)) = a(x)\, p(x) + b(x)\, q(x). \tag{5.2}$$

Dem. Si $q(x) = 0$ entonces $\operatorname{mcd}(p(x), 0) = \frac{1}{a}\, p(x)$, siendo a el coeficiente del término de mayor grado de $p(x)$. Luego es $a(x) = \frac{1}{a}$ y $b(x) = 0$.

Supongamos que tenemos $p(x)$ y $q(x)$ en $\mathbb{k}[x]$ no nulos con gr $p(x) \geq$ gr $q(x)$. Consideremos el algoritmo de Euclides (5.1). Probaremos por inducción que para todo $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existen polinomios $a_l(x)$ y $b_l(x)$ tales que

$$r_l(x) = a_l(x)\, p(x) + b_l(x)\, q(x).$$

Luego la relación (5.2) se obtiene considerando el caso $l = n$ y dividiendo por el coeficiente del término de mayor grado de $r_n(x)$.

Observar que de la primera ecuación de (5.1) deducimos $r_1(x) = d(x)\, p(x) - q(x)$, si llamamos $a_1(x) = d(x)$ y $b_1(x) = -1$, es

$$r_1(x) = a_1(x)\, p(x) + b_1(x)\, q(x).$$

De la segunda ecuación de (5.1) obtenemos

$$\begin{aligned} r_2(x) &= -d_2(x)\, r_1(x) + q(x) = -d_2(x)\,(a_1(x)\, p(x) + b_1(x)\, q(x)) + q(x) \\ &= (-d_2(x)\, a_1(x))\, p(x) + (1 - d_2(x)\, b_1(x))\, q(x). \end{aligned}$$

Si llamamos $a_2(x) = -d_2(x)\, a_1(x)$ y $b_2(x) = 1 - d_2(x)\, b_1(x)$, es

$$r_2(x) = a_2(x)\, p(x) + b_2(x)\, q(x).$$

Razonando inductivamente, sea $h < n$ y supongamos que para todo $l \leq h$ es $r_l(x) = a_l(x)\,p(x) + b_l(x)\,q(x)$. Despejando $r_{h+1}(x)$ en (5.1) obtenemos

$$\begin{aligned} r_{h+1}(x) &= -r_h(x)\,d_{h+1}(x) + r_{h-1}(x) \\ &= -(a_h(x)\,p(x) + b_h(x)\,q(x))\,d_{h+1}(x) + a_{h-1}(x)\,p(x) + b_{h-1}(x)\,q(x) \\ &= (-a_h(x)\,d_{h+1}(x) + a_{h-1}(x))\,p(x) + (-b_h(x)\,d_{h+1}(x) + b_{h-1}(x))\,q(x) \\ &= a_{h+1}(x)\,p(x) + b_{h+1}(x)\,q(x), \end{aligned}$$

siendo $a_{h+1} = -a_h(x)\,d_{h+1}(x) + a_{h-1}(x)$ y $b_{h+1}(x) = -b_h(x)\,d_{h+1}(x) + b_{h-1}(x)$. $\square$

Ejemplo 5.1.6. Sean $p(x) = x^6 - x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1$ y $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en $\mathbb{R}[x]$. Aplicando el algoritmo de Euclides obtenemos

$$\begin{array}{rcl} x^6 - x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1 &=& (x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x + 3) + x^2 - x - 2 \\ x^3 + x^2 + x + 1 &=& (x^2 - x - 2)(x + 2) + 5x + 5 \\ x^2 - x - 2 &=& (5\,x + 5)(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}) \end{array}$$

luego $\operatorname{mcd}(p(x), q(x)) = x + 1$.

Observar que es

$$\begin{array}{rcl} p(x) &=& q(x)\,d_1(x) + r_1(x), \quad \text{gr } r_1(x) < \text{gr } q(x) \\ q(x) &=& r_1(x)\,d_2(x) + r_2(x), \quad \text{gr } r_2(x) < \text{gr } r_1(x) \\ r_1(x) &=& r_2(x)\,d_3(x), \quad r_3(x) = 0. \end{array}$$

Luego despejando $r_2(x)$ de las dos primeras ecuaciones obtenemos

$$r_2(x) = -d_2(x)\,p(x) + (1 + d_1(x)\,d_2(x))\,q(x) \tag{5.3}$$

siendo $r_2(x) = 5x + 5$, $d_1(x) = x^3 - x^2 - x + 3$ y $d_2(x) = x + 2$. Si substituimos $r_2(x)$, $d_1(x)$ y $d_2(x)$ en (5.3) llegamos a

$$5x + 5 = -(x + 2)\,p(x) + (x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 7)\,q(x),$$

luego $x + 1 = -\frac{1}{5}(x + 2)\,p(x) + \frac{1}{5}(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 7)\,q(x)$ (verficarlo!).

Proposición 5.1.7. *Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios no nulos. Entonces se verifica que* $\operatorname{mcd}(p(x), q(x)) = 1$ *si y solo si existen $a(x)$ y $b(x)$ en $\Bbbk[x]$ tales que*

$$a(x)\,p(x) + b(x)\,q(x) = 1.$$

Dem. Si $\operatorname{mcd}(p(x), q(x)) = 1$, entonces la proposición anterior nos prueba que existen $a(x)$ y $b(x)$ en $\Bbbk[x]$ tales que $a(x)\,p(x) + b(x)\,q(x) = 1$.

Supongamos que existen polinomios $a(x)$ y $b(x)$ que verifican $a(x)\,p(x) + b(x)\,q(x) = 1$. Si $m(x)$ divide a $p(x)$ y a $q(x)$, entonces $m(x)$ divide a $a(x)\,p(x) + b(x)\,q(x) = 1$, luego $m(x) \in \Bbbk$. Esto prueba que $\operatorname{mcd}(p(x), q(x)) = 1$. $\square$

5.2. Rango por determinantes

En esta sección el cuerpo $\Bbbk$ es arbitrario. Recordar que si A es una matriz $m \times n$ con coeficientes en $\Bbbk$, entonces la cantidad máxima de columnas linealmente independientes de A coincide con la cantidad máxima de filas linealmente independientes; a este número se le llama el *rango* de A. El rango de A coincide con la dimensión de la imagen de la transformación lineal $L_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$; luego en el caso $n = m$ se deduce que el rango de A es n si y solo si L_A es un isomorfismo si y solo si el determinante de A es no nulo.

Definición 5.2.1. Sea $A \in M_{m\times n}(\Bbbk)$. Los *menores de orden* h de A $(1 \leq h \leq \min\{m, n\})$ son los determinantes de las submatrices de A de tamaño $h \times h$ obtenidas suprimiendo $m - h$ filas y $n - h$ columnas.

Ejemplo 5.2.2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, entonces A tiene menores de orden 1, 2 y 3. Los menores de orden 1 son simplemente las entradas de A. Los menores de orden 3 se obtienen suprimiendo la primera, segunda, tercera y cuarta columnas de A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Los menores de orden 2 se obtienen suprimiendo una fila y dos columnas de A; por ejemplo los menores de orden 2 que se obtienen eliminando la última fila son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -8, \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -16, \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Los menores de orden 2 que se obtienen eliminando la fila del medio son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = -8, \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = -16, \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Los menores de orden 2 que se obtienen eliminando la primer fila son:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 8, \quad \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 16, \quad \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema 5.2.3. *Si* $A \in M_{m\times n}(\Bbbk)$, *entonces* $\operatorname{rango}(A) = \max\{\text{orden de } M : M \text{ menor no nulo de } A\}$.

Dem. Sean $r = \operatorname{rango}(A)$ y $l = \max\{\text{orden de M} : \text{M menor no nulo de } A\}$.

Si A contiene una submatriz cuadrada B de tamaño $q \times q$ y $q > r$, entonces como todo conjunto de q columnas de A es LD, deducimos que las columnas de B son LD y por lo tanto el determinante de B es cero. Esto implica que todos los menores de orden q, con $q > r$ son nulos y por lo tanto $l \leq r$.

Para probar $l = r$ alcanza con mostrar que existe un menor no nulo de orden r de A. Como el rango de A es r, entonces existen r columnas de A que son LI. Si C es la matriz $m \times r$ formada por esas columnas, entonces el rango de C es r y por lo tanto existen r filas de C que son LI. Sea D la submatriz de C formada por esas filas. Entonces D es una matriz $r \times r$ que tiene r filas LI, por lo cual su determinante es distinto de cero. Así D es un menor no nulo de orden r de A. $\square$

Ejemplo 5.2.4. En el ejemplo 5.2.2 obtuvimos que todos los menores de orden 3 son nulos y existe algún menor de orden 2 no nulo, luego el rango de A es 2.

5.3. Matrices elementales

En esta sección $\Bbbk$ es un cuerpo cualquiera.

Definición 5.3.1. Sea $A \in M_n(\Bbbk)$. Se llaman *operaciones elementales* en las filas o columnas de A a las siguientes:

1. *Operación de tipo I.* Intercambiar dos filas o columnas de A.
2. *Operación de tipo II.* Multiplicar una fila o columna de A por una constante no nula.
3. *Operación de tipo III.* Sumarle a una fila o columna un múltiplo de otra fila o columna, respectivamente.

Definición 5.3.2. Se llaman *matrices elementales* de tipo I, II o III a las matrices que se obtienen aplicando las operaciones elementales correspondientes a la matriz identidad.

Es decir que las matrices elementales son las siguientes:

Matrices de tipo I:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices de tipo II:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & p & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad p \neq 0.$$

Matrices de tipo III:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & q & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & q & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad q \in \Bbbk.$$

Observación 5.3.3. Observar que la traspuesta de una matriz elemental, es una matriz elemental del mismo tipo.

Ejercicio 5.3.4. 1. Probar que las matrices elementales son invertibles y hallar sus inversas.

2. Probar que realizar una operación elemental de tipo I, II o III en las columnas (filas) de una matriz A, equivale a multiplicar a A por la derecha (izquierda) con una matriz elemental del mismo tipo.

3. Probar que si realizar una operación elemental en las columnas de A corresponde a multiplicar por la derecha a A con una cierta matriz elemental E, entonces realizar la misma operación elemental en las filas de A corresponde a multiplicar por la izquierda a A con E^t.

Ejemplo 5.3.5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que se obtiene intercambiando las columnas 2 y 3 en la matriz identidad (matriz de tipo I). Observar que operando obtenemos

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \\ 9 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Luego multiplicar la matriz A por la derecha con la matriz E equivale a intercambiar las columnas 2 y 3 de A, mientras que multiplicar la matriz A por la izquierda con la matriz E equivale a intercambiar las filas 2 y 3 de A.

Aplicación 5.3.1. *Cálculo del rango de una matriz.*

Multiplicar una matriz rectangular (a izquierda o derecha) por una matriz invertible, es una operación que no afecta su rango. Luego teniendo en cuenta las partes 1 y 2 del ejercicio 5.3.4, deducimos que realizar operaciones elementales en las filas o columnas no afecta al rango de la matriz. Esto nos da un método muy simple para hallar el rango de una matriz, simplemente realizamos operaciones elementales en sus filas y columnas hasta transformarla en una matriz a la cual sea simple calcular su rango. De hecho mediante este método se puede transformar cualquier matriz en una matriz diagonal que en la diagonal principal tenga entradas que son solo 0 y 1, en este caso el rango es la cantidad de unos que aparecen en la diagonal principal.

Ejemplo 5.3.6. Sea $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Para calcular el rango de A, observar que si primero le sumamos a la primer columna la segunda multiplicada por 2 y luego a la tercer fila le sumamos la primera multiplicada por 3, tenemos:

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Luego el rango de A coincide con el rango de la última matriz que claramente es 2.

Observación 5.3.7. Notar que el algoritmo que se emplea habitualmente para hallar la inversa de una matriz sale de operar con matrices elementales: si $A^{-1}A = I$ y $E_1, \ldots, E_r$ son matrices elementales, entonces $A^{-1}(AE_1 \cdots E_r) = E_1 \cdots E_r$. Luego si elegimos $E_1, \ldots, E_r$ de forma tal que $AE_1 \cdots E_r = I$, entonces $A^{-1} = E_1 \cdots E_r$. Observar que multiplicar por la derecha por matrices elementales equivale a hacer las operaciones elementales respectivas en las columnas, y en eso consiste exactamente el algoritmo para hallar la inversa. De la misma forma, operar con las filas equivale a multiplicar por la izquierda, y por lo tanto hay que partir de la otra igualdad $AA^{-1} = I$ (y por eso en el algoritmo no se pueden realizar operaciones elementales con filas y columnas al mismo tiempo). Trabajando esta idea un poco más se puede probar que una matriz es invertible si y solo si es producto de matrices elementales.

5.4. Movimientos rígidos

Como una aplicación del tema producto interno veremos cómo clasificar los movimientos del plano y del espacio. En esta sección en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto interno usual.

Proposición 5.4.1. *Toda isometría T de $\mathbb{R}^2$ es una rotación si* $\det T = 1$ *o una simetría axial si* $\det T = -1$.

Dem. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ una isometría, luego es $T = L_A$, siendo $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ una matriz ortogonal. Al ser A ortogonal es $\det A = \pm 1$.

Supongamos $\det A = 1$. Sabemos que las columnas de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, luego (b,d) es ortogonal con (a,c). Como $(-c,a)$ es no nulo y también es ortogonal con (a,c), deducimos que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $(b,d) = k(-c,a)$. La condición $\det A = 1$ junto con $1 = \|(a,c)\|^2 = a^2 + c^2$ implican $k = 1$, luego $(b,d) = (-c,a)$. Como $a^2 + c^2 = 1$, entonces existe un único $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos\alpha$ y $c = \operatorname{sen}\alpha$. Luego

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

y por lo tanto T es la rotación de centro en el origen y ángulo α.

Si $\det A = -1$, es $\chi_T(t) = t^2 - (a+d)t - 1$, luego su discriminante es positivo y por lo tanto tiene dos raíces reales cuyo producto es -1. Como los valores propios de A solo pueden ser ± 1, deducimos que existe $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ que verifica

$$T(w_1) = w_1, \quad T(w_2) = -w_2.$$

Luego T es la simetría axial de eje el subespacio $[w_1]$. $\square$

Proposición 5.4.2. *Toda isometría T de $\mathbb{R}^3$ es una rotación si* $\det T = 1$ *o la composición de una rotación y una simetría especular si* $\det T = -1$.

Dem. Como el polinomio característico de T es de grado 3, entonces el teorema de Bolzano implica que tiene alguna raíz real λ. Sea v_0 un vector propio de T correspondiente a λ y $W = [v_0]^{\perp}$. Es fácil de probar que W es T invariante, luego $T|_W \in \mathcal{L}(W)$ y $\dim W = 2$.

Si $\mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$ es una base de W, entonces $\mathcal{B} = \{v_0, w_1, w_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, \quad [T|_W]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

esto implica $\det T = \lambda \det(T|_W)$.

Como T es una isometría sabemos que $\lambda = \pm 1$ y $\det T = \pm 1$.

1. Si $\det T = 1$ y $\lambda = 1$, es $\det(T|_W) = 1$; luego $T|_W$ es una rotación en el plano W y por lo tanto T es una rotación en el espacio de eje $[v_0]$.

2. Si $\det T = 1$ y $\lambda = -1$, es $\det(T|_W) = -1$; luego $T|_W$ es una simetría axial de eje $[w_1]$ en el plano W y por lo tanto T es una simetría axial en el espacio con eje $[w_1]$, que es lo mismo que una rotación de eje $[w_1]$ y ángulo π.

3. Si $\det T = -1$ y $\lambda = 1$, es $\det(T|_W) = -1$; luego $T|_W$ es una simetría axial de eje $[w_1]$ en el plano W y por lo tanto T es una simetría especular respecto al subespacio $[v_0, w_1]$, que es lo mismo que la composición de la simetría especular respecto al subespacio $[v_0, w_1]$ con la identidad (que es una rotación de ángulo 0 y eje cualquiera).

4. Si $\det T = -1$ y $\lambda = -1$, es $\det(T|_W) = 1$; luego $T|_W$ es una rotación en el plano W y por lo tanto T es una rotación en el espacio de eje $[v_0]$ compuesta con una simetría especular respecto a W. $\square$

Definición 5.4.3. Un *movimiento rígido* en un espacio con producto interno V es una función $M : V \to V$ que verifica $\|M(u) - M(v)\| = \|u - v\|$, $\forall u, v \in V$.

Una *traslación* es una función $M_{v_0} : V \to V$ de la forma $M_{v_0}(v) = v + v_0$, para todo $v \in V$, donde $v_0 \in V$ es un vector fijo. Claramente toda traslación es un movimiento rígido.

Proposición 5.4.4. *Si V es un espacio vectorial real con producto interno, entonces todo movimiento rígido M en V es de la forma $M(v) = T(v) + v_0$ donde v_0 es un vector fijo y $T \in \mathcal{L}(V)$ es una isometría. Luego los movimientos rígidos de V se obtienen componiendo isometrías con traslaciones.*

Dem. Sea $v_0 = M(0)$ y definimos una función $T : V \to V$ mediante $T(v) = M(v) - v_0$, para todo $v \in V$. Luego $M(v) = T(v) + v_0$ para todo $v \in V$. Resta ver que T es una isometría, para eso probaremos:

1. $\|T(v)\| = \|v\|$, para todo $v \in V$.
2. $\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$, para todo $u, v \in V$.
3. $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, para todo $u, v \in V$.
4. $T(au + v) = aT(u) + T(v)$, para todo $a \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$.

Las pruebas de las partes 1 y 2 son inmediatas a partir de la definición de T. Para probar la parte 3, observar que de la igualdad (2.2) se deduce que para todo $u, v \in V$ vale

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left\{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2\right\}.$$

Luego de esta relación y las partes 1 y 2 se deduce 3.

$$\begin{aligned}
\left\|T(au+v) - \big(aT(u) + T(v)\big)\right\|^2 &= \left\|\big(T(au+v) - T(v)\big) - aT(u)\right\|^2 \\
&= \|T(au+v) - T(v)\|^2 + \|aT(u)\|^2 - 2\langle T(au+v) - T(v), aT(u)\rangle \\
&= \|T(au+v) - T(v)\|^2 + a^2\|T(u)\|^2 - 2a(\langle T(au+v), T(u)\rangle - \langle T(v), T(u)\rangle) \\
&= \|(au+v) - v\|^2 + a^2\|u\|^2 - 2a(\langle au+v, u\rangle - \langle v, u\rangle) = 0.
\end{aligned}$$

Luego $\left\|T(au+v) - \big(aT(u) + T(v)\big)\right\|^2 = 0$ y esto equivale a la afirmación en 4. $\square$

Corolario 5.4.5. *Todo movimiento rígido del plano es una traslación, una rotación, una simetría axial o una antitraslación.*

Dem. Por la proposición 5.4.1 sabemos que las isometrías del plano son rotaciones con centros en el origen o simetrías axiales con ejes que pasan por el origen. Luego los movimientos rígidos del plano se obtienen componiendo traslaciones con esas rotaciones o simetrías axiales. La descripción final se obtiene observando que la composición de una rotación con una traslación da otra rotación con centro trasladado (a menos que la rotación sea la identidad, en cuyo caso da una traslación) y la composición de una traslación con una simetría axial da una simetría axial si el vector de traslación es ortogonal al eje de la simetría axial o una antitraslación en caso contrario. $\square$

Observación 5.4.6. En forma análoga, utilizando la proposición 5.4.2 se clasifican todos los movimientos rígidos del espacio.

5.5. Matrices simétricas reales

En esta sección el cuerpo de base es $\mathbb{R}$.

Valores propios de matrices simétricas reales

El siguiente resultado permite probar el teorema 2.2.29 sin hacer referencia a los números complejos.

Teorema 5.5.1. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces A tiene algún valor propio real.*

Dem. Sea $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interno usual (escalar) de $\mathbb{R}^n$. Definimos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante $f(x) = \langle x, Ax\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Observar que f es una función polinomial (es una forma cuadrática), luego es una función diferenciable y por lo tanto continua.

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\| = 1\}$. Como S es compacto y f es continua, entonces el teorema de Weierstrass nos dice que existe v en S tal que $f(v) \leq f(x)$, para todo x en S. Notar que al ser $\|v\| = 1$ se tiene $v \neq 0$.

Sea w un vector arbitrario de $\mathbb{R}^n$ tal que $w \perp v$ y $\|w\| = 1$. Definimos $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mediante

$$\alpha(t) = (\cos t)v + (\operatorname{sen} t)w, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observar que al ser $\|v\| = \|w\| = 1$ y $v \perp w$, el teorema de Pitágoras implica $\|\alpha(t)\|^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, luego $\alpha(t) \in S$ y por lo tanto $f(v) \leq f\big(\alpha(t)\big)$, para todo t en $\mathbb{R}$.

Sea $\beta = f \circ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Por lo anterior es $\beta(0) \leq \beta(t)$, para todo t en $\mathbb{R}$; esto nos dice que β tiene un mínimo absoluto en 0 y como β es derivable, deducimos $\beta'(0) = 0$. Para calcular $\beta'(0)$ empezamos observando que vale $\alpha'(t) = -(\operatorname{sen} t)v + (\cos t)w$ y por lo tanto $\alpha(0) = v$ y $\alpha'(0) = w$. Por otro lado es $\beta(t) = \langle \alpha(t), A\alpha(t)\rangle$, luego $\beta'(t) = \langle \alpha'(t), A\alpha(t)\rangle + \langle \alpha(t), A\alpha'(t)\rangle$. Sustituyendo t por 0 y usando que A es simétrica obtenemos

$$0 = \beta'(0) = \langle w, Av\rangle + \langle v, Aw\rangle = \langle w, Av\rangle + \langle Av, w\rangle = 2\langle w, Av\rangle.$$

Luego Av es ortogonal con w, para todo w en $\mathbb{R}^n$ tal que $w \perp v$ y $\|w\| = 1$. Pero es fácil de probar que esto implica que Av es ortogonal con w, para todo w en $\mathbb{R}^n$ tal que $w \perp v$. Esto implica $Av \in \big([v]^\perp\big)^\perp = [v]$ y por lo tanto existe λ en $\mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$. $\square$

Matrices simétricas reales congruentes

Recordar que en la sección 3.2 definimos que dos matrices A y B en $M_n(\mathbb{R})$ son congruentes si existe una matriz invertible Q en $M_n(\Bbbk)$ tal que $A = Q^t\, B\, Q$.

Proposición 5.5.2 (Ley de inercia de Sylvester para matrices)**.** *Si A es una matriz simétrica real, entonces el número de entradas positivas, negativas y nulas de una matriz diagonal congruente con A es independiente de la matriz diagonal.*

Dem. Sea $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(\mathbb{R}^n)$ definida por $\varphi(u, v) = u^t\, A\, v$. Si D es una matriz diagonal congruente con A, entonces existe $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$ tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = D$. Luego la Ley de inercia de Sylvester nos dice que el número de entradas positivas, negativas y nulas de D depende solo de φ (por lo tanto de A) y no de D. $\square$

Definición 5.5.3. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica y D una matriz diagonal congruente con A. Definimos el *índice* de A como el número de entradas diagonales positivas de D y la *signatura* de A como la diferencia entre el número de entradas diagonales positivas y el de entradas diagonales negativas de D. La Ley de Inercia de Sylvester para matrices nos garantiza que esta definición no depende de la matriz diagonal D.

Observar que el índice y la signatura de A coinciden con el índice y la signatura de $\beta_A \in \operatorname{Bil}_S(\mathbb{R}^n)$ definida por $\beta_A(u, v) = u^t\, A\, v$. La signatura, el índice y el rango son los *invariantes* de la matriz simétrica A.

Observación 5.5.4. De la Ley de Inercia de Sylvester para matrices se deduce inmediatamente que si dos matrices simétricas son congruentes, entonces tienen los mismos invariantes.

Observación 5.5.5. Es un ejercicio del práctico 6 el probar que si V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$, entonces existe una base φ-ortonormal de V.

Ejemplo 5.5.6. Sea $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$, $V = \mathbb{R}^2$, tal que $\Phi(x, y) = x^2 - y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$. Es fácil de pobar que $\{(2, 1), (1, 2)\}$ es una base φ-ortogonal de $\mathbb{R}^2$, luego $\left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \right\}$ es una base φ-ortonormal de $\mathbb{R}^2$ (otra base φ-ortonormal es la canónica).

Teorema 5.5.7. *Si A es una matriz simétrica real, entonces A es congruente con una única matriz diagonal D de la forma*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Dem. Sea $\beta_A \in \mathrm{Bil}_S(\mathbb{R}^n)$ definida por $\beta_A(u, v) = u^t\, A\, v$ y $\mathcal{B}$ una base β_A-ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Si $D = M_{\mathcal{B}}(\beta_A)$, entonces podemos considerar $\mathcal{B}$ ordenada de forma tal que D tiene la forma (5.4). Si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces es $A = M_{\mathcal{C}}(\beta_A)$ y $D = Q^t\, A\, Q$, siendo $Q = {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$. Esto prueba la existencia de la matriz D.

Para probar la unicidad, si la matriz A es congruente con D y con $\hat{D}$, siendo D y $\hat{D}$ matrices diagonales de la forma (5.4), entonces D y $\hat{D}$ son congruentes entre sí y luego tienen los mismos invariantes. Como el índice de una matriz de esta forma es la cantidad de entradas diagonales que valen 1 y la signatura es la diferencia entre la cantidad de entradas diagonales que valen 1 y la de entradas diagonales que valen -1, resulta que D y $\hat{D}$ tienen la misma cantidad de entradas diagonales que valen 1 y la misma cantidad de entradas diagonales que valen -1, luego $D = \hat{D}$. $\square$

Corolario 5.5.8. *Dos matrices simétricas reales son congruentes si y solo si tienen los mismos invariantes.*

Dem. Ya sabemos que si dos matrices simétricas reales son congruentes, entonces tienen los mismos invariantes. Para probar el recíproco, si A y B son matrices simétricas, entonces sabemos que A es congruente con una única matriz diagonal D_A de forma (5.4) y B es congruente con una única matriz diagonal D_B de forma (5.4). Como la cantidad de entradas diagonales que valen 1 y la cantidad de entradas diagonales que valen -1 en D_A y D_B depende solo de los invariantes de A y de B respectivamente y estos coinciden, entonces $D_A = D_B$. Luego A y B son congruentes entre sí. $\square$

5.6. Superficies cuádricas

Definición 5.6.1. Una *cuádrica* o *superficie cuádrica* es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ de la forma

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d\,xy + e\,xz + f\,yz + g\,x + h\,y + i\,z + j = 0 \right\},$$

siendo $a, \ldots, j$ números reales tales que $a, \ldots, f$ son no todos nulos.

Ejemplo 5.6.2. Ejemplos de cuádricas.

1. *Esfera:* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
2. *Cono circular:* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
3. *Paraboloide:* $z = x^2 + y^2$.
4. *Dos planos secantes:* $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + y + z)(x + y - z) = 0$.

Observar que toda cuádrica se puede describir de la forma siguiente

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + a_{33}\, z^2 + 2\, a_{12}\, xy + 2\, a_{13}\, xz + 2\, a_{23}\, yz + b_1\, x + b_2\, y + b_3\, z + c = 0\right\},$$

siendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ y $b_1, b_2, b_3, c \in \mathbb{R}$.

Veamos otras formas de describir $\mathcal{S}$. Si consideramos la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y la funcional $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\Phi(x, y, z) = a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + a_{33}\, z^2 + 2\, a_{12}\, xy + 2\, a_{13}\, xz + 2\, a_{23}\, yz, \quad \alpha(x, y, z) = b_1\, x + b_2\, y + b_3\, z.$$

entonces

$$\mathcal{S} = \left\{X \in \mathbb{R}^3 : \ \Phi(X) + \alpha(X) + c = 0\right\}.$$

Observar que si φ es la forma bilineal simétrica asociada a Φ y escribimos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, entonces

$$\Phi(X) = X^t A\, X, \quad \varphi(X, Y) = X^t A\, Y, \quad \alpha(X) = X^t B, \quad \forall X \in \mathbb{R}^3.$$

Si $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto interno usual (escalar) de $\mathbb{R}^3$, las fórmulas anteriores se escriben

$$\Phi(X) = \langle X, A\, X\rangle, \quad \varphi(X, Y) = \langle X, A\, Y\rangle = \langle A\, X, Y\rangle, \quad \alpha(X) = \langle X, B\rangle, \quad \forall X \in \mathbb{R}^3.$$

Definición 5.6.3. Una cuádrica $\mathcal{S}$ se dice *no degenerada* si lo es la forma cuadrática asociada Φ, es decir si $\det A \neq 0$. Decimos que $X_0 \in \mathbb{R}^3$ es un *centro* de $\mathcal{S}$ si verifica $2\, A\, X_0 + B = 0$.

Notar que si $\mathcal{S}$ es no degenerada, entonces tiene un único centro $X_0 = -\frac{1}{2} A^{-1}\, B$. En caso contrario $\mathcal{S}$ puede tener infinitos centros o no tener ninguno (ver el ejemplo 5.6.5).

Proposición 5.6.4. *Supongamos que una cuádrica $\mathcal{S}$ admite un centro X_0. Si un punto está en $\mathcal{S}$, entonces su simétrico respecto a X_0 también.*

Dem. Supongamos que $X_1 \in \mathcal{S}$, luego X_1 verifica

$$\Phi(X_1) + \alpha(X_1) + c = 0. \tag{5.5}$$

Observar que si X_2 es el simétrico de X_1 respecto a X_0, entonces $X_0 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, luego $X_2 = 2X_0 - X_1$. Calculando obtenemos

$$\begin{aligned}
\Phi(X_2) + \alpha(X_2) + c &= \Phi(2X_0 - X_1) + \alpha(2X_0 - X_1) + c \\
&= 4\Phi(X_0) - 4\varphi(X_0, X_1) + \Phi(X_1) + 2\alpha(X_0) - \alpha(X_1) + c \\
&= 4\Phi(X_0) - 4\varphi(X_0, X_1) + 2\alpha(X_0) - 2\alpha(X_1) && \text{(usando (5.5))} \\
&= 2\Big(2\varphi(X_0, X_0) - 2\varphi(X_0, X_1) + \alpha(X_0 - X_1)\Big) \\
&= 2\Big(\varphi(2X_0, X_0 - X_1) + \alpha(X_0 - X_1)\Big) \\
&= 2\Big(\langle 2AX_0, X_0 - X_1\rangle + \langle B, X_0 - X_1\rangle\Big) \\
&= 2\langle 2AX_0 + B, X_0 - X_1\rangle = 2\langle 0, X_0 - X_1\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Luego $\Phi(X_2) + \alpha(X_2) + c = 0$ y por lo tanto $X_2 \in \mathcal{S}$. □

Ejemplo 5.6.5 (Ejemplos de superficies cuádricas)**.**

Cuádricas con centro.

1. *Hiperboloide de una hoja*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
2. *Hiperboloide de dos hojas*: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
3. *Elipsoide:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
4. *Cono:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Cuádricas sin centro.

1. *Paraboloide elíptico:* $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
2. *Paraboloide hiperbólico:* $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.
3. *Cilindro parabólico:* $z = \frac{x^2}{a^2}$.

Cuádricas con un eje de centros.

1. *Cilindro elíptico:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. *Cilindro hiperbólico:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
3. *Dos planos secantes:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ y $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0)$.
4. *Una recta (doble):* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (x = 0$ e $y = 0)$.

Cuádricas con un plano de centros.

1. *Dos planos paralelos:* $\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (x = a$ y $x = -a)$.
2. *Un plano (doble):* $\frac{x^2}{a^2} = 0 \quad (x = 0)$.

Estas son las llamadas ecuaciones *reducidas* de las cuádricas.

Observación 5.6.6. La ecuación de una cuádrica puede dar lugar a un punto o al conjunto vacío:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Teorema 5.6.7. *Si una cuádrica $\mathcal{S}$ no es el conjunto vacío ni está formada por un solo punto, entonces coincide con una de las descritas en el ejemplo 5.6.5, a menos de trasladar, rotar o intercambiar los ejes de coordenadas o simetrizar respecto a un plano coordenado.*

Dem. Sea $\mathcal{S}=\left\{X\in\mathbb{R}^3:\ \Phi(X)+\alpha(X)+c=0\right\}$, siendo $\Phi(X)=\langle X, A\,X\rangle$ y $\alpha(X)=\langle X,B\rangle$.

Como A es una matriz simétrica real, entonces existe $Q\in M_3(\mathbb{R})$ matriz ortogonal tal que $Q^tA\,Q=D$, siendo

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}).$$

Observar que λ_1, λ_2 y λ_3 son los valores propios de A y $\det(A)=\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$.

Empezamos el estudio discutiendo según $\det(A)$ es o no cero.

Caso 1: $\det(A)\neq 0$**.** La matriz A es invertible, luego $\mathcal{S}$ tiene un único centro $X_0\in\mathbb{R}^3$. Realizamos el cambio de variable $X=\tilde{X}+X_0$ (traslación de ejes), luego

$$\begin{aligned}\Phi(X)+\alpha(X)+c&=\Phi(\tilde{X}+X_0)+\alpha(\tilde{X}+X_0)+c\\&=\Phi(\tilde{X})+2\,\varphi(\tilde{X},X_0)+\Phi(X_0)+\alpha(\tilde{X})+\alpha(X_0)+c\\&=\Phi(\tilde{X})+2\,\varphi(\tilde{X},X_0)+\alpha(\tilde{X})+\Phi(X_0)+\alpha(X_0)+c\\&=\Phi(\tilde{X})+2\,\left\langle\tilde{X},A\,X_0\right\rangle+\left\langle\tilde{X},B\right\rangle+\Phi(X_0)+\alpha(X_0)+c\\&=\Phi(\tilde{X})+\left\langle\tilde{X},2\,A\,X_0+B\right\rangle+\Phi(X_0)+\alpha(X_0)+c\\&=\Phi(\tilde{X})+d,\end{aligned}$$

siendo $d=\Phi(X_0)+\alpha(X_0)+c$. Entonces la ecuación de $\mathcal{S}$ respecto a las coordenadas $\tilde{X}$ es

$$\mathcal{S}:\ \Phi(\tilde{X})+d=0.$$

Realizamos el cambio de variable $\tilde{X}=Q\,\hat{X}$. Como Q es una matriz ortogonal, esto corresponde a realizar un giro de ejes si $\det(Q)=1$ o un giro de ejes seguido de una simetría especular si $\det(Q)=-1$ (ver la proposición 5.4.2). Es

$$\Phi(\tilde{X})=\Phi(Q\,\hat{X})=(Q\,\hat{X})^tA\,Q\,\hat{X}=\hat{X}^t\,Q^tA\,Q\,\hat{X}=\hat{X}^t\,D\,\hat{X}=\lambda_1\,\hat{x}^2+\lambda_2\,\hat{y}^2+\lambda_3\,\hat{z}^2,\quad \hat{X}=\begin{pmatrix}\hat{x}\\\hat{y}\\\hat{z}\end{pmatrix}.$$

Entonces la ecuación de $\mathcal{S}$ respecto a las coordenadas $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ es

$$\mathcal{S}:\ \lambda_1\,\hat{x}^2+\lambda_2\,\hat{y}^2+\lambda_3\,\hat{z}^2+d=0. \tag{5.6}$$

Consideremos primero el caso en el cual $d=0$.

1. Si λ_1, λ_2 y λ_3 tienen el mismo signo, entonces $\mathcal{S}$ es un punto.
2. Si λ_1, λ_2 y λ_3 no tienen el mismo signo, entonces $\mathcal{S}$ es un cono.

Consideremos ahora el caso en que $d \neq 0$. A menos de intercambiar $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ tenemos los casos siguientes:

1. Si λ_1, λ_2, λ_3 y d tienen el mismo signo, entonces $\mathcal{S}$ es el conjunto vacío.
2. Si λ_1, λ_2, λ_3 tienen el mismo signo y este signo es distinto del signo de d, entonces $\mathcal{S}$ es un elipsoide.
3. Si $\operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2 \neq \operatorname{sg} \lambda_3 = \operatorname{sg} d$, entonces $\mathcal{S}$ es un hiperboloide de una hoja.
4. Si $\operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2 \neq \operatorname{sg} \lambda_3 \neq \operatorname{sg} d$, entonces $\mathcal{S}$ es un hiperboloide de dos hojas.

Caso 2: $\det(A) = 0$**.** Realizamos primero el cambio de variable $X = Q\,\tilde{X}$.

$$\Phi\left(Q\,\tilde{X}\right) + \alpha\left(Q\,\tilde{X}\right) + c = \tilde{X}^t\,D\,\tilde{X} + \left\langle Q\,\tilde{X}, B\right\rangle + c = \tilde{X}^t\,D\,\tilde{X} + \left\langle \tilde{X}, Q^t\,B\right\rangle + c.$$

Sean $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Entonces la ecuación de $\mathcal{S}$ respecto a las coordenadas $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ y $\tilde{z}$ es

$$\mathcal{S}:\ \lambda_1\,\tilde{x}^2 + \lambda_2\,\tilde{y}^2 + \lambda_3\,\tilde{z}^2 + \beta_1\,\tilde{x} + \beta_2\,\tilde{y} + \beta_3\,\tilde{z} + c = 0.$$

Observar que como $A \neq 0$, entonces no puede ser $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; luego a menos de intercambiar los ejes tenemos dos posibilidades: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ y $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$.

Caso 2.1: $\lambda_1 \neq 0$**,** $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$**.** Es

$$\mathcal{S}:\ \lambda_1\,\tilde{x}^2 + \beta_1\,\tilde{x} + \beta_2\,\tilde{y} + \beta_3\,\tilde{z} + c = 0.$$

Caso 2.1.1: $\beta_2 = \beta_3 = 0$**.** Es:

$$\mathcal{S}:\ \lambda_1\,\tilde{x}^2 + \beta_1\,\tilde{x} + c = 0.$$

Sea $\Delta = \beta_1^2 - 4\,\lambda_1\,c$. Tenemos las siguientes posibilidades:

1. Si $\Delta < 0$, entonces $\mathcal{S}$ es el conjunto vacío.
2. Si $\Delta > 0$, entonces $\mathcal{S}$ son dos planos paralelos: $\tilde{x} = \frac{-\beta_1 + \sqrt{\Delta}}{2\,\lambda_1}$ y $\tilde{x} = \frac{-\beta_1 - \sqrt{\Delta}}{2\,\lambda_1}$.
3. Si $\Delta = 0$, entonces $\mathcal{S}$ es un plano (doble): $\tilde{x} = \frac{-\beta_1}{2\,\lambda_1}$.

Caso 2.1.2: $\beta_2 \neq 0$ **o** $\beta_3 \neq 0$**.** Realizamos el cambio de variable $\begin{cases} \tilde{x} = \hat{x} \\ \tilde{y} = a\,\hat{y} - b\,\hat{z} \\ \tilde{z} = b\,\hat{y} + a\,\hat{z} \end{cases}$ y obtenemos

$$\mathcal{S}:\ \lambda_1\,\hat{x}^2 + \beta_1\,\hat{x} + (\beta_2\,a + \beta_3\,b)\,\hat{y} + (\beta_3\,a - \beta_2\,b)\,\hat{z} + c = 0.$$

Elegimos a y b tales que

$$\begin{cases} \beta_3\,a - \beta_2\,b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Observar que a y b se obtienen intersectando la circunferencia $x^2+y^2=1$ con la recta $\beta_3\,x-\beta_2\,y=0$. Esto asegura la existencia de a y b; además implica que existe $\omega\in[0,2\pi]$ tal que $a=\cos\omega$ y $b=\operatorname{sen}\omega$, luego el cambio de coordenadas representa un giro de ejes alrededor del eje $O\tilde{x}$. Para estos valores de a y b la ecuación de $\mathcal{S}$ respecto a las coordenadas $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ queda

$$\mathcal{S}:\ \lambda_1\,\hat{x}^2+\beta_1\,\hat{x}+\gamma\,\hat{y}+c=0,\quad \text{con } \gamma=\beta_2\,a+\beta_3\,b.$$

Observar que las rectas de ecuación $\beta_2\,x+\beta_3\,y=0$ y $\beta_3\,x-\beta_2\,y=0$ son perpendiculares y se cortan en el origen, luego $\gamma=\beta_2\,a+\beta_3\,b\neq 0$ y podemos despejar $\hat{y}$ en la ecuación anterior para obtener

$$\mathcal{S}:\ \hat{y}=\frac{-\lambda_1}{\gamma}\,\hat{x}^2+\frac{-\beta_1}{\gamma}\,\hat{x}+\frac{-c}{\gamma}=0,$$

luego $\mathcal{S}$ es un cilindro parabólico.

Caso 2.2: $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$ y $\lambda_3=0$. Es

$$\mathcal{S}:\ \lambda_1\,\tilde{x}^2+\lambda_2\,\tilde{y}^2+\beta_1\,\tilde{x}+\beta_2\,\tilde{y}+\beta_3\,\tilde{z}+c=0.$$

Si hacemos la traslación de ejes

$$\begin{cases}\tilde{x}=\hat{x}-\frac{\beta_1}{2\,\lambda_1}\\ \tilde{y}=\hat{y}-\frac{\beta_2}{2\,\lambda_2}\\ \tilde{z}=\hat{z}\end{cases},$$

entonces la ecuación de $\mathcal{S}$ respecto a las coordenadas $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ queda

$$\mathcal{S}:\ \lambda_1\,\hat{x}^2+\lambda_2\,\hat{y}^2+\beta_3\,\hat{z}+\eta=0, \tag{5.7}$$

siendo $\eta=c-\frac{\beta_1^2}{4\,\lambda_1}-\frac{\beta_2^2}{4\,\lambda_2}$.

Caso 2.2.1: $\beta_3=0$. Es $\mathcal{S}:\ \lambda_1\,\hat{x}^2+\lambda_2\,\hat{y}^2+\eta=0$

1. Si $\eta=0$, entonces tenemos dos posibilidades:
   a) Si $\operatorname{sg}\lambda_1=\operatorname{sg}\lambda_2$, entonces $\mathcal{S}$ es la recta (doble) $\hat{x}=0$ y $\hat{y}=0$.
   b) Si $\operatorname{sg}\lambda_1\neq\operatorname{sg}\lambda_2$, entonces $\mathcal{S}$ son dos planos secantes $y=\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}}\,\hat{x}$ e $y=-\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}}\,\hat{x}$.
2. Si $\eta\neq 0$ entonces tenemos tres posibilidades:
   a) Si $\operatorname{sg}\lambda_1=\operatorname{sg}\lambda_2=\operatorname{sg}\eta$, entonces $\mathcal{S}$ es el conjunto vacío.
   b) Si $\operatorname{sg}\lambda_1=\operatorname{sg}\lambda_2\neq\operatorname{sg}\eta$, entonces $\mathcal{S}$ es un cilindro elíptico.
   c) Si $\operatorname{sg}\lambda_1\neq\operatorname{sg}\lambda_2$, entonces $\mathcal{S}$ es un cilindro hiperbólico.

Caso 2.2.2: $\beta_3\neq 0$. Es $\mathcal{S}:\ \lambda_1\,\hat{x}^2+\lambda_2\,\hat{y}^2+\beta_3\,\hat{z}+\eta=0$.

1. Si $\operatorname{sg}\lambda_1=\operatorname{sg}\lambda_2$, entonces $\mathcal{S}$ es un paraboloide elíptico.
2. Si $\operatorname{sg}\lambda_1\neq\operatorname{sg}\lambda_2$, entonces $\mathcal{S}$ es un paraboloide hiperbólico.

Esto concluye la clasificación de las superficies cuádricas. □

Resumen.

Sea $\mathcal{S}:\ \Phi(X)+\alpha(X)+c$, siendo $\Phi(X)=X^tAX,\ \alpha(X)=B^tX$. Sean λ_1, λ_2 y λ_3 los valores propios de A. Sean D matriz diagonal y Q matriz ortogonal tales que $D=Q^tAQ$.

- Caso $\det(A)\neq 0$. Sea X_0 la solución de $2AX+B=0$ y $d=\Phi(X_0)+\alpha(X_0)+c$.

  Cambio de variables $X=Q\hat{X}+X_0 \ \Rightarrow\ \mathcal{S}:\ \lambda_1\,\hat{x}^2+\lambda_2\,\hat{y}^2+\lambda_3\,\hat{z}^2+d=0$.

  - $d=0$.
    - λ_1, λ_2 y λ_3 tienen el mismo signo, $\mathcal{S}$ es un punto.
    - λ_1, λ_2 y λ_3 tienen distinto signo, $\mathcal{S}$ es un cono.
  - $d\neq 0$.
    - λ_1, λ_2 y λ_3 tienen el mismo signo y coincide con el de d, $\mathcal{S}$ es el conjunto vacío.
    - λ_1, λ_2 y λ_3 tienen el mismo signo y es distinto del signo de d, $\mathcal{S}$ es un elipsoide.
    - $\mathrm{sg}\ \lambda_1=\mathrm{sg}\ \lambda_2\neq\mathrm{sg}\ \lambda_3=\mathrm{sg}\ d$, $\mathcal{S}$ es un hiperboloide de una hoja.
    - $\mathrm{sg}\ \lambda_1=\mathrm{sg}\ \lambda_2\neq\mathrm{sg}\ \lambda_3\neq\mathrm{sg}\ d$, $\mathcal{S}$ es un hiperboloide de dos hojas.

- Caso $\det(A)=0$. Sea $\beta=Q^tB$.

  Cambio de variables $X=Q\tilde{X}\ \Rightarrow\ \mathcal{S}:\ \lambda_1\,\tilde{x}^2+\lambda_2\,\tilde{y}^2+\lambda_3\,\tilde{z}^2+\beta_1\,\tilde{x}+\beta_2\,\tilde{y}+\beta_3\,\tilde{z}+c=0$.

  - $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2=\lambda_3=0$.
    - $\beta_2\neq 0$ o $\beta_3\neq 0$, $\mathcal{S}$ es un cilindro parabólico.
    - $\beta_2=\beta_3=0$. Sea $\Delta=\beta_1^2-4\lambda_1 c$.
      - $\Delta<0$, $\mathcal{S}$ es el conjunto vacío.
      - $\Delta>0$, $\mathcal{S}$ son dos planos paralelos.
      - $\Delta=0$, $\mathcal{S}$ es un plano (doble).
  - $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$, $\lambda_3=0$.
    - $\beta_3=0$. Sea $\eta=c-\frac{\beta_1^2}{4\lambda_1}-\frac{\beta_2^2}{4\lambda_2}$.
      - $\eta=0$.
        - $\mathrm{sg}\ \lambda_1=\mathrm{sg}\ \lambda_2$, $\mathcal{S}$ es una recta (doble).
        - $\mathrm{sg}\ \lambda_1\neq\mathrm{sg}\ \lambda_2$, $\mathcal{S}$ son dos planos secantes.
      - $\eta\neq 0$.
        - $\mathrm{sg}\ \lambda_1=\mathrm{sg}\ \lambda_2=\mathrm{sg}\ \eta$, $\mathcal{S}$ es el conjunto vacío.
        - $\mathrm{sg}\ \lambda_1=\mathrm{sg}\ \lambda_2\neq\mathrm{sg}\ \eta$, $\mathcal{S}$ es un cilindro elíptico.
        - $\mathrm{sg}\ \lambda_1\neq\mathrm{sg}\ \lambda_2$, $\mathcal{S}$ es un cilindro hiperbólico.
    - $\beta_3\neq 0$.
      - $\mathrm{sg}\ \lambda_1=\mathrm{sg}\ \lambda_2$, $\mathcal{S}$ es un paraboloide elíptico.
      - $\mathrm{sg}\ \lambda_1=\mathrm{sg}\ \lambda_2$, $\mathcal{S}$ es un paraboloide hiperbólico.

Ejemplo 5.6.8. Sea $\mathcal{S}:\ 2\,x^2+y^2-z^2+2\,xz+4\,x-4\,y+2\,z+3=0$. Es $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ y $\det(A)=-3$. Calculando obtenemos $X_0=(-1,2,0)$ y $d=-3$. Como A es simétrica real, sabemos por el corolario 3.5.14 que los signos de sus valores propios coinciden con los signos de las entradas diagonales de cualquier matriz diagonal congruente con A. Luego para saber el signo de sus valores propios podemos aplicar el algoritmo de la sección 5.3. Observar que no necesitamos obtener la matriz de congruencia, así que el algoritmo es más simple y solo debemos realizar las operaciones elementales en las filas y columnas de A. En nuestro caso obtenemos

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Luego hay dos valores propios positivos y uno negativo, como el signo de d es negativo, deducimos que $\mathcal{S}$ es un hiperboloide de una hoja.

Observar que en este caso podemos hallar explícitamente los valores propios, estos son 1, $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, luego aplicando (5.6) tenemos que la ecuación reducida de $\mathcal{S}$ es

$$\frac{1}{3}\,\hat{x}^2+\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\hat{y}^2-\left(\frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)\hat{z}^2=1.$$

Ejemplo 5.6.9. Sea $\mathcal{S}:\ x^2+4y^2+z^2-2xz-2x+2z=0$. Es $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&4&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ y $\det(A)=0$. Luego uno de los valores propios es cero y calculando el polinomio característico de A obtenemos los otros valores propios. En este caso es $\chi_A(t)=-t(2-t)(4-t)$ y los valores propios son 0, 2 y 4. Luego hallamos una base de vecores propios correspondientes, por ejemplo $\{(1,0,1),\ (1,0.-1),\ (0,1,0)\}$ y la normalizamos para obtener la matriz Q:

$$D=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad A=Q^tDQ.$$

Calculando $\beta=Q^tB$ obtenemos $\beta=\big(0,-2\sqrt{2},0\big)$, luego $\beta_3=0$. Calculando $\eta=c-\frac{\beta_1^2}{4\,\lambda_1}-\frac{\beta_2^2}{4\,\lambda_2}$ obtenemos $\eta=-1$. Luego de (5.7) deducimos que la ecuación reducida de $\mathcal{S}$ es

$$4\hat{x}^2+2\hat{y}^2=1.$$

Esto nos dice que $\mathcal{S}$ es un cilindro elíptico.

Las siguiente figuras fueron tomadas de la revista digital costarricense “Matemática”, ver http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/cursos-linea/SUPERIOR/index.htm.

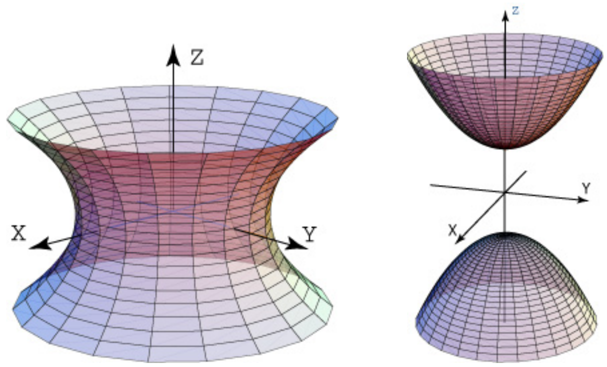

Figura 5.1: Hiperboloide de una hoja y de dos hojas.

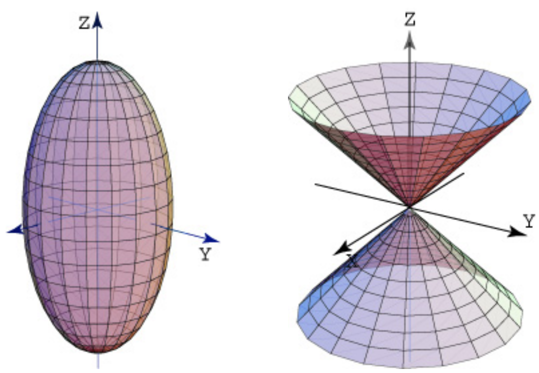

Figura 5.2: Elipsoide y cono.

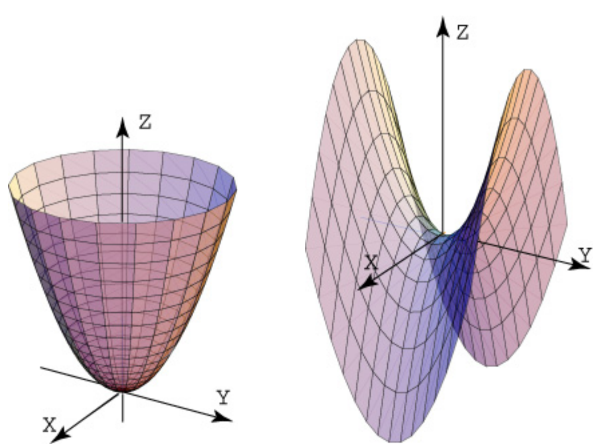

Figura 5.3: Paraboloide elíptico e hiperbólico.

5.7. Un algoritmo para la forma de Jordan

La proposición 4.4.23 nos permite calcular la forma de Jordan en casos de dimensión baja. En lo que sigue veremos cómo obtener la forma de Jordan en el caso general y también probaremos su unicidad.

Lema 5.7.1. *Si*

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} \in M_n(\Bbbk), \quad J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{p_i}(\Bbbk),\ \forall i = 1, \dots, k. \tag{5.8}$$

siendo $p = p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_k$, entonces la cantidad de bloques de Jordan de tamaño r contenidos en A es $l_r - l_{r+1}$, siendo $l_r = \operatorname{rango}\left(A^{r-1}\right) - \operatorname{rango}(A^r)$, $r = 1, 2 \dots$.

Dem. Recordar que en la primera parte de la proposición 4.4.8 probamos que si J es un bloque de Jordan de tamaño j con ceros en su diagonal principal, entonces

$$\operatorname{rango}(J) = j-1,\ \operatorname{rango}\left(J^2\right) = j-2,\ \dots,\ \operatorname{rango}\left(J^{j-1}\right) = 1,\ \operatorname{rango}\left(J^j\right) = 0.$$

En particular $\operatorname{rango}\left(J_i^m\right) = 0$, para todo $m \geq j$. Para cada $r = 1, 2, \dots$, sea m_r la cantidad de bloques de Jordan de tamaño r contenidos en A. Observar que $m_r = 0$ si $j \notin \{p_1, \dots, p_k\}$. Como para cada $j = 1, \dots, p$ hay m_j bloques de tamaño j y cada bloque de tamaño j tiene rango $j-1$, es

$$\operatorname{rango}(A) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rango}(J_i) = m_2 + 2m_3 + 3m_4 + \cdots + (p-2)m_{p-1} + (p-1)m_p.$$

Notar que la suma empieza en m_2 porque los bloques de tamaño 1 son nulos. Observar que vale:

$$A^r = \begin{pmatrix} J_1^r & & \\ & \ddots & \\ & & J_k^r \end{pmatrix} \in M_n(\Bbbk), \quad \forall r = 0, 1, \dots. \tag{5.9}$$

Considerando (5.9) con $r = 2$, cada bloque J^2 de tamaño j tiene rango $j-2$, luego

$$\operatorname{rango}\left(A^2\right) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rango}\left(J_i^2\right) = m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \cdots + (p-3)m_{p-1} + (p-2)m_p.$$

La suma empieza en m_3 porque los bloques de tamaño 2 al elevar al cuadrado son nulos. Así seguimos obteniendo

$$\begin{aligned}
\operatorname{rango}(A) &= m_2 + 2m_3 + 3m_4 + \cdots + (p-2)m_{p-1} + (p-1)m_p, \\
\operatorname{rango}\left(A^2\right) &= m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \cdots + (p-3)m_{p-1} + (p-2)m_p, \\
\operatorname{rango}\left(A^3\right) &= m_4 + 2m_5 + 3m_6 + \cdots + (p-4)m_{p-1} + (p-3)m_p, \\
&\ \ \vdots \\
\operatorname{rango}\left(A^{p-3}\right) &= m_{p-2} + 2m_{p-1} + 3m_p, \\
\operatorname{rango}\left(A^{p-2}\right) &= m_{p-1} + 2m_p, \\
\operatorname{rango}\left(A^{p-1}\right) &= m_p, \\
\operatorname{rango}\left(A^p\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Notar que vale

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 + \cdots + (p-1)m_{p-1} + pm_p = n = \text{rango}(I) = \text{rango}(A^0).$$

Luego $l_r = 0$ si $r > p$ y

$$\begin{aligned}
l_p &= \text{rango}\left(A^{p-1}\right) - \text{rango}\left(A^p\right) = m_p,\\
l_{p-1} &= \text{rango}\left(A^{p-2}\right) - \text{rango}\left(A^{p-1}\right) = m_p + m_{p-1},\\
l_{p-2} &= \text{rango}\left(A^{p-3}\right) - \text{rango}\left(A^{p-2}\right) = m_p + m_{p-1} + m_{p-2},\\
&\vdots\\
l_3 &= \text{rango}\left(A^{2}\right) - \text{rango}\left(A^{3}\right) = m_p + m_{p-1} + m_{p-2} + \cdots + m_3,\\
l_2 &= \text{rango}\left(A^{1}\right) - \text{rango}\left(A^{2}\right) = m_p + m_{p-1} + m_{p-2} + \cdots + m_3 + m_2,\\
l_1 &= \text{rango}\left(A^{0}\right) - \text{rango}\left(A^{1}\right) = m_p + m_{p-1} + m_{p-2} + \cdots + m_3 + m_2 + m_1.
\end{aligned}$$

Finalmente, restando miembro a miembro las ecuaciones anteriores obtenemos $m_r = l_r - l_{r+1}$, para todo $r = 1, 2, \ldots$. □

El siguiente teorema da un algoritmo para hallar la forma de Jordan.

Teorema 5.7.2. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que su polinomio característico escinde y $\mathcal{B}$ una base de Jordan para T. Supongamos que*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_h \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

y cada bloque A_i es de la forma

$$A_i = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}, \quad J_l = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \ l = 1, \ldots, k, \tag{5.11}$$

siendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ los valores propios distintos de T. Entonces para cada $i = 1, \ldots, h$ vale

- *El tamaño del bloque A_i es la multiplicidad algebraica de λ_i.*
- *La cantidad de bloques de Jordan contenidos en A_i es la multiplicidad geométrica de λ_i.*
- *La cantidad de bloques de Jordan de tamaño r contenidos en A_i es $l_r - l_{r+1}$, siendo $l_r = \text{rango}(T - \lambda_i \,\text{Id})^{r-1} - \text{rango}(T - \lambda_i \,\text{Id})^r$, $r = 1, 2 \ldots$.*

Dem. Sea $n = \dim V$. Observar que las dos primeras afirmaciones ya las probamos en la proposición 4.4.23, luego solo resta probar la tercera. Recordar que la cantidad de bloques de Jordan de tamaño r contenidos en A_i coincide con la de $A_i - \lambda_i I$. Por el lema anterior, si llamamos m_r a la cantidad de bloques de Jordan de tamaño r contenidos en $A_i - \lambda_i I$, es $m_r = l_r - l_{r+1}$, siendo
$l_r = \text{rango}(A_i - \lambda_i \,\text{Id})^{r-1} - \text{rango}(A_i - \lambda_i \,\text{Id})^r$.

De (5.10) deducimos

$$[(T-\lambda_i I)^r]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (A_1-\lambda_i I)^r & & \\ & \ddots & \\ & & (A_h-\lambda_i I)^r \end{pmatrix}, \quad \forall r=1,2,\ldots.$$

Luego $\operatorname{rango}((T-\lambda_i I)^r) = \sum_{j=1}^h \operatorname{rango}((A_j-\lambda_i I)^r)$, para todo $r=1,2,\ldots$. Observar que si $j\neq i$, entonces $A_j-\lambda_i I \in M_{n_j}(\Bbbk)$ es invertible y por lo tanto $(A_j-\lambda_i I)^r \in M_{n_j}(\Bbbk)$ es invertible para todo r, luego $\operatorname{rango}((A_j-\lambda_i I)^r) = n_j$, para todo r y todo $j\neq i$. Esto implica

$$\operatorname{rango}((T-\lambda_i I)^r) = \sum_{j=1}^h \operatorname{rango}((A_j-\lambda_i I)^r) = \sum_{j\neq i} n_j + \operatorname{rango}((A_i-\lambda_i I)^r), \quad \forall r=1,2,\ldots.$$

Operando obtenemos

$$\begin{aligned} &\operatorname{rango}\left((T-\lambda_i I)^{r-1}\right) - \operatorname{rango}((T-\lambda_i I)^r) = \\ &= \left(\sum_{j\neq i} n_j + \operatorname{rango}\left((A_i-\lambda_i I)^{r-1}\right)\right) - \left(\sum_{j\neq i} n_j + \operatorname{rango}((A_i-\lambda_i I)^r)\right) \\ &= \operatorname{rango}\left((A_i-\lambda_i I)^{r-1}\right) - \operatorname{rango}((A_i-\lambda_i I)^r) = l_r. \end{aligned}$$

Esto prueba la tercer afirmación del teorema. □

Observación 5.7.3. El teorema anterior prueba que la forma de Jordan de T no depende de la elección de la base de Jordan. Es decir, si ordenamos los bloques de Jordan correspondientes al mismo valor propio en tamaños decrecientes, entonces la forma de Jordan de T es única a menos de reordenar los bloques A_i.

Ejemplo 5.7.4. Sea V un espacio vectorial de dimensión 8 y $T\in\mathcal{L}(V)$ del cual se sabe

$$\chi_T(t) = (t-2)^8, \quad \operatorname{rango}(T-2\operatorname{Id}) = 4, \quad \operatorname{rango}(T-2\operatorname{Id})^2 = 2, \quad \operatorname{rango}(T-2\operatorname{Id})^3 = 1.$$

Veamos que con esos datos podemos determinar su forma de Jordan J. Por la forma del polinomio característico sabemos que J está formada solo por bloques de Jordan correspondientes al valor propio 2. La cantidad de bloques de J es $\operatorname{MG}(2) = 8-4 = 4$. Para saber sus tamaños aplicamos el teorema 5.7.2:

$$l_1 = \operatorname{MG}(2) = 4, \quad l_2 = \operatorname{rango}(T-2\operatorname{Id})-\operatorname{rango}(T-2\operatorname{Id})^2 = 2, \quad l_3 = \operatorname{rango}(T-2\operatorname{Id})^2-\operatorname{rango}(T-2\operatorname{Id})^3 = 1.$$

Luego la cantidad de bloques de tamaño 1 es $l_1-l_2 = 2$ y la cantidad de bloques de tamaño 2 es $l_2-l_3 = 1$. Sabemos que J tiene 4 bloques y que de los cuales hay dos bloques de tamaño 1 y un bloque de tamaño 2, luego el que resta solo puede ser un bloque de Jordan de tamaño 4 y por lo tanto

$$J = \begin{pmatrix} 2&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&2&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}.$$

Definición 5.7.5. Si $A\in M_n(\Bbbk)$ y $\chi_A(t) = \chi_{L_A}(t)\in\Bbbk[t]$ escinde, definimos la *forma de Jordan* de A como la de $L_A\in\mathcal{L}(\Bbbk^n)$.

Observar que si J es la forma de Jordan de A y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es la base de Jordan para L_A correspondiente, entonces es

$$A = Q\, J\, Q^{-1}, \quad Q = [v_1|\cdots|v_n].$$

Ejemplo 5.7.6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Es $\chi_A(t) = (t-2)^3(t-3)$, luego

$$J = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & 3 \end{pmatrix}, \quad A_1 \in M_3(\mathbb{R}).$$

Para el valor propio 2, es $\mathrm{MG}(2) = 4 - \mathrm{rango}(A-2I) = 2$. Luego A_1 tiene dos bloques y como $A_1 \in M_3(\mathbb{R})$ esto determina A_1. Entonces la forma de Jordan de A es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la matriz de semejanza Q tenemos que hallar la base de Jordan correspondiente. Observar que esta base es de la forma

$$\mathcal{B} = \{(A-2I)\, v, v, u, w\},$$

siendo $\{(A-2I)\, v, u\}$ una base de $\mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)$, $\mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)^2 = \mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,) \oplus [v]$ y $\{w\}$ una base de $\mathrm{Ker}\,(L_A - 3\,\mathrm{id}\,)$.

Operando obtenemos

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,) &= \{(x,y,z,t) : \ y = z = t\} = [(1,0,0,0),(0,1,1,1)], \\ \mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)^2 &= \{(x,y,z,t) : \ -2y + z + t = 0\} = [(1,0,0,0),(0,1,0,2),(0,0,1,-1)], \\ \mathrm{Ker}\,(L_A - 3\,\mathrm{id}\,) &= \{(x,y,z,t) : \ x = t \text{ y } y = z = 0\} = [(1,0,0,1)]. \end{aligned}$$

Observar que $v = (0,1,0,2) \in \mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)^2 \setminus \mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)$, luego

$$\mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)^2 = \mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)^2 \oplus [v].$$

Entonces sabemos que $(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)(v) = (1,1,1,1) \in \mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)$. Observar que si $u = (1,0,0,0)$, el conjunto

$$\{(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)(v), u\} = \{(1,1,1,1),(1,0,0,0)\} \subset \mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)$$

y es LI, luego es base de $\mathrm{Ker}\,(L_A - 2\,\mathrm{id}\,)$. Si tomamos $w = (1,0,0,1) \in \mathrm{Ker}\,(L_A - 3\,\mathrm{id}\,)$, obtenemos que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1,1),(0,1,0,2),(1,0,0,0),(1,0,0,1)\}$$

es una base de Jordan y si $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es $A = Q\,J\,Q^{-1}$.

Del teorema 5.7.2 se deduce inmediatamente la siguiente.

Proposición 5.7.7. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{B}$ una base de V y $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Supongamos que $\chi_A(t) = \chi_T(t)$ escinde. Entonces la forma de Jordan de T coincide con la forma de Jordan de A.* $\square$

En el teorema y corolario siguientes asumiremos que en las formas de Jordan los bloques de Jordan correspondientes a los mismos valores propios están ordenados en tamaños decrecientes.

Teorema 5.7.8. *Sean A y B en $M_n(\Bbbk)$ tales que sus polinomios característicos escinden. Entonces A y B son semejantes si y solo si tienen la misma forma de Jordan*[1]*.*

Dem. Si A y B tienen la misma forma de Jordan J, entonces A y B son semejantes a J y por lo tanto son semejantes entre sí.

Si A y B son semejantes, entonces existen $T \in \mathcal{L}(\Bbbk^n)$ y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases de $\Bbbk^n$ tales que $A = [T]_{\mathcal{B}}$ y $B = [T]_{\mathcal{C}}$. Luego la proposición 5.7.7 implica que A y B tienen la misma forma de Jordan. $\square$

Corolario 5.7.9. *Si A y B están en $M_n(\mathbb{C})$, entonces A y B son semejantes si y solo si tienen la misma forma de Jordan.* $\square$

[1] Se entiende que la misma a menos de permutar los distintos valores propios.

5.8. Formas multilineales alternadas

Sea $\Bbbk$ un cuerpo arbitrario, V un $\Bbbk$-espacio vectorial y k un entero positivo. Recordar que una k-forma multilineal en V es una función $\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \Bbbk$ que verifica:

$$\alpha\,(v_1, \ldots, a\,v_i + w_i, \ldots, v_k) = a\,\alpha\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \alpha\,(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k)$$

para todo $a \in \Bbbk$, $v_1, \ldots, v_k, w_i \in V$ y todo $i = 1, \ldots, k$. La forma ω en V se dice *alternada* si verifica:

$$\omega\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = 0 \tag{5.12}$$

cada vez que existan $i \neq j$ tales que $v_i = v_j$.

Observar que si ω es una k-forma alternada, entonces verifica:

$$\omega\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega\,(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)\,, \quad \forall i \neq j,\ v_1, \ldots, v_k \in V. \tag{5.13}$$

En efecto, es

$$\begin{aligned}
0 &= \omega(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_k)\\
&= \omega\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \omega\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + \omega\,(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)\\
&\quad + \omega\,(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_k)\\
&= 0 + \omega\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + \omega\,(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + 0\\
&= \omega\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + \omega\,(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)\,,
\end{aligned}$$

luego $\omega\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega\,(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$.

Recíprocamente, si $\operatorname{car} \Bbbk \neq 2$ y ω es una k-forma multilineal que verifica (5.13) entonces verifica (5.12):

Sean $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k \in V$ con $v_i = v_j$ e $i \neq j$. Utilizando (5.13) y que $v_i = v_j$ obtenemos:

$$\omega\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega\,(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = -\omega\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k)\,.$$

Luego $2\,\omega\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = 0$ y como $\operatorname{car} \Bbbk \neq 2$ es $\omega\,(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = 0$.

Observar que lo anterior prueba que (5.12) y (5.13) son equivalentes si $\operatorname{car} \Bbbk \neq 2$.

Escribiremos

$$\operatorname{Alt}_k(V) = \{\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \Bbbk :\ \omega \text{ es una } k\text{-forma multilineal alternada}\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Es un ejercicio el verificar que $\operatorname{Alt}^k(V)$ es un subespacio del espacio de las k-formas multilineales en V, luego $\operatorname{Alt}^k(V)$ es un espacio vectorial. Observar que $\operatorname{Alt}^1(V) = V^*$. Definimos $\operatorname{Alt}^0(V) := \Bbbk$.

Ejemplo 5.8.1. Sea $\omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $\omega\left((x,y,z),(x',y',z')\right) = x\,y' - y\,x' + 2\,y\,z' - 2\,y'\,z$. Observar que ω se puede escribir como el siguiente producto matricial:

$$\begin{aligned}\omega\left((x,y,z),\left(x',y',z'\right)\right) &= x\,y' - y\,x' + 2\,y\,z' - 2\,y'\,z = x\,y' + y\left(-x' + 2\,z'\right) - 2\,y'\,z \\ &= (x,y,z)\begin{pmatrix} y' \\ -x' + 2\,z' \\ -2\,y' \end{pmatrix} = (x,y,z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

De esta fórmula se deduce que ω es una forma bilineal y es fácil probar que ω es alternada. Observar que la matriz en la igualdad (5.14) es antisimétrica, es decir verifica $A^t = -A$.

Ejemplo 5.8.2. Observando $\underbrace{\mathbb{k}^n \times \cdots \times \mathbb{k}^n}_{n} \simeq M_n(\mathbb{k})$, podemos definir $\det : \mathbb{k}^n \times \cdots \times \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}$ mediante

$$\omega\left((x_{11},\dots,x_{n1}),\dots,(x_{1n},\dots,x_{nn})\right) = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

De las propiedades del determinante se deduce inmediatamente que det es una n-forma alternada en $\mathbb{k}^n$.

De ahora en adelante supondremos que V es un espacio vectorial de dimensión finita n.

Proposición 5.8.3. *Vale* $\operatorname{Alt}^k(V) = \{0\}$ *para todo* $k > n$.

Dem. Consideremos $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de V y sea $\omega \in \operatorname{Alt}^k(V)$, con $k > n$. Sean $v_1,\dots,v_k \in V$. Escribiendo $v_1 = \sum_{j_1=1}^n a_{j_1} e_{j_1},\dots,v_k = \sum_{j_k=1}^n a_{j_k} e_{j_k}$, es

$$\omega(v_1,\dots,v_k) = \omega\left(\sum_{j_1=1}^n a_{j_1} e_{j_1},\dots,\sum_{j_k=1}^n a_{j_k} e_{j_k}\right) = \sum_{j_1=\cdots=j_k=1}^n a_{j_1}\cdots a_{j_k}\omega\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right).$$

Como $k > n$, entonces en $\{e_{j_1},\dots,e_{j_k}\}$ necesariamente hay elementos repetidos y por lo tanto $\omega\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right) = 0$, $\forall j_1,\dots,j_k$; luego $\omega(v_1,\dots,v_k) = 0$. Como $v_1,\dots,v_k$ son arbitrarios, se deduce $\omega = 0$ □

Proposición 5.8.4. *Sea* $\omega \in \operatorname{Alt}^k(V)$, $k \le n$. *Si existe* $\{e_1,\dots,e_n\}$ *base de* V *tal que*

$$\omega\left(e_{i_1},\dots,e_{i_k}\right) = 0,\ \forall i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\} \text{ tales que } 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n, \tag{5.15}$$

entonces $\omega = 0$.

Dem. Supongamos ω verifica (5.15). Sean $v_1,\dots,v_k \in V$. Escribiendo $v_1 = \sum_{j_1=1}^n a_{j_1} e_{j_1},\dots,v_k = \sum_{j_k=1}^n a_{j_k} e_{j_k}$, es

$$\omega(v_1,\dots,v_k) = \omega\left(\sum_{j_1=1}^n a_{j_1} e_{j_1},\dots,\sum_{j_k=1}^n a_{j_k} e_{j_k}\right) = \sum_{j_1=\cdots=j_k=1}^n a_{j_1}\cdots a_{j_k}\omega\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right). \tag{5.16}$$

Si existen $p \neq q$ tales que $e_{j_p} = e_{j_q}$, entonces $\omega\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right) = 0$. Por otro lado, si $e_{j_1},\dots,e_{j_k}$ son distintos entre sí, podemos reordenarlos para obtener un conjunto $e_{i_1},\dots,e_{i_k}$ con $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. Notar que siempre podemos pasar de la k-upla $\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right)$ a la k-upla $\left(e_{i_1},\dots,e_{i_k}\right)$ realizando una cantidad finita de intercambios entre los elementos de $\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right)$; cada intercambio corresponde a un cambio de signo en ω, de donde aplicando (5.15) obtenemos

$$\omega\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right) = \pm\,\omega\left(e_{i_1},\dots,e_{i_k}\right) = 0.$$

Luego todos los sumandos de (5.16) son nulos y por lo tanto $\omega(v_1,\dots,v_k) = 0$. □

Corolario 5.8.5. *Sean $\omega, \eta \in \mathrm{Alt}^k(V)$, $k \leq n$. Si existe $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de V tal que*

$$\omega\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\right) = \eta\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\right), \ \forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\} \text{ tales que } 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n,$$

Entonces $\omega = \eta$.

Dem. Aplicar la proposición anterior a $\omega - \eta \in \mathrm{Alt}^k(V)$. □

Proposición 5.8.6. *Para cada para $k, l = 1, 2, \dots,$ existe un mapa*

$$\mathrm{Alt}^k(V) \times \mathrm{Alt}^l(V) \xrightarrow{\wedge} \mathrm{Alt}^{k+l}(V); \quad (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta,$$

llamado el producto cuña que tiene las siguientes propiedades:

1. $\omega \wedge (\eta + \nu) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \nu$, $\forall\, \omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$ *y* $\eta, \nu \in \mathrm{Alt}^l(V)$.
2. $(\eta + \nu) \wedge \omega = \eta \wedge \omega + \nu \wedge \omega$, $\forall\, \omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$ *y* $\eta, \nu \in \mathrm{Alt}^l(V)$.
3. $\omega \wedge (a\, \eta) = (a\, \omega) \wedge \eta = a\, (\omega \wedge \eta)$, $\forall\, \omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$, $\eta \in \mathrm{Alt}^l(V)$ *y* $a \in \mathbb{R}$.
4. $\omega \wedge (\eta \wedge \nu) = (\omega \wedge \eta) \wedge \nu$, $\forall\, \omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$, $\eta \in \mathrm{Alt}^l(V)$ *y* $\nu \in \mathrm{Alt}^h(V)$.
5. *Si* $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathrm{Alt}^1(V) = V^*$, *entonces* $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \mathrm{Alt}^k(V)$ *está definido por*

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)\ (v_1, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} \alpha_1(v_1) & \cdots & \alpha_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(v_1) & \cdots & \alpha_k(v_k) \end{vmatrix}, \quad \forall v_1, \dots, v_v \in V.$$

Notar que en la propiedad 5 podemos escribir $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ porque el producto cuña es asociativo. □

Observación 5.8.7. La prueba de la proposición anterior no es simple (hay una demostración del mismo en el libro "Cálculo en variedades", Ed. reverté, de Michael Spivak). Más adelante probaremos en el teorema 5.8.11 que toda k-forma se escribe como suma de productos de 1-formas; luego el producto cuña queda determinado por las propiedades 1 a 5.

Ejemplo 5.8.8. Si $\alpha, \beta \in V^*$ es $\alpha \wedge \beta \in \mathrm{Alt}^2(V)$ y

$$(\alpha \wedge \beta)\,(u, v) = \begin{vmatrix} \alpha(u) & \alpha(v) \\ \beta(u) & \beta(v) \end{vmatrix} = \alpha(u)\,\beta(v) - \alpha(v)\,\beta(u), \quad \forall u, v \in V.$$

Consideremos $V = \mathbb{R}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica y $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base dual en V^*, es decir

$$e_1^*(x, y, z) = x, \quad e_2^*(x, y, z) = y, \quad e_3^*(x, y, z) = z.$$

Entonces

$$(e_1^* \wedge e_2^*)\ \left((x, y, z), \left(x', y', z'\right)\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x\, y' - y\, x',$$

$$(e_1^* \wedge e_3^*)\ \left((x, y, z), \left(x', y', z'\right)\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = x\, z' - z\, x',$$

$$(e_2^* \wedge e_3^*)\ \left((x, y, z), \left(x', y', z'\right)\right) = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = y\, z' - z\, y',$$

Observar que si ω es la 2-forma del ejemplo 5.8.1, entonces $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + 2\, e_2^* \wedge e_3^*$.

Ejemplo 5.8.9. Si $\alpha,\beta,\gamma\in V^*$ es $\alpha\wedge\beta\wedge\gamma\in \operatorname{Alt}^3(V)$ y

$$(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)(u,v,w)=\begin{vmatrix}\alpha(u) & \alpha(v) & \alpha(w)\\ \beta(u) & \beta(v) & \beta(w)\\ \gamma(u) & \gamma(v) & \gamma(w)\end{vmatrix}$$

Si consideramos de nuevo $V=\mathbb{R}^3$, $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canónica y $\{e_1^*,e_2^*,e_3^*\}$ la base dual en V^*, entonces

$$(e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^*)\left((x,y,z),\left(x',y',z'\right),\left(x'',y'',z''\right)\right)=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}.$$

La prueba de las siguientes propiedades es simple y queda como ejercicio.

Proposición 5.8.10. *Para todo $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in V^*$, vale:*

1. *Si existen $i\neq j$ tales que $\alpha_i=\alpha_j$, entonces $\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_i\wedge\cdots\wedge\alpha_j\wedge\cdots\wedge\alpha_k=0$.*
2. *$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_i\wedge\cdots\wedge\alpha_j\wedge\cdots\wedge\alpha_k=-\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_j\wedge\cdots\wedge\alpha_i\wedge\cdots\wedge\alpha_k$.*

Teorema 5.8.11. *Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de V y $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ la base dual en V^*, entonces*

$$\mathcal{B}=\left\{e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_k}^*:\ 1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n\right\}$$

es una base de $\operatorname{Alt}^k(V)$, para todo $k=1,\dots,n$. Además vale

$$\omega=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\omega\left(e_{i_1},\dots,e_{i_k}\right)\,e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_k}^*,\quad \forall\omega\in\operatorname{Alt}^k(V).\tag{5.17}$$

Dem. Sea $k\in\{1,\dots,n\}$ y $\omega\in\operatorname{Alt}^k(V)$. Probaremos que existen únicos $a_{i_1,\dots,i_k}\in\Bbbk$ tales que

$$\omega=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}a_{i_1,\dots,i_k}\,e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_k}^*$$

y que $a_{i_1,\dots,i_k}=\omega\left(e_{i_1},\dots,e_{i_k}\right)$. Esto mostrará que $\mathcal{B}$ es una base de $\operatorname{Alt}^k(V)$ y que vale la igualdad en (5.17).

Observar que aplicando el Corolario 5.8.5, obtenemos que se verifica esta última igualdad si y solo si

$$\omega\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right)=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}a_{i_1,\dots,i_k}\,\left(e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_k}^*\right)\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right),\tag{5.18}$$

para todo $j_1,\dots,j_k\in\{1,\dots,n\}$ con $1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n$.

Calculando tenemos dos casos posibles:

$$\left(e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_k}^*\right)\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right)=\begin{vmatrix}e_{i_1}^*\left(e_{j_1}\right) & \cdots & e_{i_1}^*\left(e_{j_k}\right)\\ \vdots & & \vdots\\ e_{i_k}^*\left(e_{j_1}\right) & \cdots & e_{i_k}^*\left(e_{j_k}\right)\end{vmatrix}=\begin{cases}(A) & \text{si } \exists l:\ j_l\notin\{i_1,\dots,i_k\},\\ (B) & \text{si } \{j_1,\dots,j_k\}=\{i_1,\dots,i_k\}.\end{cases}\tag{5.19}$$

En el caso (A), es $e_{i_1}^*\left(e_{j_l}\right)=\cdots=e_{i_k}^*\left(e_{j_l}\right)=0$, luego en el determinante de la ecuación (5.19) la columna l-ésima es nula y resulta $\left(e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_k}^*\right)\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right)=0$.

En el caso (B) es $\{j_1,\dots,j_k\}=\{i_1,\dots,i_k\}$ siendo $1\le j_1<\dots<j_k\le n$ y $1\le i_1<\dots<i_k\le n$, luego necesariamente es $i_1=j_1,\ \dots,\ i_k=j_k$ y

$$\left(e_{i_1}^*\wedge\dots\wedge e_{i_k}^*\right)\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right)=\left(e_{i_1}^*\wedge\dots\wedge e_{i_k}^*\right)\left(e_{i_1},\dots,e_{i_k}\right)=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1.$$

Entonces en la suma de la ecuación (5.18) el único término no nulo corresponde al caso $i_1=j_1,\ \dots,\ i_k=j_k$ y en ese caso es $\left(e_{i_1}^*\wedge\dots\wedge e_{i_k}^*\right)\left(e_{i_1},\dots,e_{i_k}\right)=1$, luego la ecuación (5.18) equivale a

$$\omega\left(e_{j_1},\dots,e_{j_k}\right)=a_{j_1,\dots,j_k},\quad \forall j_1,\dots,j_k\in\{1,\dots,n\},\ 1\le j_1<\dots<j_k\le n$$

Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

Recordemos el símbolo combinatorio $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$, definido para todo $n,k\in\mathbb{N}$, $n\ge k$.

Corolario 5.8.12. *Si* $\dim V=n$ *y* $k\le n$, *entonces* $\dim\operatorname{Alt}^k(V)=\binom{n}{k}$. $\square$

Ejemplo 5.8.13. Si $\dim V=3$ y $\{e_1,e_2,e_3\}$ es una base de V, entonces $\operatorname{Alt}^k(V)=\{0\},\ \forall k\ge 4$ y vale

- $\dim\operatorname{Alt}^0(V)=\binom{3}{0}=1,\ \{1\}$ es una base de $\operatorname{Alt}^0(V)=\mathbb{R}$;
- $\dim\operatorname{Alt}^1(V)=\binom{3}{1}=3,\ \{e_1^*,\ e_2^*,\ e_3^*\}$ es una base de $\operatorname{Alt}^1(V)=V^*$;
- $\dim\operatorname{Alt}^2(V)=\binom{3}{2}=3,\ \{e_1^*\wedge e_2^*,\ e_1^*\wedge e_3^*,\ e_2^*\wedge e_3^*\}$ es una base de $\operatorname{Alt}^2(V)$;
- $\dim\operatorname{Alt}^3(V)=\binom{3}{3}=1,\ \{e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^*\}$ es una base de $\operatorname{Alt}^3(V)$.

En el caso de $V=\mathbb{R}^3$ estas bases fueron halladas explícitamente en los ejemplos 5.8.8 y 5.8.9.

Ejemplo 5.8.14. Si $V=\Bbbk^n$ y $\{e_1,\dots,e_n\}$ es la base canónica de $\Bbbk^n$, entonces $\dim\operatorname{Alt}^n(V)=\binom{n}{n}=1$ y $\{e_1^*\wedge\dots\wedge e_n^*\}$ es una base de $\operatorname{Alt}^n(V)$.

$$\begin{aligned}\left(e_1^*\wedge\dots\wedge e_n^*\right)\left(\left(x_{11},\dots,x_{n1}\right),\dots,\left(x_{1n},\dots,x_{nn}\right)\right)&=\begin{vmatrix}e_1^*\left(x_{11},\dots,x_{n1}\right)&\cdots&e_1^*\left(x_{1n},\dots,x_{nn}\right)\\\vdots&\ddots&\vdots\\e_n^*\left(x_{11},\dots,x_{n1}\right)&\cdots&e_n^*\left(x_{1n},\dots,x_{nn}\right)\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\x_{n1}&\cdots&x_{nn}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Luego $e_1^*\wedge\dots\wedge e_n^*=\det$ (el determinante) y $\{\det\}$ es una base de $\operatorname{Alt}^n(V)$.

Definición 5.8.15. Si $T:V\to W$ es una transformación lineal, definimos $T^*:\operatorname{Alt}^k(W)\to\operatorname{Alt}^k(V)$ mediante

$$T^*(\omega)(v_1,\dots,v_k):=\omega(T(v_1),\dots,T(v_k)),\quad \forall\,\omega\in\operatorname{Alt}^k(W),\ v_1,\dots,v_k\in V.$$

Proposición 5.8.16.

1. *Si* $T:V\to W$ *es una transformación lineal, entonces* $T^*:\operatorname{Alt}^k(W)\to\operatorname{Alt}^k(V)$ *también es lineal.*
2. $\operatorname{id}^*=\operatorname{id}:\operatorname{Alt}^k(W)\to\operatorname{Alt}^k(V)$.

3. Si $S : U \to V$ y $T : V \to W$ son transformaciones lineales, entonces $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

4. Si $T : V \to W$ es un isomorfismo, entonces $T^* : \operatorname{Alt}^k(W) \to \operatorname{Alt}^k(V)$ es un isomorfismo y verifica $\left(T^{-1}\right)^* = (T^*)^{-1} : \operatorname{Alt}^k(V) \to \operatorname{Alt}^k(W)$.

Dem. La prueba de las dos primeras afirmaciones es inmediata y la omitiremos. Para la tercera, si $\omega \in \operatorname{Alt}^k(W)$ y $u_1 \ldots, u_k \in U$, es

$$
\begin{aligned}
\big((T \circ S)^*(\omega)\big)(u_1, \ldots, u_k) &= \omega\big((T \circ S)(u_1), \ldots, (T \circ S)(u_k)\big) = \omega\Big(T\big(S(u_1)\big), \ldots, T\big(S(u_k)\big)\Big) \\
&= \big(T^*(\omega)\big)\big(S(u_1)\big), \ldots, \big(S(u_k)\big) = \Big(S^*\big(T^*(\omega)\big)\Big)(u_1, \ldots, u_k) \\
&= \big(S^* \circ T^*\big)(\omega)(u_1, \ldots, u_k).
\end{aligned}
$$

La cuarta afirmación se deduce de la segunda y la tercera: al ser $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}$, se deduce

$$
\left(T^{-1} \circ T\right)^* = \mathrm{id}^* \quad \Rightarrow \quad T^* \circ \left(T^{-1}\right)^* = \mathrm{id}\,.
$$

Análogamente de $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}$ se obtiene $\left(T^{-1}\right)^* \circ T^* = \mathrm{id}$ y por lo tanto $\left(T^{-1}\right)^*$ es la inversa de T^*. $\square$

Proposición 5.8.17. *Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in W^*$, entonces*

$$
T^*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) = T^*(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge T^*(\alpha_k) \in \operatorname{Alt}^k(V).
$$

Dem.

$$
T^*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(v_1, \ldots, v_k) = (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(T(v_1), \ldots, T(v_k)) = \begin{vmatrix} \alpha_1(T(v_1)) & \cdots & \alpha_1(T(v_k)) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(T(v_1)) & \cdots & \alpha_k(T(v_k)) \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} T^*(\alpha_1)(v_1) & \cdots & T^*(\alpha_1)(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ T^*(\alpha_k)(v_1) & \cdots & T^*(\alpha_k)(v_k) \end{vmatrix} = \left(T^*(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge T^*(\alpha_k)\right)(v_1, \ldots, v_k). \quad \square
$$

Corolario 5.8.18. *Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y $\omega \in \operatorname{Alt}^k(V)$, $\eta \in \operatorname{Alt}^l(W)$, entonces*

$$
T^*(\omega \wedge \eta) = T^*(\omega) \wedge T^*(\eta). \quad \square
$$

Proposición 5.8.19. *Si $\dim V = n$, $T : V \to V$ es una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V, entonces*

$$
T^*\left(e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*\right) = \det(T)\, e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*.
$$

Dem. Si ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$, es $e_k^*\left(T(e_i)\right) = e_k^*\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}\, e_j\right) = a_{ki}$, $\forall\ i, k = 1, \ldots, n$. Luego aplicando la fórmula (5.17) a $T^*\left(e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*\right)$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
T^*(e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*) &= T^*(e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*)\left(e_1, \ldots, e_n\right) e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* = (e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*)\left(T(e_1), \ldots, T(e_n)\right) e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* \\
&= \begin{vmatrix} e_1^*(T(e_1)) & \cdots & e_1^*(T(e_n)) \\ \vdots & & \vdots \\ e_n^*(T(e_1)) & \cdots & e_n^*(T(e_n)) \end{vmatrix} e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* \\
&= \det(T)\, e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*. \quad \square
\end{aligned}
$$

Capítulo 6

Ejercicios

En este capítulo incluimos las listas de ejercicios del curso.

6.1. Práctico 0

1. Sea V un espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(V)$. El operador T se dice que es una *proyección* si $T^2 = T$.

   a) Supongamos que un espacio vectorial V se descompone como $V = W \oplus U$ y consideremos la función $T : V \to V$ definida por $T(v) = w$ si $v = w + u,\ w \in W,\ u \in U$.

   1) Probar que T es una proyección.
   2) Probar que T verifica $\operatorname{Im}(T) = W$ y $\operatorname{Ker}(T) = U$.

   El operador T se llama la *proyección sobre W en la dirección de U*.

   b) Probar que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es una proyección, entonces $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$ y T es la proyección sobre $\operatorname{Im}(T)$ en la dirección de $\operatorname{Ker}(T)$. Sugerencia: escribir $v = v - T(v) + T(v)$.

2. Sea V un espacio vectorial y $V_1, \dots, V_n$ subespacios de V tales que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. Para cada $i = 1, \dots, n$, definimos una función $T_i : V \to V$ mediante $T_i(v) = v_i$ si $v = v_1 + \cdots + v_n$, con $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$. Probar que las funciones T_i son proyecciones que verifican

   a) $T_i \circ T_j = 0$ si $i \neq j$.

   b) $T_1 + \cdots + T_n = \operatorname{id}$.

   c) $\operatorname{Im}(T_i) = V_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

3. Recíprocamente, probar que si tenemos un espacio vectorial V y proyecciones $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{L}(V)$ que verifican $2a$ y $2b$, entonces $V = \operatorname{Im}(T_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(T_n)$.

4. Sean $T, S : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ definidas por

   $$T(a + bx + cx^2) = -b + bx - bx^2, \qquad S(a + bx + cx^2) = a + b + (b + c)x^2.$$

   Se pide:

   a) Probar
   $$T^2 = T, \quad S^2 = S, \quad T \circ S = S \circ T = 0, \quad T + S = \operatorname{id}.$$

   b) Hallar bases de $U = \operatorname{Im}(T)$ y de $V = \operatorname{Im}(S)$.

   c) Verificar $\mathbb{R}_2[X] = U \oplus V$.

5. Sean $M_n(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices reales $n \times n$, S el subespacio formado por las matrices simétricas y A el subespacio formado por las matrices antisimétricas.

   a) Probar que $M_n(\mathbb{R}) = S \oplus A$.

   b) Hallar explícitamente la proyeción de $M_n(\mathbb{R})$ sobre S en la dirección de A y la proyeción de $M_n(\mathbb{R})$ sobre A en la dirección de S.

6. Hallar una proyección P que proyecte $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio generado por el vector $(1, -1)$ en la dirección del subespacio generado por el vector $(1, 2)$.

7. Demostrar que si $V = U \oplus W$ y P es la proyección sobre U en la dirección de W, entonces id $-P$ es la proyección sobre W en la dirección de U.

8. Demostrar que si $P : V \to V$ es una proyección y V tiene dimensión finita, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz asociada a P en la base $\mathcal{B}$ tiene la forma $\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Qué información nos da la traza[1] de una proyección?

9. Sea V un espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita) y $P : V \to V$ una proyección. Probar que id $+P$ es invertible y hallar su inversa.

6.2. Práctico 1 (diagonalización)

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   a) Todo operador lineal en un espacio vectorial de dimensión n tiene n valores propios distintos.

   b) Si una matriz real tiene un vector propio entonces tiene un número infinito de vectores propios.

   c) Existe una matriz que no tiene vectores propios.

   d) Los valores propios son escalares no nulos.

   e) Dos vectores propios cualesquiera son linealmente independientes.

   f) La suma de dos valores propios de un operador T es también un valor propio de T.

   g) Los operadores en espacios vectoriales de dimensión infinita no tienen valores propios.

   h) Una matriz A $n \times n$ con entradas en un cuerpo $\Bbbk$ es semejante a una matriz diagonal si y solo si existe una base para $\Bbbk^n$ compuesta de vectores propios de A.

   i) Matrices semejantes tienen siempre los mismos valores propios.

   j) Matrices semejantes tienen siempre los mismos vectores propios.

   k) La suma de dos vectores propios de un operador T es también un vector propio de T.

2. Para las siguientes matrices $A \in M_n(\Bbbk)$:

   a) Hallar los valores propios de A y los subespacios propios correspondientes a cada uno de ellos.

   b) Si es posible, hallar una base de $\Bbbk^n$ que consista en vectores propios de A y dar una matriz diagonal D y una matriz invertible Q tales que $A = QDQ^{-1}$.

[1] La traza de un operador se define como la traza de la matriz asociada al operador en alguna base del espacio. La definición anterior no depende de la elección de la base, porque matrices semejantes tienen la misma traza.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ \Bbbk = \mathbb{R};\ A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ \Bbbk = \mathbb{R};\ A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix},\ \Bbbk = \mathbb{C}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \Bbbk = \mathbb{R};\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \Bbbk = \mathbb{C}.$$

3. Probar que los valores propios de una matriz triangular superior A son las entradas de la diagonal principal de A.

4. *a*) Probar que un operador lineal T en un espacio de dimensión finita es invertible si y solo si 0 no es valor propio de T

   b) Sea T un operador invertible. Probar que $\lambda \in \Bbbk$ es un valor propio de T si y solo si λ^{-1} es un valor propio de T^{-1}.

5. Sea T un operador lineal en un espacio V y sea v un vector propio de T correspondiente a un valor propio λ. Para cada entero positivo m, probar que v es un vector propio de T^m correspondiente al valor propio λ^m. (Recordar que $T^m = T \circ \cdots \circ T$, m veces.)

6. Una *matrix escalar* es una matriz de la forma $a\,\mathrm{Id}$ con $a \in \Bbbk$.

   a) Probar que si A es semejante a una matriz escalar $a\,\mathrm{Id}$ entonces $A = a\,\mathrm{Id}$.

   b) Probar que una matriz diagonalizable que tiene un solo valor propio es una matriz escalar.

   c) Deducir que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

7. Para una matrix cuadrada A, probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico (y por lo tanto tienen los mismos valores propios).

8. Sea $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ la función que asigna a una matriz su traspuesta, $T(A) = A^t$.

   a) Probar que T es lineal y que sus únicos valores propios son 1 y -1.

   b) Hallar los subespacios de vectores propios correspondientes a 1 y -1.

   c) ¿Existe una base de $M_n(\mathbb{R})$ cuyos elementos sean vectores propios de T?

9. Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio característico

$$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

   a) Probar que $a_0 = \det(A)$. Deducir que A es invertible si y solo si $a_0 \neq 0$.

   b) Probar que $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\,(A)$, donde $\mathrm{tr}\,(A)$ es la traza de A.

6.3. Práctico 2 (diagonalización)

Sea T un operador en V y W un subespacio de V. Decimos que W es un subespacio T-*invariante* si $T(W) \subset W$. En este caso la restricción $T|_W : W \to W$ es un operador en W.

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas. En todos los casos $T \in \mathcal{L}(V)$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita.

   a) Si el número de valores propios diferentes de T es estrictamente menor que la dimensión de V, T no es diagonalizable.

   b) Dos vectores propios de T correspondientes a un mismo valor propio son linealmente dependientes.

   c) Si T es diagonalizable, tiene al menos un valor propio.

   d) El operador T es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad de cada uno de sus valores propios λ es igual a la dimensión del subespacio E_λ.

   e) Si λ_1 y λ_2 son valores propios diferentes de T, $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.

2. En los siguientes casos determinar si la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable y si lo es hallar una matriz $Q \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $Q^{-1}AQ$ es diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. En los siguientes casos determinar si $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable y si lo es hallar una base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz $[T]_B$ es diagonal.

   a) $V = \mathbb{R}_3[x],\ T(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$.

   b) $V = \mathbb{R}_2[x],\ [T(p)](x) = p(0) + p(1)\left(x + x^2\right)$.

   c) $V = \mathbb{C}^2,\ T(z, w) = (z + iw, iz + w)$.

   d) $V = \mathbb{R}_3[x],\ T(p(x)) = p'(x) + p''(x)$.

   e) $V = M_2(\mathbb{R}),\ T(A) = A^t$.

4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, calcular A^n para cualquier n entero positivo. Sugerencia: escribir $A = QDQ^{-1}$, donde D es diagonal.

5. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ invertible, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que T es diagonalizable si y sólo lo es T^{-1}.

6. Un operador T se dice *nilpotente* si existe algún $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $T^n = 0$.

   a) Probar que si un operador T es nilpotente y λ es un valor propio de T, entonces $\lambda = 0$.

   b) Probar que si un operador T en un espacio de dimensión finita es diagonalizable y nilpotente, entonces es $T = 0$.

7. Sea T un operador diagonalizable en un espacio de dimensión finita. Probar que T es una proyección si y solo si todo valor propio de T es 0 o 1.

8. La sucesión de *Fibonacci* se define por recurrencia mediante

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ \forall n = 2, 3, \ldots.$$

a) Encontrar una matriz A tal que $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$, $\forall n$.

b) Dar una fórmula explícita para a_n.

9. Sea $A \in M_n(\Bbbk)$. Probar que A es diagonalizable si y solo si A^t es diagonalizable.

10. Sean T y $S \in \mathcal{L}(V)$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita. Se dice que T y S son *simultáneamente diagonalizables* si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[S]_{\mathcal{B}}$ son diagonales.

    a) Sean T y S simultáneamente diagonalizables. Probar que T y S conmutan, es decir $T \circ S = S \circ T$.

    b) Probar que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable, entonces T y T^n son simultáneamente diagonalizables para todo entero positivo n.

11. Sea T un operador diagonalizable en un espacio de dimensión finita V y sea $W \neq \{0\}$ un subespacio T-invariante de V.

    a) Sean $v_1, \dots, v_k$ vectores propios de T correspondientes a valores propios distintos. Probar por inducción en k que si $v_1 + \cdots + v_k \in W$, entonces $v_i \in W$ para todo i.

    b) Probar que $T|_W$ es diagonalizable.

12. Probar que si T y S son dos operadores diagonalizables en un espacio de dimensión finita V que conmutan, entonces T y S son simultáneamente diagonalizables.

    Sugerencia: mostrar que para todo valor propio λ de T el subespacio propio $E_{\lambda,T}$ es S-invariante y aplicar el ejercicio anterior para obtener una base de $E_{\lambda,T}$ formada por vectores propios de S.

13. Hallar la descomposición espectral de T en el ejercicio 3, dando explícitamente las proyecciones sobre los subespacios propios. Para alguno de estos casos, escribir explícitamente cada proyección como un polinomio evaluado en el operador.

14. Probar que si T es diagonalizable e invertible con descomposición espectral $T = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i P_i$, entonces $T^{-1} = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i^{-1} P_i$. Observar que esto se puede usar también para probar el ejercicio 5.

15. Sea T un operador diagonalizable en un espacio de dimensión finita. Usar la descomposición espectral $T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$ para probar:

    a) Si $p(x)$ es un polinomio cualquiera, es $p(T) = \sum_{i=1}^{k} p(\lambda_i) P_i$.

    b) Un operador S conmuta con T si y solo si S conmuta con cada P_i.

    c) Si $\Bbbk = \mathbb{R}$ y todos los valores propios de T son no negativos, entonces existe un operador diagonalizable S tal que $S^2 = T$. ¿Qué se puede decir en el caso $\Bbbk = \mathbb{C}$?

6.4. Práctico 3 (espacios con producto interno)

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

    a) Un producto interno es lineal en ambas componentes.

    b) Hay un único producto interno sobre $\mathbb{R}^n$.

    c) La desigualdad triangular solo vale en espacios de dimensión finita.

    d) Todo conjunto ortonormal es LI

2. Sean $u=(2,1+i,i),\ v=(2-i,2,1+2i)\in\mathbb{C}^3$, con el producto interno habitual. Calcular $\langle u,v\rangle$, $\|u\|$ y $\|v\|$ y verificar que se cumplen la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular.

3. Probar que $\langle x,y\rangle = xAy^*$ define un producto interno en $\mathbb{C}^2$, donde $A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$.
   Calcular $\langle (1-i,2+3i),(2+i,3-2i)\rangle$.

4. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre $\Bbbk$.

   a) Probar la *regla del paralelogramo*: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right),\ \forall u,v\in V$.

   b) Probar las *fórmulas de polarización*:

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right),\ \Bbbk=\mathbb{R};\quad \langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=3} i^k \left\|u+i^k v\right\|^2,\quad \Bbbk=\mathbb{C};\quad \forall u,v\in V.$$

5. En los siguientes casos, hallar una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V aplicando el método de Gram-Schmidt al conjunto S dado y calcular los coeficientes de Fourier con respecto a la base $\mathcal{B}$ del vector v dado.

   a) $V=\mathbb{R}^3$, con el producto interno habitual, $S=\{(1,0,1),(0,1,1),(1,3,3)\}$, $v=(1,1,2)$.

   b) $V=\mathbb{C}^2$ con el producto interno definido en el ejercicio 3, $S=\{(1,0),(0,1)\}$, $v=(i,-1)$.

   c) $S=\{(1,i,0),(1-i,2,4i)\}$, V es el subespacio de $\mathbb{C}^3$ generado por S, con el producto interno habitual en $\mathbb{C}^3$, $v=(3+i,4i,-4)$.

6. Se define $\langle\ ,\ \rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mediante $\langle (x,y),(x',y')\rangle = 2\,x\,x'+y\,x'+x\,y'+y\,y'$.

   a) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

   b) Hallar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal respecto a este producto interno.

7. Sea V un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita y $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base cualquiera de V. Definimos $\langle\ ,\ \rangle: V\times V\to\Bbbk$ por $\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$ si $v=\sum_{i=1}^n x_i\,v_i$ y $w=\sum_{i=1}^n y_i\,v_i$. Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ define un producto interno en V y que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal respecto a $\langle\ ,\ \rangle$.

8. Hallar explícitamente un producto interno en $\mathbb{R}^2$ que verifique que $\{(2,3),(1,2)\}$ es una base ortonormal.

9. Sean $V=\mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual y W el subespacio generado por $\{(i,0,1)\}$. Hallar bases ortonormales de W y de $W^\perp$. Hallar explícitamente ρ_W y $\rho_{W^\perp}$ y verificar $\rho_W+\rho_{W^\perp}=\mathrm{Id}$.

10. Sea V un espacio vectorial con producto interno, W un subespacio de V y $v\in V$. En los casos siguientes se pide:

    - Hallar $W^\perp$.
    - Hallar las proyecciones $\rho_W(v)$ y $\rho_{W^\perp}(v)$.
    - Calcular la distancia de v a W.

    a) $V=\mathbb{R}^2,\ W=\{(x,y): y=4x\},\ v=(2,6)$, con el producto interno habitual.

    b) $V=\mathbb{C}^3,\ W$ es el subespacio generado por $\{(1,i,1-i),(i,1+i,2)\},\ v=(0,2i-1,1+i)$, con el producto interno habitual.

    c) $V=\mathbb{R}_2[x],\ W=\mathbb{R}_1[x],\ p(x)=4+3x-2x^2$, con el producto interno $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p\,q$. (¿Por qué $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p\,q$ define un producto interno en $\mathbb{R}_2[x]$?)

11. Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial con producto interno V. Probar que $(W_1+W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ y que $W_1^\perp + W_2^\perp \subset (W_1\cap W_2)^\perp$. Probar que si V es de dimensión finita, entonces $(W_1\cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

12. Sea V un espacio vectorial con producto interno y U, W subespacios de V.

    a) Probar $U \subset W$ implica $W^\perp \subset U^\perp$.

    b) Probar $W \subset \left(W^\perp\right)^\perp$. Probar que si V es de dimensión fnita[2], entonces $W = \left(W^\perp\right)^\perp$.

13. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, W un subespacio de V y $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\varphi|_W = \mathrm{Id}$ y $W^\perp \subset \ker\varphi$. Probar que φ es la proyección ortogonal sobre W.

14. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, W un subespacio de V y $v \notin W$. Probar que existe $z \in W^\perp$ tal que $\langle v, z\rangle \neq 0$.

15. Sea V el conjunto de sucesiones reales (x_n) tales que $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$.

    a) Sean $x, y \in V$, $x = (x_n)$, $y = (y_n)$. Probar que

    $$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n\, y_n|\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$$

    para todo $N \geq 1$ y concluir que la serie $\sum x_n\, y_n$ es convergente.

    b) Probar que V es un espacio vectorial real con las operaciones:

    $$(x+y)_n = x_n + y_n, \quad (\lambda x)_n = \lambda x_n,$$

    para todo $n \geq 1$, donde $x = (x_n)$, $y = (y_n)$.

    c) Probar que $\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^\infty x_n\, y_n$ es un producto interno en V, donde $x = (x_n)$, $y = (y_n)$.

    d) Sea W el subespacio generado por $\{x^i : i = 1, 2, \dots\}$, donde $x_i = \left(x_n^i\right)_n$, con $x_n^i = 0$ si $n \neq i$ y $x_i^i = 1$. Probar que $W \subsetneq W^{\perp\perp}$.

Los siguientes ejercicos son optativos.

16. Si $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado y $f : I \to \mathbb{C}$ es una función, entonces para cada t en I es $f(t) = f_1(t) + i\ f_2(t)$, luego f define dos funciones $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ y recíprocamente f_1 y f_2 definen $f = f_1 + if_2$. Se dice que f es *continua* o *integrable* si f_1 y f_2 son continuas o integrables respectivamente. Si f es integrable se define

    $$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b f_1(t)\, dt + i \int_a^b f_2(t)\, dt \in \mathbb{C}.$$

    Sea $H = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\ :\ f \text{ es continua}\}$, definimos $\langle\ ,\ \rangle : H\times H \to \mathbb{C}$ por $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\, dt$. Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en H.

    En los ejercicios siguientes se considera H con este producto interno.

17. Recordar que si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se define $e^z := e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$. La exponencial verifica:

    $$e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad (e^z)^n = e^{nz},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

[2]La hipótesis de dimensión finita es necesaria; ver el ejercicio 15.

a) Probar que para todo $z \neq 0$ en $\mathbb{C}$ es $\int_a^b e^{zt}dt = \left.\frac{e^{zt}}{z}\right|_{t=a}^{t=b} = \frac{e^{az}-e^{bz}}{z}$.

b) Probar que el conjunto $S = \left\{f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{C} : \; f_n(x) = e^{inx}, \; x \in [0,2\pi], \; n \in \mathbb{Z}\right\}$ es un subconjunto ortonormal de H. Deducir que la dimensión de H es infinita.

18. Sea $S = \{f_n : \; n \in \mathbb{Z}\}$ el conjunto ortonormal de H definido en el ejercicio 17 y sea $f \in H$ definida por $f(x) = x$, $\forall x \in [0,2\pi]$.

a) Probar $||f||^2 = \frac{4}{3}\pi^2$ y $\langle f, f_n\rangle = \begin{cases} -\frac{1}{in}, & \text{si } n \neq 0 \\ \pi, & \text{si } n = 0 \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

b) Aplicar la desigualdad de Bessel a f y $\{f_n : \; -h \leq n \leq h\}$, $h = 0, 1, \dots$, para probar

$$\frac{4}{3}\pi^2 \geq \pi^2 + 2\sum_{n=1}^{h} \frac{1}{n^2}.$$

c) Deducir que la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{6}\pi^2$.

6.5. Práctico 4 (operadores en espacios con producto interno)

En los ejercicios de este repartido se considera siempre a $\mathbb{k}^n$ con el producto interno habitual y en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p\,q$.

1. Para cada una de las siguientes funcionales $\alpha : V \to \mathbb{k}$, encontrar un vector w tal que $\alpha(v) = \langle v, w\rangle$ para todo $v \in V$.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha(x,y,z) = x - 2y + 4z$.

b) $V = \mathbb{C}^3$, $\alpha(x,y,z) = 2z - x + i(3x + y)$.

c) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\alpha(p) = p(0) + p'(1)$.

2. En los casos siguientes, para cada $T \in \mathcal{L}(V)$ hallar el adjunto T^*.

a) $V = \mathbb{C}^3$, $T(x,y,z) = (2x + iy, (1-i)z - x, iy)$.

b) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $T(p) = p'$.

c) $T(v) = \langle v, u\rangle\, w$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y u y w son vectores fijos de V.

3. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interno y T un operador en V. Probar que si T es invertible, entonces T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

4. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interno y T un operador en V. Probar que $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.

5. Para cada una de los siguientes operadores, determinar si es normal o autoadjunto.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$.

b) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $T(x,y) = (2x + iy, x + 2y)$.

c) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $T(p) = p'$.

6. Sean T y S operadores autoadjuntos. Probar que $T \circ S$ es autoadjunto si y solo si $T \circ S = S \circ T$.

7. Probar que para todo $T \in \mathcal{L}(V)$, los operadores $T^* \circ T$ y $T \circ T^*$ son autoadjuntos.

8. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y T un operador en V. Se define

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

   a) Probar que T_1 y T_2 son autoadjuntos y que $T = T_1 + i\,T_2$.

   b) Probar que si $T = S_1 + i\,S_2$ con S_1 y S_2 autoadjuntos, entonces $S_1 = T_1$ y $S_2 = T_2$.

   c) Probar que T es normal si y solo si $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

9. Sea T un operador en un espacio con producto interno V y sea W un subespacio T-invariante de V. Probar:

   a) Si T es autoadjunto, entonces $T|_W$ es autoadjunto.

   b) El subespacio $W^\perp$ es T^*-invariante.

10. Sea T un operador normal en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno V. Probar que $\ker T = \ker T^*$ e $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$.

11. Sea T un operador autoadjunto en un espacio de dimensión finita con producto interno V. Probar que para todo v en V es

$$\|T(v) \pm iv\|^2 = \|T(v)\|^2 + \|v\|^2.$$

    Deducir que $T - i\,\mathrm{id}$ es invertible y que $\big((T - i\,\mathrm{id}\,)^{-1}\big)^* = (T + i\,\mathrm{id}\,)^{-1}$.

12. Sea T un operador en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno. Probar:

    a) Si T es autoadjunto, entonces $\langle T(v), v\rangle$ es real para todo $v \in V$.

    b) Si T satisface $\langle T(v), v\rangle = 0$ para todo $v \in V$, entonces $T = 0$. (*Sugerencia:* Sustituir v por $v + w$ y luego por $v + iw$).

    c) Si $\langle T(v), v\rangle$ es real para todo $v \in V$, entonces $T = T^*$.

13. Sea T un operador autoadjunto en un espacio vectorial V con producto interno de dimensión finita n. El operador T se dice que es *definido positivo* si $\langle T(v), v\rangle > 0$ para todo $v \neq 0$ y que es *semidefinido* si $\langle T(v), v\rangle \geq 0$ para todo v.

    Sea $A = [T]_{\mathcal{B}}$ donde $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V. Probar:

    a) T es definido positivo (semidefinido) si y solo si todos sus valores propios son positivos (no negativos).

    b) T es definido positivo (semidefinido) si y solo si L_A lo es.

    c) T es definido positivo si y solo si

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\,\overline{x_i}\,x_j > 0 \quad \text{para todo } (x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

14. Sea T un operador (invertible) en un espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno. Probar que $T \circ T^*$ y $T^* \circ T$ son operadores semidefinidos (definidos) positivos.

15. *a*) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sean T y S operadores autoadjuntos tales que $T \circ S = S \circ T$. Probar que existe una base ortonormal de V tal que diagonaliza simultáneamente a T y a S.

b) Enunciar y probar el resultado análogo para matrices.

16. Sea V un espacio con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ y sea T un operador definido positivo en V. Probar que $\langle u, v\rangle' = \langle T(u), v\rangle$ define otro producto interno en V.

17. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interno y sean T y S operadores autoadjuntos con S definido positivo. Probar que $T \circ S$ y $S \circ T$ son operadores diagonalizables que solo tienen valores propios reales. (*Sugerencia:* Mostrar que $T \circ S$ es autoadjunto con respecto al producto interno $\langle u, v\rangle' = \langle S(u), v\rangle$).

18. Probar el recíproco del ejercicio 16: Sea V un espacio de dimensión finita con un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Probar que cualquier otro producto interno en V se puede expresar de forma única como $\langle u, v\rangle' = \langle T(u), v\rangle$, siendo $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador definido positivo.

6.6. Práctico 5 (operadores en espacios con producto interno)

1. Indicar si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas (asumimos que estamos en un espacio con producto interno y de dimensión finita):

   a) Todo operador unitario es normal.

   b) Todo operador ortogonal es diagonalizable.

   c) Si dos matrices son unitariamente equivalentes, entonces son semejantes.

   d) La suma de dos matrices unitarias es unitaria.

   e) El adjunto de un operador unitario es unitario.

   f) Si T es un operador ortogonal en V, entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz ortogonal para cualquier base $\mathcal{B}$.

   g) Si todos los valores propios de un operador son 1 entonces el operador es unitario u ortogonal.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$. Probar que T es autoadjunto y hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ que consista en vectores propios de T.

3. Sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{k}^n$ y $A = {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$. Probar:

   a) Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases ortonormales de $\mathbb{k}^n$, entonces $A\,A^* = A^*A = \mathrm{Id}$.

   b) Si $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}'$) es una base ortonormal de $\mathbb{k}^n$ y A verifica $A\,A^* = A^*A = \mathrm{Id}$, entonces $\mathcal{B}'$ ($\mathcal{B}$) es una base ortonormal de $\mathbb{k}^n$.

4. Para cada una de las siguientes matrices A encontrar una matriz ortogonal o unitaria Q y una matriz diagonal D tal que $A = QDQ^*$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Probar que la composición de isometrías es una isometría.

6. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $T_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T_\lambda(z) = \lambda\, z$. Hallar los valores de λ para los cuales T_λ es a) normal, b) autoadjunto, c) positivo (ver práctico anterior) d) isometría.

7. ¿Cuales de los siguientes pares de matrices son unitariamente equivalentes?

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$

   c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

8. Sea V el espacio de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{C}$ con el producto interno: $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\,\overline{g}$. Sea $h \in V$ fija. Se define $T : V \to V$ mediante $T(f) = hf$. Probar que T es una isometría si y solo si $|h(t)| = 1$ para todo $t \in [0,1]$.

9. Sea V un espacio con producto interno y sea $T : V \to V$ un operador autoadjunto. Probar que $T - i\,\mathrm{id}$ es invertible y que $S := (T + i\,\mathrm{id}\,) \circ (T - i\,\mathrm{id}\,)^{-1}$ es una isometría.

10. Sea T un operador en un espacio con producto interno de dimensión finita V. ¿Si $\|T(v)\| = \|v\|$ para todo v en alguna base ortonormal, debe ser T una isometría? Probar o dar un contraejemplo.

11. Encontrar una matriz ortogonal cuya primera fila sea $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

12. Sea $V = \mathbb{R}^2$, $W = [(1,3)]$ y $\mathcal{B}$ la base canónica de V. Calcular $[P_W]_{\mathcal{B}}$ donde P_W es la proyección ortogonal sobre W. Hacer lo mismo para $\mathbb{R}^3$ y $W = [(1,0,1)]$.

13. Para cada una de las matrices del ejercicio 4:

    a) Describir la descomposición espectral de L_A.

    b) Definir explícitamente cada una de las proyecciones ortogonales sobre los subespacios propios de L_A.

14. Sea V un $\mathbb{k}$-espacio de dimensión finita con producto interno y sea $P : V \to V$ una proyección.

    a) Si P es una proyección ortogonal probar que $\|P(v)\| \leq \|v\|$ para todo $v \in V$. Dar un ejemplo de una proyección para la cual no sea válida la desigualdad anterior. ¿Que se puede deducir si se da la igualdad?

    b) Si P es normal y $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, probar que P debe ser una proyección ortogonal.

    c) Sea P una proyección sobre un espacio de dimensión finita con producto interno V. Probar que si $\|P(v)\| \leq \|v\|$ para todo v, entonces P es una proyección ortogonal.

15. Sea T un operador normal en un $\mathbb{C}$-espacio con producto interno y de dimensión finita. Usar la descomposición espectral $T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$ para probar:

    a) $T = -T^*$ si y solo si todo valor propio de T es un número imaginario puro.

    b) Existe un operador normal S tal que $S^2 = T$.

    c) Si existe un operador autoadjunto S tal que $S^2 = T$, entonces T es un operador semidefinido positivo.

    d) Si T es un operador semidefinido positivo, entonces existe un único operador semidefinido positivo S tal que $S^2 = T$.

16. Sea T un operador invertible en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. El objetivo de este ejercicio es probar que existen únicos operadores S y U tales que S es definido positivo, U es unitario y $T = U \circ S$.

    a) Probar que existe un operador definido positivo S tal que $S^2 = T^* \circ T$.

    b) Probar que $U := T \circ S^{-1}$ es un operador unitario.

    c) Probar la unicidad de la descomposición $T = U \circ S$, con U unitario y S definido positivo. Sugerencia: si $T = U \circ S$ es una tal descomposición, probar que $T^* \circ T = S^2$ y aplicar $15d$.

6.7. Práctico 6 (formas bilineales simétricas y superficies cuádricas)

En los siguientes ejercicios $\mathbb{k}$ es un cuerpo de característica distinta de 2.

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

    a) Si φ es una forma bilineal en un espacio vectorial V de dimensión finita, existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es diagonal.

    b) Si φ es una forma bilineal simétrica en un espacio vectorial V de dimensión finita, $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es simétrica para toda base $\mathcal{B}$ de V.

    c) Dos matrices congruentes tienen los mismos valores propios.

    d) Toda matriz simétrica es congruente a una matriz diagonal.

2. Determinar cuáles de las siguientes funciones $\varphi : V \times V \to \mathbb{k}$ son formas bilineales, donde V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{k}$.

    a) $\varphi(u, v) = \alpha(u)\, \beta(v)$, donde $\alpha, \beta \in V^*$.

    b) $V = \mathbb{R},\ \mathbb{k} = \mathbb{R},\ \varphi(x, y) = x + 2y$.

    c) $V = \mathbb{R}^2,\ \mathbb{k} = \mathbb{R},\ \varphi(u, v) = \det[u, v]$, donde u y v indican la primera y segunda columna de $[u, v]$, respectivamente.

3. Verificar que las siguientes funciones son formas bilineales y hallar la matriz asociada a cada una de ellas en la base $\mathcal{B}$ dada.

    a) $\varphi : \mathbb{k}^3 \times \mathbb{k}^3 \to \mathbb{k}$, $\varphi((x, y, z)(x', y', z')) = xx' - 2xy' + yx' - zz'$, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$.

    b) $\varphi : M_2(\mathbb{k}) \times M_2(\mathbb{k}) \to \mathbb{k},\ \varphi(A, B) = \mathrm{tr}\,(A)\,\mathrm{tr}\,(B)$,
    $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Se define $\varphi : M_n(\mathbb{k}) \times M_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$ mediante $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}\ (AB)$.

    a) Probar que $\varphi \in \mathrm{Bil}_S\,(M_n(\mathbb{k}))$.

    b) Probar que φ es no degenerada.

5. En cada uno de los casos siguientes encontrar una base φ-ortogonal $\mathcal{B}$ y hallar $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

    a) $\varphi \in \mathrm{Bil}_S\left(\mathbb{k}^2\right)$, tal que $\Phi(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2$, para todo $(x, y) \in \mathbb{k}^2$.

    b) $\varphi \in \mathrm{Bil}_S\left(\mathbb{k}^2\right)$, tal que $\Phi(x, y) = 2xy$, para todo $(x, y) \in \mathbb{k}^2$.

    c) $\varphi = \beta_A \in \mathrm{Bil}_S\left(\mathbb{k}^3\right)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\left(\Bbbk^3\right)$, tal que $\Phi(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 6yz$, para todo $(x,y,z) \in \Bbbk^3$.

6. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$. Probar que en V existe una base φ-ortonormal. *Sugerencia*: partir de una base φ-ortogonal de V y normalizarla.

7. *a*) Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$. Probar que en V existe una base φ-ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que $\Phi(v_i) \in \{0,1\}$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
Sugerencia: recordar que en $\mathbb{C}$ todo elemento tiene una raíz cuadrada.

   b) Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ simétricas. Probar que si A y B tienen el mismo rango, entonces existe $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(\mathbb{C}^n)$ y dos bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^n$ tales que $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ y $B = M_{\mathcal{C}}(\varphi)$.
Luego A y B representan a una misma forma bilineal simétrica si y solo si tienen el mismo rango.

8. Para cada una de las matrices A, hallar los invariantes de Φ, siendo $\varphi = \beta_A \in \operatorname{Bil}_S(\mathbb{R}^3)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrices simétricas tales que B es invertible y tiene todos sus valores propios del mismo signo. Probar que existe una matriz invertible $Q \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $Q^t A\, Q$ y $Q^t B\, Q$ son matrices diagonales. *Sugerencia:* considerar primero el caso en que B tiene todos sus valores propios positivos y definir a partir de B un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

10. Hallar en los siguientes casos la forma bilineal simétrica φ asociada a la forma cuadrática Φ, una base ortonormal $\mathcal{B}$ del espacio tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es diagonal y el índice, la signatura y el rango de φ. En todos los casos se considera el producto interno habitual en $\mathbb{R}^n$.

    a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x,y) = -2x^2 + 4xy + y^2$.

    b) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x,y) = 7x^2 - 8xy + y^2$.

    c) $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \Phi(x,y,z) = 3x^2 - 2xz + 3y^2 + 3z^2$.

11. Sea $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xz + 2\sqrt{2}(x+z) + 1 = 0\}$. Calcular la ecuación de $\mathcal{S}$ en función de las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ hallada en $10c$ y describir $\mathcal{S}$ geométricamente.

12. Clasificar las siguientes cuádricas:

$3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 1 = 0$; $\quad x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy + 6xz + 6yz + c = 0,\ c = 0, -1$;
$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + x + y + z + c = 0$, discutir según $c \in \mathbb{R}$;
$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + x + y - 2z + 1 = 0$; $\quad 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + x + y + z - 1 = 0$.

13. Sea $\mathcal{S}$ la superficie cuádrica definida por $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6xy - 2yz + 3x - 2y - z + 14 = 0$.

    a) ¿Qué tipo de cuádrica es $\mathcal{S}$?

    b) Hallar explícitamente las ecuaciones de los ejes en los cuales $\mathcal{S}$ tiene su forma reducida.

6.8. Práctico 7 (subespacios invariantes y polinomio minimal)

En los ejercicios que siguen todos los espacios son de dimensión finita.

1. Se define $T \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$ mediante $T(X) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)X$.
Estudiar si el subespacio $W = \left\{X \in M_2(\mathbb{R}) : \ X^t = X\right\}$ es T-invariante.

2. Para cada uno de los operadores $T \in \mathcal{L}(V)$ y cada vector $v \in V$, encontrar una base del subespacio T-cíclico generado por v.

    a) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $T(p(x)) = p''(x)$ y $v = x^3$.
    b) $V = M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = X^t$ y $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
    c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)X$ y $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

3. Sea T un operador en V.

    a) Probar que si el polinomio característico de T escinde, entonces también escinde el polinomio característico de la restricción de T a un subespacio T-invariante.
    b) Deducir que si el polinomio característico de T escinde, entonces todo subespacio T-invariante no trivial contiene un vector propio de T.

4. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{k})$$
donde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ son escalares arbitrarios. Probar
$$\chi_A(t) = (-1)^n \left(t^h - a_{n-1}\, t^{n-1} - \cdots - a_1\, t - a_0\right).$$
Sugerencia: probarlo por inducción en n, desarrollando $\det(A - tI)$ por la primera fila.

5. Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio característico $\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$.

    a) Probar que si A es invertible entonces $A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2 A + a_1 I\right)$.
    Sugerencia: recordar el teorema de Cayley-Hamilton.
    b) Calcular A^{-1} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Indicar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

    a) El polinomio minimal y el polinomio característico de un operador diagonalizable son iguales.
    b) Sea T un operador en V, $n = \dim V$, $m_T(x)$ el polinomio minimal de T y $\chi_T(x)$ el polinomio característico de T. Si $\chi_T(x)$ escinde, entonces $\chi_T(x)$ divide a $m_T(x)^n$.
    c) Si el polinomio minimal de T escinde, entonces T es diagonalizable.

7. Calcular el polinomio minimal de las siguientes matrices.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -14 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Calcular el polinomio minimal de los siguientes operadores.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde $T(x, y) = (x + y, x - y)$.
   b) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ donde $T(p(x)) = p'(x) + 2p(x)$.
   c) $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ donde $T(X) = X^t$.

   Sugerencia: los dos últimos casos se pueden resolver sin hallar la matriz asociada al operador.

9. Determinar cuales de las matrices y operadores de los dos ejercicios anteriores son diagonalizables.

10. Sea T un operador diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ que verifica $T^3 - 2T^2 + T = 0$. Describir las posibles formas diagonales de T.

11. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ que verifica $T^3 = T^2$, $T^2 \neq T$ y T no es nilpotente. ¿Es T diagonalizable?

12. Sea T un operador en V y W un subespacio T-invariante de V. Probar que el polinomio minimal de $T|_W$ divide al polinomio minimal de T.

13. Sea T un operador en V. Sean W_1 y W_2 subespacios T-invariantes de V tales que $V = W_1 \oplus W_2$.

    a) Sean $\chi_1(x)$ y $\chi_2(x)$ los polinomios característicos de $T|_{W_1}$ y $T|_{W_2}$ respectivamente. Probar que $\chi_1(x)\,\chi_2(x)$ es el polinomio característico de T.
    b) Sean $m_1(x)$ y $m_2(x)$ los polinomios minimales de $T|_{W_1}$ y $T|_{W_2}$ respectivamente. Probar que $m_1(x)\,m_2(x)$ se anula en T. Mostrar mediante un contraejemplo que $m_1(x)\,m_2(x)$ **no**[3] es necesariamente el polinomio minimal de T.

14. Sea A una matriz $n \times n$. Probar que la dimensión del subespacio generado por $\{I, A, A^2, \dots\}$ coincide con el grado del polinomio minimal de A.

15. Sea $A \in M_n(\mathbb{k})$ como en el ejercicio 4. Probar

$$m_A(t) = t^h - a_{n-1}\,t^{n-1} - \cdots - a_1\,t - a_0.$$

    Sugerencia: observar que si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{k}^n$, entonces $e_i = A^{i-1}e_1$, para todo $i = 2, \dots, n$.

6.9. Práctico 8 (forma de Jordan)

En los ejercicios que siguen todos los espacios son de dimensión finita, salvo que se diga lo contrario.

[3] Con un poco de trabajo se puede probar que el polinomio minimal de T es el mínimo común múltiplo de $m_1(x)$ y $m_2(x)$.

1. Se consideran las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -13 & -1 & 16 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Probar que son nilpotentes. Hallar sus polinomios minimales y sus formas de Jordan.

2. Probar que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es un operador nilpotente, entonces su traza es nula.

3. *a*) Probar que si $A \in M_n(\Bbbk)$ y $\Bbbk = \mathbb{C}$, entonces A es nilpotente si y solo si 0 es su único valor propio.
   b) Probar con un contraejemplo que esto es falso si $\Bbbk = \mathbb{R}$.

4. Para cada uno de los operadores T, encontrar la forma canónica de Jordan y una base de Jordan.
   a) $T = L_A$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   b) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ definido por $T(p(x)) = p'(x) + 2p(x)$.
   c) $T = L_A$ donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -4 & 6 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

5. *a*) Sea T un operador y λ un valor propio de T. Probar que si $\operatorname{rango}(T-\lambda \operatorname{id})^m = \operatorname{rango}(T-\lambda \operatorname{id})^{m+1}$ para algún número natural m, entonces $\operatorname{Ker}(T-\lambda \operatorname{id})^n = \operatorname{Ker}(T-\lambda \operatorname{id})^m$ para todo n mayor o igual que m.
   b) *Test de diagonalización.* Sea T un operador cuyo polinomio característico escinde. Supongamos que $\lambda_1 \dots, \lambda_h$ son los valores propios distintos de T. Entonces T es diagonalizable si y solo si $\operatorname{rango}(T-\lambda_i \operatorname{id}) = \operatorname{rango}(T-\lambda_i \operatorname{id})^2$ para todo $i = 1, \dots, h$.

6. Para cada una de las siguientes matrices A, encontrar su forma de Jordan y una matriz Q tal que $J = Q^{-1} A\, Q$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. ¿Cuáles de las siguientes matrices son semejantes entre sí?

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Sea A una matriz $n \times n$ cuyo polinomio característico escinde. Probar que A y A^t tienen la misma forma de Jordan y concluir que A y A^t son semejantes. (*Sugerencia*: Para cada valor propio λ de A y cualquier natural r, mostrar que $\operatorname{rango}\left((A-\lambda I)^r\right) = \operatorname{rango}\left((A^t-\lambda I)^r\right)$.)

9. Sea V el subespacio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ generado por las funciones e^x, xe^x, x^2e^x y e^{2x}. Definimos $T : V \to V$ por $T(f) = f'$. Encontrar la forma de Jordan y una base de Jordan para T.

10. El objetivo de este ejercicio y del siguiente es probar que si el polinomio característico de un operador T escinde, entonces T se escribe de forma única como $T = S + N$, donde S es diagonalizable, N es nilpotente y $S \circ N = N \circ S$. Esta es la *descomposición de Jordan* del operador T.

    Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ cuyo polinomio característico escinde y supongamos que

    $$\chi_T(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_h)^{n_h},$$

    siendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ los valores propios distintos de T. Sean $P_1, \ldots, P_h \in \mathcal{L}(V)$ las proyecciones asociadas a la descomposición

    $$V = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i \operatorname{id})^{n_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(T - \lambda_i \operatorname{id})^{n_h}.$$

    Definimos $S := \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_h P_h$ y $N := T - S$.

    a) Si $\mathcal{B}$ es una base de Jordan para T, describir $[S]_\mathcal{B}$ y $[N]_\mathcal{B}$.

    b) Probar que S es diagonalizable, N es nilpotente y $S \circ N = N \circ S$.

11. Sean T, S y N operadores en un mismo espacio vectorial V tales que $T = S + N$ donde S es diagonalizable, N nilpotente y $S \circ N = N \circ S$. Probar que T y S tienen el mismo polinomio característico y que S es el definido en la parte b) del ejercicio anterior.

    (*Sugerencia*: Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ los valores propios distintos de S y $E_i := \operatorname{Ker}(S - \lambda_i \operatorname{id})$, $i = 1, \ldots, h$. Observar que E_i es N invariante y que $N|_{E_i} \in \mathcal{L}(E_i)$ es nilpotente. Para cada $i = 1, \ldots, h$ sea $\mathcal{B}_i$ una base de Jordan para $N|_{E_i}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_h$. Calcular $[T]_\mathcal{B}$.)

    Observar que esto prueba la unicidad de la descomposición de Jordan de T.

12. Hallar la descomposición de Jordan de los operadores del ejercicio 4.

13. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ que verifica $T^5 - 6\,T^4 + 8\,T^3 + 6\,T^2 - 9\,T = 0$.

    a) Hallar los posibles valores propios de T.

    b) Si T es sobreyectiva y $T + \operatorname{id}$ es inyectiva, dar los posibles polinomios minimales de T.

    c) Si además T no es diagonalizable, hallar las posibles formas de Jordan de T y los respectivos polinomios característicos.

    d) En las hipótesis de (13*c*), si $T = S + N$ es la descomposición de Jordan de T con S diagonalizable y N nilpotente, hallar el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $N^n = 0$.

6.10. Práctico 9 (formas multilineales alternadas)

1. Sea $\Bbbk$ un cuerpo de característica distinta de 2 y V un $\Bbbk$-espacio vectorial. Si $\varphi \in \operatorname{Bil}(V)$, definimos $\varphi^t \in \operatorname{Bil}(V)$ mediante $\varphi^t(u,v) = \varphi(v,u)$, para todo $u, v \in V$. Probar:

    a) Dada $\varphi \in \operatorname{Bil}(V)$, es $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$ si y solo si $\varphi^t = \varphi$ y $\varphi \in \operatorname{Alt}_2(V)$ si y solo si $\varphi^t = -\varphi$.

    b) $\operatorname{Bil}(V) = \operatorname{Bil}_S(V) \oplus \operatorname{Alt}_2(V)$.

2. Escribir las siguientes formas alternadas en función de la base $\left\{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\right\}$, siendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

a) $\omega \in \mathrm{Alt}_2(\mathbb{R}^3)$, $\omega((x,y,z),(x',y',z')) = 3xy' - 3x'y - yz' + y'z + 2xz' - 2x'z$.

b) $\omega \in \mathrm{Alt}_2(\mathbb{R}^3)$, $\omega((x,y,z),(x',y',z')) = xy' + xz' + yz' - (x'y + x'z + y'z)$.

c) $\omega \in \mathrm{Alt}_3(\mathbb{R}^3)$, $\omega((x,y,z),(x',y',z'),(x'',y'',z'')) = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x & y & z \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$.

d) $\omega \in \mathrm{Alt}_3(\mathbb{R}^4)$, $\omega = e_1^* \wedge e_4^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* + e_4^* \wedge e_3^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_2^*$.

e) $\omega \in \mathrm{Alt}_3(\mathbb{R}^4)$, $\omega((x,y,z,t),(x',y',z',t'),(x'',y'',z'',t'')) = \begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ x'' & x' & x \\ t'' & t' & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & x & t \\ z' & x' & t' \\ z'' & x'' & t'' \end{vmatrix}$.

f) $\alpha \wedge \beta \in \mathrm{Alt}_2(\mathbb{R}^3)$, siendo $\alpha(x,y,z) = x + y + z$ y $\beta(x,y) = 2x - y$. (Sugerencia: escribir α y β en función de la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.)

g) $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \in \mathrm{Alt}_3(\mathbb{R}^3)$, siendo $\alpha(x,y,z) = x + y$, $\beta(x,y,z) = x + z$ y $\gamma(x,y,z) = y + z$.

3. Calcular $\sum_{k=0}^{\infty} \dim \mathrm{Alt}_k(\mathbb{R}^n)$, para $n = 1, 2, \ldots$.