Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer semestre 2016**

Práctico 7 - Integrabilidad y Teorema Fundamental

1. Calcular $\int_a^b e^x\,dx$ hallando sus sumas superiores e inferiores para particiones equiespaciadas.
   Recordar que $\sum\limits_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^m - r^{n+1}}{1-r}$.

2. Demostrar que
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$
   Sugerencia: toda partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ da origen a una partición $P' = \{t_0 + c, \ldots, t_n + c\}$ de $[a+c, b+c]$ y viceversa.

3. Probar que si f es continua y no negativa en $[a,b]$, entonces
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = 0 \;\; \forall\, x \in [a,b]$$

4. Sabiendo que $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, demostrar que:
   a) Si f es par, entonces $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$.
   b) Si f es impar, entonces $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

5. Demostrar la siguiente desigualdad:
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx \leq \frac{1}{2}$$

6. Utilizar el teorema del valor medio para probar que
$$\lim_{x\to 1} \int\limits_x^{x^2} \left(\frac{1}{\log(t)} - \frac{1}{t\,\log(t)} \right) dt = 0$$

7. Sea f continua en $[2,8]$, tal que $\int_2^8 f(x)\,dx = 20$ y $\int_8^4 f(x)\,dx = 12$.

   a) Calcular $\int_2^4 f(x)\,dx$

   b) Probar que existe $c \in [2,4]$ tal que $f(c) = 16$.

8. Sin calcular la integral, derivar las siguientes funciones:

$$\text{(a)}\quad f_1(x) = \int_0^x \sqrt{t^2-t+1}\,dt \qquad \text{(b)}\quad f_2(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2-t+1}\,dt \qquad \text{(c)}\quad f_3(x) = \int_x^3 \sqrt{t^2-t+1}\,dt$$

$$\text{(d)}\quad f_4(x) = \int_{\cos(x)}^3 \sqrt{t^2-t+1}\,dt \qquad \text{(e)}\quad f_5(x) = \int_{\cos(x)}^{\log(x)} \sqrt{t^2-t+1}\,dt$$

9. Determinar (si existen) una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un número real $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\text{(a)}\quad \int_c^x f(t)\,dt = 2 + x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \text{(b)}\quad \int_1^x f(t)dt = \log(x^2+2x+2) - c$$

$$\text{(c)}\quad \int_c^x f(t)dt = (x-1)^4 \qquad \text{(d)}\quad \int_0^x f(t)dt = c - e^{-x^2}$$

10. Sea $F(x) = \int_0^x f$. En cada uno de los siguientes casos indicar para qué valores de x se verifica que $F'(x) = f(x)$.

$$i)\, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \le 1 \\ 1 \text{ si } 1 < x \end{cases} \qquad ii) f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \le 0 \\ x \text{ si } x \ge 0 \end{cases} \qquad iii)\, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q}, \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$$

11. Sea f una función continua, monótona estricta en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

   a) Probar que

$$\int_a^x f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x) + af(a) = 0 \;\; \forall\, x \in [a,b]$$

   Interprete geométricamente el resultado.

   b) Calcular $\int_1^2 \sqrt{t}\,dt$ y $\int_1^2 \log(t)\,dt$, utilizando el resultado de la parte anterior.

12. Consideremos la función $y = F(x)$ definida por la fórmula

$$F(x) = \int_0^x e^{\log(3)-s^2}\,ds.$$

Sea $g = F^{-1}$. Calcular la derivada de g en $y = 0$.
Observación: La integral que aparece en este ejercicio no admite una expresión elemental, por lo que no es posible hallar una fórmula para g.

13. Sea $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int\limits_{x}^{x+1} e^{-t^2}\, dt$

   a) Probar que G es derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcular $G'(x)$.

   b) Graficar y estudiar extremos relativos y absolutos de G.

Ejercicios complementarios

14. Sea $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ con $0 < a < b$.

   a) Demuestre que para $i = 1, 2, \ldots, n$ el número $x_i^* > 0$ dado por

$$(x_i^*)^2 = \frac{1}{3}[x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_i + x_i^2]$$

   satisface la desigualdad $x_{i-1} < x_i^* < x_i$.

   b) Utilizando la igualdad $(c - d)(c^2 + cd + d^2) = c^3 - d^3$ demuestre que:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

   c) Explique por qué el cálculo anterior demuestra que:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

15. *a*) Demostrar que si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\, x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\mu$$

   para un cierto $\mu \in [m, M]$.

   b) Demostrar que si f es continua en $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi)$ para un cierto $\xi \in [a, b]$. Este resultado se conoce como el teorema del valor medio para integrales. Ver con un ejemplo que la continuidad es esencial.

   c) De un modo más general si f es continua en $[a, b]$ y g y fg son integrables y g es no negativa en $[a, b]$ demostrar que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$ para un cierto $\xi \in [a, b]$. Este resultado se conoce como segundo teorema del valor medio para integrales.

   d) Deducir el mismo resultado si g es no positiva (en vez de no negativa) en $[a, b]$ y observar que la hipótesis de que g no cambia de signo en $[a, b]$ es esencial.