Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer semestre 2016**

Práctico 8 - Cálculo de integrales

1. Calcular integrando por partes:

(1) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \, dx$

(2) $\displaystyle\int x 2^{-x} \, dx$

(3) $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$

(4) $\displaystyle\int x \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

(5) $\displaystyle\int x^2 \log x \, dx$

(6) $\displaystyle\int \log x \, dx$

(7) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

(8) $\displaystyle\int \cos x \operatorname{sen} x \, dx$

(9) $\displaystyle\int e^{\alpha x} \cos(\beta x) \, dx$

2. Integrar usando el método de sustitución:

(1) $\displaystyle\int (2x+3)^7 \, dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+8x^2}} \, dx$

(3) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^3 x \, dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x} \, dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{1+9x^2} \, dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{5x}} \, dx$

(7) $\displaystyle\int x^2 \sqrt{1-x^3} \, dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} \, dx$

(9) $\displaystyle\int x^2 \sqrt{x+3} \, dx$

3. Sea $f : [0,8] \to \mathbb{R}$ continua con derivada continua y tal que $f(0) = f(2) = 0$. Demostrar las siguientes igualdades:

$$(1) \quad \int_0^8 f(x)\,dx = 3\int_0^2 f(x^3)x^2\,dx \qquad (2) \int_0^2 e^x f'(x)\,dx = -\int_0^2 e^x f(x)\,dx$$

4. Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:

(1) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-x-2} \, dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} \, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2} \, dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-6x^2+11x-6} \, dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{3x^2+3x+2} \, dx$

(6) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{(2x^2+1)(x-1)}$

5. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

(1) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \, dx$

(2) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3(2x+1)\sec^2(2x+1) \, dx$

Recordar que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

6. *a*) Probar que, $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

b) Calcular $\int_0^1 x^2(1-x)^{30} \, dx$.

7. Sea f continua. Demostrar que $\int_0^\pi x f(\text{sen}x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\text{sen}x)\,dx$. Calcular $\int_0^\pi \frac{x\text{sen}x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

8. Calcular las siguientes integrales aplicando el cambio de variable que se indica:

$$(1)\int_2^5 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}\ ,\ x=t^2+1 \qquad (2)\int_0^2 \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}dx\ ,\ x=4\text{sen}^2(t)-2$$

9. *a*) Hallar la primitiva F de la función

$$f(x)=\text{tg}(x)\log(\cos(x)),\quad \text{para}\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

que verifica $F(0)=0$.

b) Calcular el primer término no nulo en el desarrollo de Taylor de F alrededor de 0.

c) Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}$$

10. Calcular:

$$(1)\int \frac{1}{3x-1}\,dx \qquad (5)\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \qquad (9)\int \frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$(2)\int \text{tg}\,x\,dx \qquad (6)\int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}}\,dx \qquad (10)\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$

$$(3)\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \qquad (7)\int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}\,dx \qquad 11)\int_1^e \frac{1}{x}\,\text{sen}^3(1+\log x)\,dx$$

$$(4)\int \frac{\text{arc tg}\,x}{1+x^2}\,dx \qquad (8)\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad (12)\int \text{arc tg}\,x\,dx$$

11. Calcular por sustitución recordando que si $t=\text{tg}(\frac{x}{2})$, $\text{sen}(x)=\frac{2t}{1+t^2}$ y $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$:

$$(1)\int \frac{dx}{\text{sen}(x)+\cos(x)} \qquad (2)\int \frac{\text{sen}(x)dx}{1+\text{sen}(x)+\cos(x)}$$

12. Calcular el área encerrada entre:

a) la parábola $y=x^2$ y la recta $2x+3$.

b) la curva $y=e^x$, la curva $y=e^{-x}$ y la recta $x=1$.

c) la recta $y=x+5$ y la parábola $\frac{x^2}{2}+1$.

13. Sea $A(t)$ el área de la región del plano comprendida entre la elipse de ecuación $4x^2+y^2=1$, la recta horizontal $y=1$ y la recta vertical $x=t$, con $t\in[0,\frac{1}{2}]$

a) Expresar $A(t)$ (no calcularla).

b) Calcular los valores máximo y mínimo absolutos de $A(t)$ en el intervalo $[0,\frac{1}{2}]$.

14. El volumen de un cuerpo de revolución se puede calcular usando la formula

$$V = \int_a^b \pi r(x)^2 dx$$

donde $r(x)$ es el radio del círculo obtenido al girar la figura alrededor del eje de revolución. Usando esta fórmula calcular los siguientes volúmenes:

   a) volumen de la esfera de radio R;
   b) volumen del cono recto de base circular de radio R y altura h;
   c) volumen de la copa (o paraboloide elíptico): $x^2 + y^2 = z \leq 1$ (en la intersección con el plano $x = 0$ se tiene parábola $z = y^2$).

15. (*Segundo parcial primer semestre 2014*)
Tenemos un cono de altura h y radio en la base r.

   a) Sabemos (no se pide demostrar) que el área de revolución engendrada por el giro de la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, alrededor del eje Ox es:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

   Calcular el área de la superficie del cono de revolución (sin base) de altura h y radio de la base igual a r.
   b) Deducir la fórmula del volumen del cuerpo de revolución que resulta de girar la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, alrededor del eje Ox.
   c) Calcular el volumen del cono de revolución de altura h y radio de la base igual a r.
   d) Una marca famosa de helados está lanzando un nuevo cono helado. El cono debe llevar 50π cm^3 de helado (y no puede sobresalir del cono). El material que se usa para hacer el envoltorio es costoso, por tanto se quiere que el cono tenga la menor superficie posible. Calcular h y r del nuevo cono helado.

Ejercicios complementarios

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable Riemann en todo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = f(x) - \int_0^x \frac{tf(t)}{1 + t^2} dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   a) Probar que g es integrable en todo intervalo cerrado y acotado.
   b) Probar que si g es continua entonces f también lo es, y si g es derivable entonces f también lo es.

17. Recordemos que la longitud de arco de una curva $f(x)$ para $a \leq x \leq b$ está dada por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

   a) Calcular la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

   usando la sustitución $y = x + \sqrt{1 + x^2}$.
   b) Probar que la longitud del arco de la parábola $f(x) = ax^2$ para un $a \in \mathbb{R}$ y el intervalo $[0, b]$ es igual a

$$\frac{b}{2}\sqrt{1 + 4a^2b^2} + \frac{1}{4a} ln|2ab + \sqrt{1 + 4a^2b^2}|.$$

   Sugerencia: usar integración por partes, luego sumar y restar 1 en el lugar apropiado de la integral obtenida y terminar aplicando la parte *a*).