Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2016**

Práctico 5 - Derivación

1. Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones en un punto genérico de su dominio.

   a) $f(x) = x^2$
   b) $f(x) = \log(x)$
   c) $f(x) = e^x$
   d) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$.

   a) Graficar y calcular la pendiente de las rectas que pasan por los puntos $(2, f(2))$ y $(x, f(x))$ con $x = 3$, $x = 2{,}5$ y $x = 2{,}1$.
   b) Graficar y calcular la pendiente de la recta tangente al gráfico de f por el punto $(2, f(2))$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $L = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$.

   a) Probar o refutar, a partir de la definición, que f es derivable en x_0.
   b) Suponiendo que f es derivable en x_0, ¿qué relación hay entre L y $f'(x_0)$?

4. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $K = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0-h)}{h}$.

   a) Probar o refutar, a partir de la definición, que g es derivable en x_0.
   b) Suponiendo que g es derivable en x_0, ¿qué relación hay entre K y $g'(x_0)$?

5. Sean las siguientes funciones de reales (en su máximo dominio):

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{x^2+5}{3x+1}, \quad h(x) = e^x.$$

   Calcule las derivadas de las siguientes funciones: f, g, h, fg , fh , $g \circ f$, $h \circ g$, $f \circ g$, $f \circ h$.

6. Si f y g son funciones derivables en todo su dominio, halle las siguientes derivadas en función de las derivadas de f y g:

   a) $\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}$
   b) $(f(x))^{g(x)}$

7. Las funciones de la figura 2 son las derivadas de las funciones de la figura 1 en desorden. Indicar cuál es la derivada correspondiente de cada función.

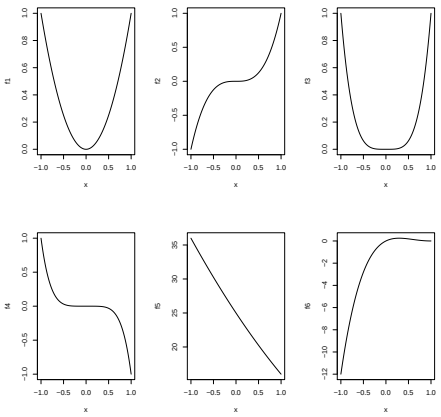

Figura 1: Funciones.

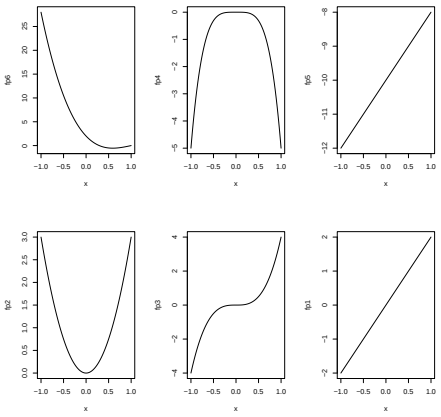

Figura 2: Derivadas.

8. Estudiar la existencia de extremos absolutos de $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\log(x))}{x}$, en los siguientes intervalos hallándolos cuando corresponda:

$$a) \quad I = [e^{-\pi}, 1] \qquad b) \quad I = (e^{-\pi}, 1) \qquad c) \quad I = [e^{-\pi}, 1) \qquad d) \quad I = (e^{-\pi}, 1]$$

9. *a*) Dado $s > 0$, probar que entre todos los x, y tal que $x + y = s$ el valor $x^2 + y^2$ es mínimo cuando $x = y$. Cual es el significado geométrico de este resultado (Realice un dibujo y recuerde que $\sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia de un punto al origen).

   b) Probar que de todos los rectángulos con perímetro dado, el cuadrado es el de mayor área.

10. Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.

11. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo, si el rectángulo tiene como lados a) 10 y 10 cm. b) 12 y 18 cm.

12. Demuestre que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera sea el valor de b.

13. Demuestre que la ecuación $x^2 = x\text{sen}(x) + \cos(x)$ tiene exactamente dos raíces reales.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Mostrar que $f(1) = f(-1) = 0$ pero sin embargo f' no se anula en el intervalo $(-1, 1)$. Explicar por que esto no contradice el teorema de Rolle.

15. Verifique si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange en los intervalos indicados. En caso afirmativo, hallar algún valor intermedio que verifique la conclusión del teorema.

    a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ en $[\frac{1}{2}, 1]$.
    b) $f(x) = x \log x$ en $[1, e]$.
    c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $[-1, 1]$.
    d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ en $[1, 3]$.

16. Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

    tiene derivada positiva en $x = 0$, pero no es creciente en ningún intervalo que contenga a $x = 0$ (tiene intervalos tan cercanos a $x = 0$ como se quiera en que su derivada es negativa, y por lo tanto, en esos intervalos es decreciente).

17. Calcular los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital:

$$a) \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} \qquad b) \quad \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \qquad c) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(ax)}{\text{sen}(bx)} \quad b \neq 0$$

18. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$.

    a) Hallar el intervalo de longitud máxima, que contenga al 0 en el que se puede definir la inversa de f (sea g esta inversa).
    b) Graficar g y hallar $g'(4)$.

19. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^{17} + x^{13} + x^7 + x^3 + 5x - 5$. Investigar si f es invertible y en caso de que lo sea calcular $(f^{-1})'(4)$.

20. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que: $f(x) = x^5 + e^x$. f es invertible e indicaremos como g a su inversa. Calcular la derivada de $xe^{g(x)}$ en $x = 1$.

Ejercicios complementarios

21. Se desea ingresar una escalera de 125 dm de alto a una torre de 27 dm de profundidad y 125 dm de altura (no se consideran los anchos).
    ¿Cuál es la mínima altura de la puerta (h) que lo hace posible?