Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2016**

Práctico 1 - Inducción, número real

1. Demostrar las siguientes afirmaciones usando el método de inducción completa:

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

   c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, para todo $x \neq 1$

   d) $2^n \leq n! \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$

   e) $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall\, x > -1, \forall\, n \in \mathbb{N}$

   f) Dado un segmento de longitud unidad, entonces el segmento de longitud $\sqrt{n}$ se puede construir con regla y compás para cada entero positivo n. (Sugerencia: ver cómo se construye el segmento de longitud $\sqrt{2}$.)

   g) Sea b entero positivo, entonces para cada entero no negativo n existen enteros no negativos q y r tales que:
   $$n = qb + r, \quad 0 \leq r < b.$$

2. Demostrar que $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ son irracionales. Sugerencia: para tratar $\sqrt{3}$, por ejemplo, usar que todo entero es de la forma $3n$ o $3n+1$ o $3n+2$.

   ¿Por qué no es aplicable esta demostración para $\sqrt{4}$?

3. *a*) Si a es racional y b es irracional, ¿es $a+b$ necesariamente irracional? ¿Y si a y b son ambos irracionales?

   b) Si a es racional y b es irracional, ¿es ab necesariamente irracional?

   c) ¿Existe algún número a tal que a^2 es irracional, pero a^4 racional?

   d) ¿Existen dos números irracionales tales que sean racionales su suma y su producto?

4. Se considera el conjunto $\{0,1\}$ con las operaciones $+$ y $\times$ definidas por las siguientes tablas:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

   Investigar si en el conjunto $\{0,1\}$ con $+$ y $\times$ se cumplen los axiomas de cuerpo.

5. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla, si por el contrario es falsa dar un contraejemplo.

   a) $x < y \Rightarrow -x > -y$

   b) $x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$

   c) $x < y$ y $z < w \Rightarrow x + z < y + w$

   d) $x < y$ y $z < w \Rightarrow xz < yw$

6. Sea $S \subset \mathbb{N}$ un subconjunto de los naturales no vacío y acotado superiormente. Probar que el supremo de S pertenece a $\mathbb{N}$. ¿Se puede afirmar si es o no máximo?

7. Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, demostrar que existe por lo menos un $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$. Investigar si la afirmación anterior es cierta sustituyendo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$.

8. Si x es un número real arbitrario, probar que existen enteros m y n tales que $m < x < n$.

9. Si $x > 0$, demostrar que existe un entero positivo n tal que $\frac{1}{n} < x$.

10. Hallar supremos e ínfimos de los siguientes conjuntos y estudiar si son máximos o mínimos respectivamente:

    a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \cos\dfrac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *b*) $A = [0,1]\backslash\mathbb{Q}$ *c*) $A = \left\{\dfrac{m}{n} : 0 < m < n,\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$

    d) $A = \{2^{-p} + 3^{-q} :\ p, q \in \mathbb{N}\}$ *e*) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{3x+1}{x-2} \leq 0\right\}$

Ejercicios complementarios

11. Sobre $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ se definen dos operaciones $\square$ y $*$ tales que $x\square y = (x+y) - 1$ y $x * y = xy - (x+y) + 2$.

    a) Calcular $4\square 3$, $7\square 0$, $5 * 8$, $6 * 0$.

    b) Investigar si en $(\mathbb{R}, \square, *)$ se cumplen los axiomas de cuerpo.

    c) Resolver $(2\square x)\square 3 = 4$ y $(3\square x) * 5 = 2$.

12. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$ y $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

    a) 1) Si $A \subset B$ y B es acotado demostrar que $\text{ínf}(B) \leq \text{ínf}(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.
    2) Dar un ejemplo donde $A \subset B$, B acotado e $\text{ínf}(B) = \text{ínf}(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.

    b) 1) Si $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, demostrar que $\sup(A) \leq \text{ínf}(B)$.
    2) Dar un ejemplo donde $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, y $\sup(A) = \text{ínf}(B)$.

    c) 1) Probar que si A y B son acotados entonces $\text{ínf}(A+B) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B)$ y $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
    2) Si $A = (0, 2]$ y $C = (0, 3]$, encontrar un conjunto B tal que $A + B = C$. Verificar con estos conjuntos A y B las igualdades demostradas en el item anterior.

    d) 1) Probar que si A es acotado y $\alpha > 0$ entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ e $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$.
    2) Probar que si A es acotado y $\alpha < 0$ entonces $\sup(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$ e $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha \sup(A)$.
    3) ¿Qué pasa si $\alpha = 0$?