**Universidad de la República** **Cálculo 1**
**Facultad de Ingeniería - IMERL** **Primer semestre 2016**

## Práctico 9 - Integrales impropias

1. Clasificar:

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx \qquad \text{(b)} \int_0^{1} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \qquad \text{(c)} \int_0^{1} \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

2. Clasificar y hallar la integral en caso de convergencia

$$\text{(a)} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^{\alpha}(x)}\,dx \qquad \text{(b)} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx \qquad \text{(c)} \int_0^{1} \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$$

3. Probar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dx$ converge y calcularla.

4. (a) Probar que las integrales impropias $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ y $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ convergen y relacionarlas.

   (b) Deducir el valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$.

5. Clasificar:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)}\,dx \qquad \text{(c)} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1}\,dx \qquad \text{(d)} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(e)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

6. Clasificar y hallar la integral en caso de convergencia

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

7. Hallar el valor de $k$, real, para que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1}\right)dx$ sea convergente y calcularla.

8. (a) Calcular $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4+t^2+1}$ (Sugerencia: Dividir entre el polinomio $t^2+t+1$).

   (b) Calcular $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^2 x}dx$ (Sugerencia: Hacer el cambio de variable, $t=\tan(x)$ con lo cual $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ )

9. Sean $f$ y $g$ funciones derivables en $[a,+\infty)$ con derivadas de primer orden integrables en el mismo intervalo y tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = L \in \mathbb{R}$. Probar que entonces $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ converge si y solo si $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ converge.

10. Clasificar:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ (Sug: utilizar el ejercicio anterior)

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\, dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(t^2)\, dt$ (Sug: escribir $\operatorname{sen}(t^2) = 2t\operatorname{sen}(t^2)\dfrac{1}{2t}$ y usar partes) ¿Se cumple que $\operatorname{sen}(t^2)$ tiende a 0?

**Ejercicios complementarios**

11. Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función derivable que toma solamente valores positivos. Se pueden extender a este caso las fórmulas vistas para el área y el volumen del cuerpo de revolución generado por la gráfica de la función alrededor del eje de las abscisas (observemos que en este caso es un cuerpo no acotado). Las fórmulas son:

$$A(f) = 2\pi \int_a^{+\infty} f(t)\sqrt{1 + (f'(t))^2}dt,$$

$$V(f) = \pi \int_a^{+\infty} (f(t))^2 dt.$$

Cuando $A(f)$ converge decimos que el cuerpo tiene área finita, y cuando diverge decimos que tiene área infinita. De la misma forma, cuando $V(f)$ converge decimos que el cuerpo tiene volumen finito, y cuando diverge decimos que tiene volumen infinito.

Considere la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{1}{t}$. Demuestre que el cuerpo de revolución obtenido tiene área infinita pero volumen finito.