Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2016**

Práctico 3 - Sucesiones

1. Estudiar monotonía, acotación y convergencia de las siguientes sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

   a) $a_n = 1+\dfrac{1}{n}$ *b)* $a_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{n}$ *c)* $a_n = n+\dfrac{1}{n}$ *d)* $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ *e)* $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

2. Encontrar los límites de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

   a) $a_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$ *b)* $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos(n)$ *c)* $a_n = \dfrac{2n-5}{n+3-5^{1/n}}$

   d) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ *e)* $a_n = \dfrac{n^\alpha}{e^n}$ $\alpha\in\mathbb{R}$ *f)* $a_n = \dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

3. Estudiar límites de las siguientes sucesiones:

   a) $a_n = \dfrac{n+\sqrt{n}-1}{2n^2-n^{(1/n)}}$ *b)* $b_n = (-1)^n$ *c)* $c_n = a_n+b_n$ *d)* $d_n = a_nb_n$

4. Las siguientes sucesiones son convergentes ($\lim_{n\to+\infty} a_n = L$), es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de $\varepsilon > 0$) tal que $\forall\ n \geq n_0,\ |a_n - L| < \varepsilon$. Determinar en cada caso el primer valor de n_0 que corresponde a los siguientes valores de ε: 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001.

   a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ *b)* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ *c)* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ *d)* $a_n = \dfrac{1}{n!}$ *e)* $a_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$

5. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas justificando su respuesta.

   a) Toda sucesión acotada de reales es convergente en $\mathbb{R}$.

   b) Si una sucesión de reales (a_n) converge a a entonces, la sucesión $b_n = \sqrt[3]{a_n}$ converge a $\sqrt[3]{a}$.

6. Sea la sucesión definida por $a_1 = 3$ y la siguiente recurrencia: $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}\ \forall\, n \geq 1$.

   a) Demostrar que $a_n \geq 0$ y $a_n \geq \sqrt{3}$, $\forall\, n \geq 1$.

   b) Demostrar que $a_{n+1} \leq a_n\ \forall\, n \geq 1$.

   c) Deducir que (a_n) tiene límite y calcularlo.

7. Sea la sucesión definida por $x_1 \geq 0$ y la siguiente recurrencia: $x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2+1}\ \forall\ n \geq 1$.

   a) Estudiar monotonía de (x_n).

   b) Mostrar que la hipótesis de convergencia lleva a una contradicción.

   c) Calcular el límite de $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

8. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

   a) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ *b)* $a_n = (-1)^n n$ *c)* $a_n = 3^{\cos n\pi}$ *d)* $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$

   e) $a_n = n^2\ (1+(-1)^n)$ *f)* $a_n = n^{(-1)^n}$ *g)* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

9. Sea a_n una sucesión tal que sus subsucesiones a_{2n}, a_{2n+1} y a_{3n} convergen. Probar que a_n es convergente.

10. Sea A un subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente. Demostrar que $L = \sup(A)$ si y solo si:

    a) $L \geq x$, $\forall\, x \in A$.

    b) Existe $\{x_m\}$ una sucesión de A tal que $\lim_{m\to+\infty} x_m = L$

Aplicaciones

Para realizar estos ejercicios, se recomienda leer el material complementario sobre sucesiones que se encuentra disponible en la página del curso.

1. Una taza de café recién servida tiene una temperatura de 82°. Después de 2 minutos en una habitación a 21° el café se enfría hasta 74°. Suponiendo que la temperatura del café en cada minuto n viene dada por $T_n = Ae^{-kn} + 21$, encuentra las constantes A y k. Cuanto tiempo hay que esperar para que el café llegue a una temperatura tolerable de 49°?

2. Un cultivo de bacterias Streptococcus A recién colocado en una placa de Petri con nutrientes tiene 100 individuos. Al hacer un conteo 60 minutos después se encuentran 450 individuos. Asumiendo un modelo exponencial $P_n = Ae^{kn}$ halle P_n. Cuál es el tiempo de espera hasta que la población se duplique?

3. En un sitio arqueológico se encuentran restos de carbón de una hoguera. El análisis paleobotánico muestra que la madera quemada era Coronilla. Del análisis de árboles de Coronilla vivos en la actualidad, se sabe que la proporción entre el C-14 y el C-16 es de 0,005. Si en una muestra de 4 grs. de carbón la proporción observada entre el C-14 y el C-16 (asumiendo que la muestra fue adecuadamente extraída para evitar su contaminación) es 0.003, cuantos años podemos atribuír a esos restos?

4. Una persona ingiere una pastilla de un analgésico que contiene 100 mgr. de ibuprofeno, cuya vida media en plasma es de 2 horas. Para que el analgésico surta efecto la cantidad de ibuprofeno debe ser de al menos 35 mgr. Calcule el máximo tiempo (en horas) hasta la toma de la siguiente pastilla.

5. Una persona compra un frasco de 250 cc. de un shampoo bastante caro. Cada vez que lo usa utiliza la tapa del frasco como medida (10 cc.), poniéndose una tapa del mismo. Para que le dure más tiempo, luego de ponerse el shampoo repone lo que sacó con agua. Esto es, saca una tapa de shampoo para usar y pone una tapa de agua en el frasco. Suponiendo que cuando la concentración sea un tercio de la inicial el producto ya no hace efecto, cuántas veces podrá reponer con agua antes de que el shampoo ya no surta efecto?

6. Una empresa entrevista a dos candidatos para un trabajo que requiere procesar un cierto producto. En dicha entrevista cada candidato debe hacer una práctica en lo que sería su futuro trabajo. El candidato A procesa 25 unidades en la primera hora y 45 en la segunda, mientras que el candidato B procesa 35 unidades en la primera hora y 50 en la segunda. Asumiendo que ambos candidatos no tienen ninguna experiencia previa en dicho proceso, calcule el máximo de unidades por hora que cada uno puede llegar a procesar. Basado en esta información, a cual de los dos candidatos contrataría?

Ejercicios complementarios

1. Sea X un conjunto de números reales. Decimos que X es **completo** si toda sucesión de Cauchy de elementos de X converge a un punto de X.

   Determinar si son completos los siguientes conjuntos:

$$A = [0,3] \quad B = (0,3) \quad C = [0,1) \cup (1,3] \quad D = [0,1] \cup [2,3]$$

2. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   a) En la recta real, dado cualquier subconjunto acotado H se cumple que para toda sucesión (a_n) tal que $a_n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existen subsucesiones convergentes de (a_n) cuyo límite $a \in H$.

   b) En la recta real, dado cualquier subconjunto completo y acotado H se cumple que para toda sucesión (a_n) tal que $a_n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}$ existen subsucesiones convergentes de (a_n) cuyo límite $a \in H$.

   c) En la recta real, dado cualquier subconjunto completo H, y cualquier sucesión (a_n) tal que $a_n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que todas las subsucesiones de (a_n) que son convergentes tienen su límite $a \in H$.