Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2016**

Práctico 2 - Números complejos.

1. Determinar los valores de i^k para todo $k \in \mathbb{Z}$.

2. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica y en notación polar. Representarlos geométricamente.

   a) $(1+i)^2$ *b)* $\dfrac{1}{i}$ *c)* $\dfrac{1}{1+i}$ *d)* $(2+3i)(3-4i)$ *e)* $(1+i)(1-2i)$ *f)* i^5+i^{16}

   g) -1 *h)* $-3i$ *i)* $1+i+i^2+i^3$ *j)* $\dfrac{1}{2}(1+i)(1-i^{-8})$ *k)* $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ *l)* $\dfrac{1}{(1+i)^2}$

3. Encontrar, en cada caso, el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes condiciones, y representar geométricamente.

   a) $|z| > 1$ *b)* $z-\overline{z} = 1$ *c)* $|z-i| = |z+i|$ *d)* $Im(z) < 2$ *e)* $|z-\bar{z}| = 2\,Re(z-1)$

4. *a)* Expresar en notación binómica: *a)* $e^{i\frac{\pi}{2}}$ *b)* $3e^{\pi i}$ *c)* $\dfrac{1-e^{\frac{\pi}{2}i}}{1+e^{\frac{\pi}{2}i}}$

   b) En cada caso, hallar todos los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen la relación dada:
   a) $x+iy = xe^{iy}$ *b)* $e^{x+iy} = -1$

5. ¿En qué complejo se transforma $-\sqrt{3}+3i$ al girarlo $\pi/2$? ¿Qué ángulo es necesario girarlo para que el resultado sea $2\sqrt{3}i$?

6. Observemos que los movimientos en el plano (traslaciones, rotaciones, simetrías) pueden representarse a través de funciones complejas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donde el afijo de $f(z)$ es el correspondiente en el movimiento al afijo de z.

   a) Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \alpha z$ donde α es un complejo fijo de módulo 1. Probar que f corresponde a una rotación y determinar sus elementos (centro y ángulo).

   b) Sea $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z) = \alpha z + \beta$ donde α y β son complejos fijos que cumplen $|\alpha| = 1$ y $\alpha \neq 1$. Probar que g corresponde a una rotación y determinar sus elementos (centro y ángulo).
   <u>Sugerencia</u>: El transformado del centro de la rotación, z_0, es él mismo. Luego de hallar el centro reduzca el problema al de la parte anterior escribiendo $(g(z) - z_0) = \alpha(z - z_0)$.

   c) <u>Problema del Pirata</u>
   En una isla oceánica un pirata esconde su tesoro siguiendo el siguiente procedimiento:

   1) La isla tiene dos árboles A_1 y A_2 y una horca H.
      El pirata se para en la horca H, camina hasta A_1, gira en sentido antihorario 90 grados, camina otro tanto y clava una estaca E_1 de modo que $distanc.(A_1, E_1)$=$distanc.(H, A_1)$.
   2) Repite el procedimiento con A_2, pero girando ahora en sentido horario y clava una estaca E_2.
   3) En el punto medio del segmento $\overline{E_1E_2}$ entierra el tesoro.

Al cabo de un tiempo el pirata vuelve a la isla y la horca y las estacas han desaparecido. Decidir si puede encontrar el tesoro o no, explicando por qué.

7. Representar geométricamente los complejos:

$$a)\quad (1+i)^n-(1-i)^n,\quad n\in\mathbb{N}\qquad b)\quad \sqrt[5]{1}\qquad c)\quad \sqrt[5]{i}\qquad d)\quad \sqrt[6]{8(\sqrt{3}-i)}$$

8. En $\mathbb{C}$, se consideran $\{z_1,\cdots,z_8\}$ las raíces octavas de 2^8, es decir aquellas que cumplen $z_k^8=2^8$ para cada $k=1,\cdots,8$. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

   a) $z_i=2$ para todo $i=1,\cdots,8$.
   b) Existen al menos dos raíces z_j, z_k tales que $z_j=-z_k$.
   c) Existen al menos dos raíces z_l, z_m tales que $\bar{z}_l=z_m$.
   d) Se cumple $z_1z_2z_3z_4z_5z_6z_7z_8=2^8$.

9. Sea $A=\left\{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\text{sen }\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^n\ /\ n\in\mathbb{N}\right\}$. ¿Cuántos elementos tiene este conjunto de números complejos?

10. Sea $P(z)$ un polinomio *con coeficientes reales.*

   a) Probar que $P(\overline{z})=\overline{P(z)}$ para todo $z\in\mathbb{C}$.
   b) Probar que si $z_0=a+ib$ es raíz de $P(z)$, entonces $\overline{z_0}=a-ib$ también es raíz de $P(z)$.
   c) Concluir que si $a+ib$ con $b\neq 0$ es raíz de $P(z)$, entonces $P(z)$ es divisible por el polinomio a coeficientes reales $Q(z)=z^2-2az+a^2+b^2$.
   d) Demostrar que si $a+ib$, con $a,b\in\mathbb{R}$ es una raíz de orden r de $P(z)$, es decir $P(z)$ es divisible por el polinomio $R(z)=(z-(a+ib))^r$, entonces $a-ib$ también es raíz de $P(z)$ de orden r. Concluir, en estas hipótesis con $b\neq 0$, que $P(z)$ es divisible por el polinomio a coeficientes reales $Q(z)=(z^2-2az+a^2+b^2)^r$.
   e) Sabiendo que $3+\sqrt{2}i$ es raíz del polinomio $P(z)=z^4-8z^3+21z^2-10z-22$ encontrar todas las raíces y factorear el polinomio según lo demostrado en las partes anteriores (*descomposición factorial en el cuerpo de los reales*).

11. Considere el polinomio $P(z)=z^4-2z^3+6z^2-8z+8$. Sabiendo que $P(z)$ tiene una raíz imaginaria pura halle todas sus raíces.

Ejercicio complementario

12. Se define el *seno y coseno complejos* mediante

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \text{sen}\,(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \forall\, z\in\mathbb{C}.$$

   a) Probar que las funciones seno y coseno complejas extienden a las funciones seno y coseno reales, en el sentido de que coinciden para $z\in\mathbb{R}$.
   b) Probar que $\text{sen}^2 z+\cos^2 z=1$, $\forall z\in\mathbb{C}$.
   c) Probar que $\text{sen}\,(-z)=-\text{sen}\,z$ y $\cos(-z)=\cos z$, $\forall z\in\mathbb{C}$.
   d) Hallar los ceros en el plano complejo de las funciones seno y coseno.