Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre de 2016**

Práctico 4 - Límites y continuidad de funciones

1. *a*) Calcular los siguientes límites:

$$a)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}\qquad b)\quad \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}\qquad c)\quad \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

$$d)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\qquad e)\quad \lim_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{x-1}}\qquad f)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\,(1-\cos x)}{3x^2}$$

b) Usando que $\operatorname{sen} x \le x \le \operatorname{tg} x \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$.

c) Calcular discutiendo según $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, los siguientes límites:

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^a}\qquad b)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{(x-1)^a}\qquad c)\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}(x^a)}{x}$$

2. Calcular los siguientes límites:

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\qquad b)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\frac{1}{x}}}\qquad c)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$$

3. Encontrar un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo x que cumple $0 < |x - a| < \delta$.

$$a)\quad f(x) = x^4,\ l = a^4\qquad b)\quad f(x) = \frac{1}{x},\ a = 1,\ l = 1\qquad c)\quad f(x) = x^4 + \frac{1}{x},\ a = 1,\ l = 2$$

4. Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones:

a) $f(x) = [x]$ ($[x]$ es la parte entera de x).
b) $f(x) = [1/x]$.
c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$.
d) $f(x) =$ el primer número del desarrollo decimal de x.
e) $f(x) =$ el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito y cero en el caso contrario.

5. Asignar un valor $f(0)$ para cada una de las funciones definidas en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, de modo que cada una de las siguientes funciones sean continuas en $\mathbb{R}$.

$$a)\quad f(x) = x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\qquad b)\quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

6. Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si} \quad x < 1 \\ ax + b & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

7. *a*) Sea $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de Dirichlet, es decir:

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Probar que D es discontinua en todo punto.

b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de g.

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Hallar α para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$. Esbozar el gráfico de f.

8. *a*) Sea f una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en cero.

b) Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún a distinto de cero.

c) Sea g continua en cero, $g(0) = 0$ y $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demostrar que f es continua en cero.

9. Sean f y g funciones reales y sea $c \in \mathbb{R}$.

a) Demostrar que si f es discontinua en c y g es continua en c entonces $f + g$ es discontinua en c. ¿Qué pasa si ambas funciones son discontinuas en c?

b) ¿Qué se puede afirmar con respecto al producto de las funciones?

c) Supongamos ahora que $f(x) = x^2$ y $g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq 0 \\ |4 - x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Estudiar la continuidad en 0 de f, g , $f \circ g$ y $g \circ f$.

(d) Definir f y g para que f sea discontinua en c, g sea discontinua en $f(c)$ y $g \circ f$ sea continua en c.

10. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles de ellas están acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo o mínimo. (Observar que f puede tener esas propiedades aún no siendo continua y aunque el intervalo no sea cerrado.)

    a) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.
    b) $f(x) = x^3$ en $(-1, 1)$.
    c) $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$.
    d) $f(x) = x^2$ en $[0, +\infty)$.
    e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq a \\ a+2 & \text{si } x > a \end{cases}$, en $(-a-1, a+1)$ (discutiendo según a).
    f) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq a \\ a+2 & \text{si } x > a \end{cases}$, en $[-a-1, a+1]$.
    g) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, en $[0, a]$.
    h) $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\cos x + \sqrt{1+a^2}\right)$ en $[0, a^3]$.

11. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Demostrar que f tiene algún punto fijo, es decir, que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

12. Demostrar que existe algún número x tal que

$$a) \quad x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119 \qquad b) \quad \operatorname{sen} x = x - 1$$

13. *a*) Demostrar la siguiente afirmación:
    Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces, f es uniformemente continua en I si y sólo si para cualquier par de sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de puntos de I tales que $x_n - y_n \to 0$ se verifica $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.
    b) Escribir la condición contraria a la de la afirmación anterior, para describir en términos de sucesiones cuándo una función no es uniformemente continua.
    c) Probar que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ (sugerencia: considerar las sucesiones dadas por $x_n = n$ e $y_n = n + \frac{1}{n}$).

14. Determinar en cada caso si f es uniformemente continua en I:

    a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad I = (0, 2)$
    b) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad I = [1, 2]$
    c) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad I = [1, +\infty)$
    d) $f(x) = [x], \quad I = [0, 1]$
    e) $f(x) = [x], \quad I = (0, 1)$

Ejercicios complementarios

15. Dar un ejemplo de función para la cual la siguiente proposición sea falsa: si $|f(x)-l| < \varepsilon$ cuando $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-l| < \varepsilon/2$ cuando $0 < |x-a| < \delta/2$.

16. *a*) Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ existe un conjunto finito F que verifica que $|f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in (a,b) - F$. Probar que f es continua en $c \in (a,b)$ si y solo si $f(c) = 0$.

    b) Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } \operatorname{mcd}\{p,q\} = 1 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

    Usar la parte anterior para probar que f es discontinua en cada racional y continua en cada irracional. La función f se llama *función de Riemann*.

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Probar que f está acotada y que tiene máximo y/o mínimo.

18. Sean I un intervalo y $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones. Investigue si las siguientes afirmaciones son ciertas en general, demostrándolo en caso afirmativo o dando un contraejemplo en caso negativo:

    a) Si f y g son uniformemente continuas en I, entonces $f+g$ es uniformemente continua en I.

    b) Si f y g son uniformemente continuas en I, entonces fg es uniformemente continua en I.

    c) Si f es uniformemente continua en I, entonces $1/f$ es uniformemente continua en I.

    Investigue si aquellas que en general son falsas pueden ser demostradas añadiendo alguna hipótesis sobre I.